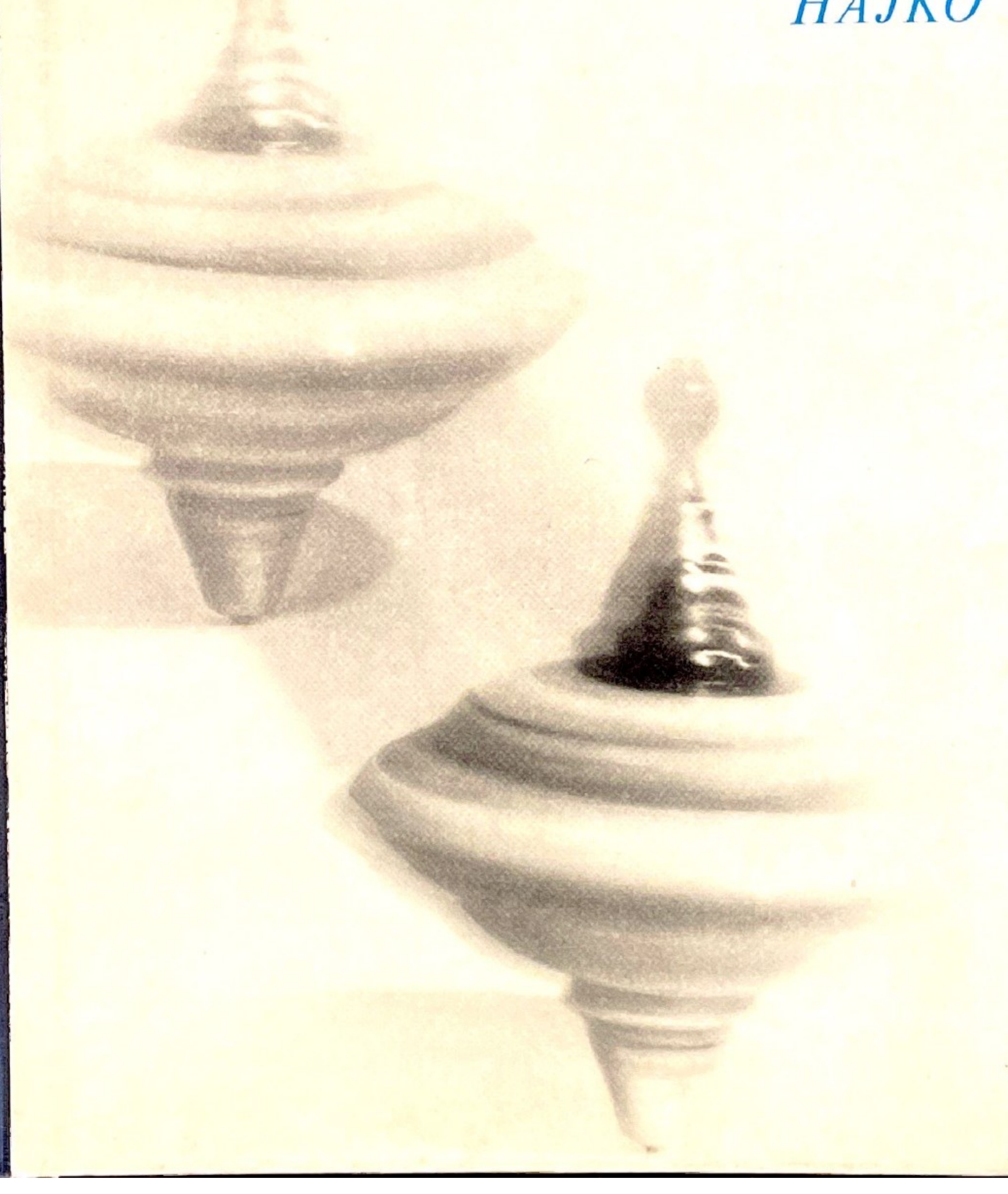
Physik in Beispielen

HAJKO



Hajko · Physik in Beispielen

2. Auflage

Mit 453 durchgerechneten Beispielen und 622 Aufgaben

mit Lösungen

Physik in Beispielen

Verfaßt von Dozenten

am Lehrstuhl für Physik der Technischen Hochschule in Košice

unter Leitung von

Prof. Dr. rer. nat. VLADIMIR HAJKO

ergänzt durch Beiträge von

Prof. Dr. rer. nat. habil. HEINZ SCHILLING, DAW Berlin

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG 

Titel des slowakischen Originals: Fizika V Prikladoch, Alfa-Verlag Bratislava/ČSSR 1962
Deutsche Ausgabe nach der 2. Auflage des slowakischen Originals,
ergänzt von Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. HEINZ SCHILLING, DAW Berlin, durch Abschnitte zu den Themen Relativitätstheorie und Quantentheorie
Übersetzer: Dipl.-Slawist ERWIN WEISS KUKA, Leipzig
Wissenschaftlicher Bearbeiter: Prof. Dr. phil. habil. GERHARD POPPEI, TH Magdeburg

2. Auflage
Lizenznummer 114–210/22/71 · Deutsche Demokratische Republik
ES 18 B 1
Gestaltung: Egon Hunger, Leipzig
Satz und Druck: Leipziger Druckhaus · Grafischer Großbetrieb · III/18/203
Redaktionsschluß: 15. 2. 1971
Bestellnummer 545 567 4
23,80

Vorwort

Aus dem Vorwort des slowakischen Originals

Im vorliegenden Buch wird an Hand von gelösten Beispielen und Aufgaben mit Resultatangabe die Anwendung von Gesetzen und Rechenmethoden aus denjenigen Bereichen der Physik erläutert, die den wesentlichen Inhalt der Kursvorlesung „Experimentalphysik“ an technischen Hochschulen ausmachen. Obwohl das Buch in erster Linie als Lehrmittel für Studierende technischer Disziplinen gedacht ist, wird es aber auch den an naturwissenschaftlichen Fakultäten immatrikulierten Hörern der ersten Studienjahre gute Dienste leisten. Es soll zur Verringerung der Schwierigkeiten beitragen, denen die Studierenden bekanntermaßen bei der Anwendung physikalischer Gesetze auf konkrete Beispiele begegnen.
Den einzelnen, in sich geschlossenen Teilen vorangestellt, faßten wir jeweils in Form einer Einleitung die Definitionen der physikalischen Größen, Gesetze und Lehrsätze zusammen, die sich auf den Lehrstoff des zugeordneten Teils beziehen, um dem Leser bei der Bearbeitung der Beispiele die Möglichkeit zu geben, den Inhalt der erforderlichen Größen und Beziehungen unmittelbar zu rekapitulieren, ohne dabei andere Bücher konsultieren zu müssen. Dennoch besteht wohl kein Zweifel daran, daß dem Studium dieses Lehrmittels das Studium eines Lehrbuchs der Physik vorausgehen oder gleichzeitig betrieben werden muß.

Vorwort der deutschen Ausgabe

Die Physik ist eine der wichtigsten Grundwissenschaften für die Ausbildung und Arbeit des Ingenieurs. Als eine für die moderne Technik wesensbestimmende Naturwissenschaft durchläuft sie – zusammen mit der von ihr erfaßten und durchsetzten Technik – einen tiefgreifenden und komplizierten Entwicklungsprozeß. Der Ingenieur

in erster Linie – aber auch der Naturwissenschaftler, der aus der Praxis erwachsende Probleme mit spezifisch physikalischen Mitteln und Methoden in Angriff nimmt, benötigt in hohem Maße die Fähigkeit, allgemeine Erkenntnisse und Prinzipien von Fall zu Fall auf ganz konkrete Sachverhalte anwenden zu können. Erfahrungsgemäß aber bereitet gerade diese Aufgabe dem Studierenden und nicht minder dem jungen Absolventen technischer und naturwissenschaftlicher Fakultäten besondere Schwierigkeiten, während die allgemeinen Prinzipien an sich, in ihrer naturgesetzlich fixierten Allgemeingültigkeit durchweg zum lückenlos reproduzierbaren Wissensinhalt gehören.

Die vorliegende Sammlung von Beispielen und Aufgaben erscheint geeignet, wesentlich zur Behebung dieser Schwierigkeit, allgemeine Prinzipien konkret anwenden zu können, beizutragen. Neben dem Lehrbuch und vom Studierenden mit der Vorlesung gleichlaufend bearbeitet soll das Buch „Physik in Beispielen" ein Mittler und Wegweiser zwischen den „reinen Höhen" der Theorie und den mühsam, aber unumgänglich notwendig zu beherrschenden Ebenen der wissenschaftlichen Praxis sein.

Der deutschen Ausgabe liegt die 2. Auflage des Buches zugrunde. Entsprechend den IUPAP-Regeln wurden gegenüber dem Original Änderungen der Größen und Einheiten vorgenommen. Die zu den einzelnen Aufgaben angegebenen Resultate entsprechen von Fall zu Fall den mit Schul-Logarithmentafeln oder Rechenstab erzielbaren Genauigkeitsansprüchen. Lediglich einige Beispiele und Aufgaben der Abschnitte 6. und 7. erfordern die Benutzung von genaueren Logarithmentafeln oder Rechenmaschinen.

In Anlehnung an die im Original vorgegebene Dreiteilung im Aufbau – theoretische Grundlage, Beispiele, Aufgaben – wurde das Werk durch Beiträge zu den Gebieten Quantentheorie und Relativitätstheorie ergänzt, die von Herrn Prof. Dr. Heinz Schilling verfaßt wurden.

Bearbeiter und Verlag

Inhaltsverzeichnis

1. Mechanik

1.1. Kinematik des Massenpunktes

Der **Ortsvektor** $\vec{r}$ eines Raumpunktes kann in bezug auf den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems mittels der rechtwinkligen Koordinaten des obengenannten Raumpunktes durch folgende Beziehung ausgedrückt werden:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Einheitsvektoren in Richtung der zugehörigen Koordinatenachsen).
Die **Geschwindigkeit** des in Bewegung begriffenen Punktes wird durch die Beziehung

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

definiert. Unter Bezugnahme auf Gl. (1) für den Ortsvektor kann man schreiben:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k},$$

d. h.,

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Wenn die Geschwindigkeitskoordinaten v_x, v_y und v_z gegeben sind, läßt sich der absolute Wert für die Geschwindigkeit ermitteln aus

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{2}$$

Die Geschwindigkeitsrichtung bestimmen wir mittels der Winkel α, β und γ, die die Geschwindigkeitsrichtung mit den Richtungen der einzelnen Koordinatenachsen x, y

und z bildet. Für diese gelten die Beziehungen

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}. \tag{3}$$

Die **Beschleunigung** des sich bewegenden Punktes wird durch die Beziehung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

definiert. Weiterhin gilt:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} =$$
$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k},$$

d. h.,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Für den Zusammenhang zwischen den Beschleunigungskoordinaten a_x, a_y und a_z und dem absoluten Wert der Beschleunigung sowie für die Winkel, die die Beschleunigungsrichtung mit den Richtungen der Koordinatenachsen bildet, gelten analoge Beziehungen wie die Gln. (2) u. (3).

Bei einer geradlinigen Bewegung kann für den Betrag der Geschwindigkeit und den der Beschleunigung folgendes geschrieben werden:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

wobei s die Weglänge der Bewegung ist.

Eine **gleichförmig geradlinige Bewegung** ist durch eine konstante Geschwindigkeit gekennzeichnet. Daher gilt

$$v = \text{const}, \quad a = \frac{dv}{dt} = 0, \quad s = \int v\,dt = vt + s_0,$$

wobei s_0 die Länge des zur Zeit $t = 0$ bereits durchlaufenen Weges darstellt. Allgemein wählen wir den Anfangspunkt für die Bahnmessung an der Stelle, an der sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ befand. Dann gilt $s_0 = 0$.

Eine **gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung** ist durch eine konstante Beschleunigung gekennzeichnet. Daher ist

$$a = \text{const}, \quad v = \int a\,\mathrm{d}t = at + v_0,$$

$$s = \int v\,\mathrm{d}t = \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

wobei s_0 die gleiche Bedeutung annimmt wie oben und v_0 die sogenannte Anfangsgeschwindigkeit darstellt, d. h. den Geschwindigkeitswert des Punktes zur Zeit $t = 0$. Wenn $a = \text{const}$, jedoch $a < 0$ ist, dann handelt es sich um eine **gleichförmig verzögerte geradlinige Bewegung.**

Spezielle Fälle einer gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung sind der **freie Fall**, der **senkrechte Wurf nach oben** und der **senkrechte Wurf nach unten**:

Freier Fall

$$a = g, \quad v_0 = 0, \quad v = gt, \quad s = \frac{1}{2}gt^2$$

Senkrechter Wurf nach oben

$$a = -g, \quad v_0 \neq 0, \quad v = v_0 - gt, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Senkrechter Wurf nach unten

$$a = g, \quad v_0 \neq 0, \quad v = v_0 + gt, \quad s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

Bei einer allgemeinen geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung nicht konstant, sondern eine Zeitfunktion. Es gilt also

$$a = a(t), \quad v = \int a(t)\,\mathrm{d}t, \quad s = \int \left(\int a(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t.$$

Die Bewegung eines Massenpunktes, die wir als **schiefen Wurf** bezeichnen, ist gleichfalls durch eine konstante Beschleunigung $a = g$ gekennzeichnet, jedoch fallen die Beschleunigung g und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Unterschied von einer gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung nicht in die gleiche Gerade. Wenn der schiefe Wurf sich in einer x,y-Ebene vollzieht, und zwar so, daß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der x-Achse den Winkel φ bildet (Bild 1), dann

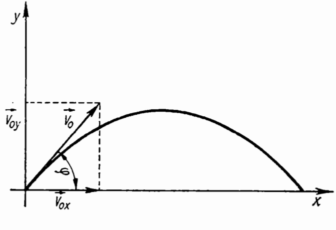


Bild 1

gelten die Beziehungen

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g;$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} = v_0 \cos\varphi, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\varphi;$$

$$x = v_0 \cos\varphi, \qquad y = v_{0t} \sin\varphi - \frac{1}{2} gt^2.$$

Bei einer krummlinigen Bewegung ist es üblich, die Beschleunigung des Punktes in eine *Tangentialkomponente* (Berührungskomponente) und in eine *Normalkomponente* (Zentripetalkomponente) zu zerlegen. Dabei gilt

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} - \frac{v^2}{r}\vec{\varrho},$$

wobei $\vec{\tau}$ der Einheitsvektor in Richtung der Tangente ist und $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor, der in Richtung der Normalen zur Bewegungsbahn am gegebenen Ort fällt und vom Krümmungsmittelpunkt zum gegebenen *Ort* gerichtet ist; r ist der Krümmungsradius der Bahn im gegebenen Punkt. Für die einzelnen Beschleunigungskomponenten und die Gesamtbeschleunigung gilt also

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{r}, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

Winkelgeschwindigkeit und **Winkelbeschleunigung** eines in Bewegung begriffenen Punktes werden durch folgende Beziehungen definiert:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2},$$

wobei $\vec{\varphi}$ der Vektor ist, dessen Wert durch die Größe des vom zugehörigen Ortsvektor eines in Bewegung begriffenen Punktes beschriebenen Winkels gegeben ist. Der Vektor steht senkrecht auf der Winkelebene. Als positiv gilt die Richtung, von der aus die positive Drehung des Winkels gegen den Uhrzeigersinn gesehen wird. Wenn es sich um eine krummlinige Bewegung handelt, kann man schreiben

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

In einem solchen Beispiel fallen die Vektoren $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ in eine gleiche Gerade, die senkrecht auf der Bewegungsebene steht.

Die Winkelgeschwindigkeit hängt mit der Umfangsgeschwindigkeit eines in Bewegung begriffenen Punktes gemäß folgender Beziehung zusammen:

$$v = r\omega$$

(r Krümmungsradius). Aus der angeführten Beziehung für eine ebene krummlinige Bewegung folgt weiter:

$$a_t = r\alpha .$$

Für den Wert der Umfangsgeschwindigkeit kann auch bei einer krummlinigen Bewegung die Beziehung $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ geschrieben werden, wobei s die Bahnlänge bedeutet.

Ein Spezialfall der krummlinigen Bewegung ist die *Bewegung auf einer Kreisbahn.* Die gleichförmige, eine Kreisbahn beschreibende Bewegung ist durch konstante Winkelgeschwindigkeit gekennzeichnet. Für sie gilt

$$\omega = \text{const}, \quad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \varphi = \int \omega \,\mathrm{d}t = \omega t + \varphi_0 ,$$

wobei φ_0 der Winkel ist, den der Ortsvektor des sich bewegenden Punktes – bezogen auf den Kreismittelpunkt – zur Zeit $t = 0$ mit einer bestimmten, als Basis gewählten Richtung des Ortsvektors bildet. Allgemein wird $\varphi_0 = 0$ gewählt.

Als **Periodendauer** T einer gleichförmigen Bewegung auf einer Kreisbahn bezeichnen wir die Zeitspanne, in der ein Punkt die Kreisbahn einmal durchläuft. Es gilt für diese

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Die **Frequenz** f einer Bewegung stellt die Anzahl der Umläufe in der Zeiteinheit dar:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} .$$

Die **gleichförmig beschleunigte Bewegung** auf einer **Kreisbahn** ist durch eine konstante Winkelbeschleunigung gekennzeichnet. Daher findet man

$$\alpha = \text{const}, \quad \omega = \int \alpha \,\mathrm{d}t = \alpha t + \omega_0 ,$$

$$\varphi = \int \omega \,\mathrm{d}t = \int (\alpha t + \omega_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 ,$$

wobei φ_0 eine analoge Bedeutung wie oben annimmt und ω_0 die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ darstellt.

Im Falle, daß $\alpha = \text{const}$, jedoch < 0 ist, handelt es sich um eine gleichförmig verzögerte Bewegung, die eine Kreisbahn beschreibt.

Wir setzen die Bewegung eines Punktes in Relation zu zwei Bezugssystemen S und S', wobei das System S' hinsichtlich des Systems S eine fortschreitende Bewegung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}^*$ und der Beschleunigung $\vec{a}^*$ sowie eine Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω und der Winkelbeschleunigung α vollführt. Danach ist die

Beziehung zwischen der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bzw. der Beschleunigung $\vec{a}$ des Punktes in bezug auf das System S und der Geschwindigkeit $\vec{v}'$ bzw. der Beschleunigung $\vec{a}'$ des Punktes hinsichtlich des Systems S' wie folgt gegeben:

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \omega \times \vec{r}' + \vec{v}',$$

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \omega \times (\omega \times \vec{r}') + 2(\omega \times \vec{v}') + \alpha \times \vec{r}' + \vec{a}',$$

wobei $\vec{r}'$ der Ortsvektor des in Bewegung begriffenen Punktes in Hinsicht auf einen Bezugspunkt des Systems S' ist. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ bzw. die Beschleunigung $\vec{a}$ bezeichnen wir als *absolut*, während die Geschwindigkeit $\vec{v}'$ bzw. die Beschleunigung $\vec{a}$, als *relativ* bezeichnet werden.

Unter der **Flächengeschwindigkeit** einer Bewegung verstehen wir den Vektor

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v},$$

dessen absoluter Betrag zahlenmäßig der Fläche gleichkommt, die vom Ortsvektor $\vec{r}$ eines Punktes in der Zeiteinheit gebildet wird. Wenn $\vec{r} \perp \vec{v}$ und der Anfangspunkt des Vektors $\vec{r}$ im Krümmungsmittelpunkt an einer gegebenen Stelle liegt, dann gilt

$$|\vec{p}| = \frac{1}{2} r^2 \omega.$$

B Beispiele[1])

1. Eine Strecke AB konstanter Länge wird so bewegt, daß ihre beiden Endpunkte A bzw. B entlang der y-Achse bzw. x-Achse eines bestimmten rechtwinkligen Koordinatensystems gleiten (Bild 2). Es ist festzustellen, welche Bahn bei dieser Bewegung der beliebig gewählte, auf der Strecke AB liegende Punkt M beschreibt.

Lösung

Bei der gemäß Bild 2 vorgesehenen Bezeichnung kann man schreiben

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi$$

oder

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin\varphi.$$

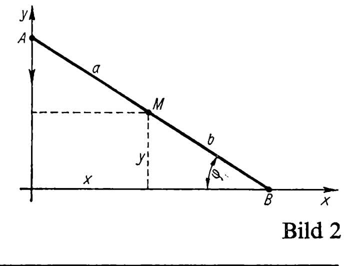


Bild 2

[1]) Die numerischen Rechnungen wurden, soweit erforderlich, mittels Logarithmentafel ausgeführt

Durch Potenzieren beider Gleichungen und durch Addieren erhalten wir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Der Punkt M bewegt sich längs einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

2. Die Bewegung eines Punktes sei durch die Gleichungen

$$x = a\,(\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{-kt}), \quad y = a\,(\mathrm{e}^{kt} - \mathrm{e}^{-kt})$$

bestimmt, wobei a und k Konstanten darstellen. Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn zu ermitteln und der Geschwindigkeits- sowie Beschleunigungswert des Punktes als Funktion des absoluten Wertes vom Ortsvektor des Punktes auszudrücken.

Lösung

Die Gleichungen, die die Bewegung des Punktes bestimmen, können in folgender Form geschrieben werden:

$$x = a\,(\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{-kt}) = 2a \cosh kt,$$

$$y = a\,(\mathrm{e}^{kt} - \mathrm{e}^{-kt}) = 2a \sinh kt .$$

Durch Potenzieren beider Gleichungen und durch Subtraktion erhalten wir

$$x^2 - y^2 = 4a^2, \tag{1}$$

da $\cosh^2 kt - \sinh^2 kt = 1$. Aus Gl. (1) ergibt sich, daß die Bahn des Punktes eine Hyperbel darstellt. Für den Geschwindigkeits- und Beschleunigungswert gilt

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{a^2k^2(\mathrm{e}^{kt} - \mathrm{e}^{-kt})^2 + a^2k^2(\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{-kt})^2} =$$

$$= k\sqrt{x^2 + y^2} = kr,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2} = k^2 r .$$

3. Die Bewegung eines Punktes ist in Polarkoordinaten durch die Gleichungen $r = A\mathrm{e}^{kt}$ und $\varphi = kt$ gegeben, wobei A und k Konstanten sind. Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn zu finden; Geschwindigkeit, Beschleunigung und Krümmungsradius der Bahn sind als Funktion der Polarkoordinate r auszudrücken.

Lösung

In Polarkoordinaten lautet die Bahngleichung $r = A\mathrm{e}^{\varphi}$, was die Gleichung der logarithmischen Spirale darstellt. Für die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung gilt

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}, \quad a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2} .$$

Wenn $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ ist, wobei r und φ gemäß der angegebenen Beziehung zeitabhängig sind, dann gilt

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \sin^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\cos\varphi + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \sqrt{A^2k^2e^{2kt} + r^2k^2} = \underline{kr\sqrt{2}}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 + 4\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^4 + r^2\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 4r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}} =$$

$$= \sqrt{A^2k^4e^{2kt} + 4A^2k^4e^{2kt} + r^2k^4 - 2rAk^4e^{kt}} = \sqrt{4k^4r^2} = \underline{2k^2r.}$$

Der Krümmungsradius R kann aus der Beziehung $v = R\dfrac{d\varphi}{dt}$ bestimmt werden, so daß sich ergibt

$$R = kr\frac{\sqrt{2}}{k} = \underline{r\sqrt{2}}\,.$$

4. Ein Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 km h^{-1}. Durch Einsatz der Bremsen kann der Zug innerhalb 2 min zum Halten gebracht werden. Unter der Voraussetzung, daß die Bewegung des Zuges während der Bremsung gleichförmig verzögert ist, ist die Entfernung desjenigen Ortes von der angesteuerten Bahnstation zu errechnen, an dem die Bremsen betätigt werden müssen.

Lösung

Für Geschwindigkeit und Weg einer gleichförmig beschleunigten Bewegung gelten die Beziehungen

$$v = v_0 + at, \quad s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Nach Ablauf der Zeit $t = 2$ min soll die Geschwindigkeit $v = 0$ sein, damit wird

$$a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{72\ \text{km h}^{-1}}{2\ \text{min}} = -\frac{1}{6}\ \text{m s}^{-2}.$$

Während des Bremsvorgangs legt der Zug bis zum Halten den Weg zurück

$$s = 72\ \text{km h}^{-1}\cdot 2\ \text{min} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\ \text{m s}^{-2}\cdot 2^2\ \text{min}^2 = 1200\ \text{m} = \underline{1{,}2\ \text{km}.}$$

Demnach müssen die Bremsen bereits in einer Entfernung von 1,2 km vor der Station in Betrieb gesetzt werden.

5. Eine Straßenbahn setzt sich mit der Beschleunigung $a = 0{,}3 \text{ m s}^{-2}$ in Bewegung. Welche Zeit benötigt sie für das Passieren des ersten Meters ihrer Bahn? In welcher Zeit durchfährt sie den zehnten Meter, und wie groß ist ihre Fahrgeschwindigkeit am Ende des zehnten Bahnmeters?

Lösung

Für die Geschwindigkeit und die Strecke, die von der Straßenbahn durchfahren wird, gelten die Beziehungen

$$v = at; \quad s = \frac{1}{2} at^2.$$

Für die Zeit, welche die Straßenbahn für ihren ersten Meter benötigt, gilt

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2\text{m}}{0{,}3 \text{ m s}^{-2}}} = \underline{2{,}58 \text{ s}}.$$

Die Zeit t^*, während der sie den zehnten Meter ihrer Bahn durchfährt, ermitteln wir aus den Beziehungen

$$s_9 = \frac{1}{2} at_9^2 \quad s_{10} = \frac{1}{2} at_{10}^2$$

$$t^* = t_{10} - t_9 = \sqrt{\frac{2s_{10}}{a}} - \sqrt{\frac{2s_9}{a}} = \sqrt{\frac{20 \text{ m}}{0{,}3 \text{ m s}^{-2}}} - \sqrt{\frac{18 \text{ m}}{0{,}3 \text{ m s}^{-2}}} =$$

$$= (8{,}15 - 7{,}75) \text{ s} = \underline{0{,}4 \text{ s}}.$$

Am Ende des zehnten Meters hat die Straßenbahn die Geschwindigkeit

$$v_{10} = at_{10} = 0{,}3 \text{ m s}^{-2} \cdot 8{,}15 \text{ s} = \underline{2{,}45 \text{ m s}^{-1}}.$$

6. Ein Körper werde vom Erdboden aus mit der Geschwindigkeit $v_0 = 4{,}9 \text{ m s}^{-1}$ senkrecht aufwärts geworfen. Gleichzeitig beginnt aus der Höhe, die dieser Körper maximal erreicht, ein anderer mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten zu fallen. Es ist die Zeit t^* zu bestimmen, zu der beide Körper einander begegnen, desgleichen die Entfernung h von der Erdoberfläche sowie die Geschwindigkeiten v_1^* und v_2^* beider Körper im Moment ihres Zusammentreffens. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

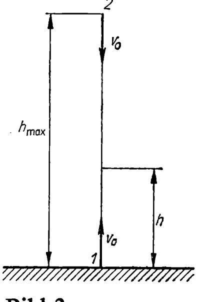


Bild 3

Lösung

Für den Körper 1 (Bild 3), der aufwärts geworfen wurde, gelten die Beziehungen

$$s_1 = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2; \quad v_1 = v_0 - gt.$$

Seine maximale Höhe erreicht er in der Zeit t_m. Hier ist seine Geschwindigkeit $v_1 = 0$, d. h., $t_m = v_0/g$. Seine Maximalhöhe

beträgt

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.$$

Für den senkrecht abwärts fallenden Körper 2 gelten die Beziehungen

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2; \quad v_2 = v_0 + g t.$$

Für den Moment des Zusammentreffens finden wir

$$s_1 + s_2 = h_{\max}, \text{ d. h., } v_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} + v_0 t^* + \frac{1}{2} g t^{*2} = \frac{v_0^2}{2g},$$

so daß wir für die Zeit t^* bis zum Treffen beider Körper den Wert

$$t^* = \frac{v_0}{4g} = \frac{4{,}9 \text{ m s}^{-1}}{4 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2}} = \underline{0{,}125 \text{ s}}$$

erhalten. Für die Höhe h des Zusammentreffens sowie für die hier geltenden Geschwindigkeiten v_1^* und v_2^* erhalten wir durch Einsetzen des Wertes von t^* in die entsprechenden Beziehungen

$$h = \frac{v_0^2}{4g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{16 g^2} = \frac{7 v_0^2}{32 g} = \frac{7 \cdot 4{,}9^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{32 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2}} = \underline{0{,}53 \text{ m}};$$

$$v_1^* = v_0 - \frac{v_0}{4} = \frac{3 v_0}{4} = 3{,}67 \text{ m s}^{-1}; \quad v_2^* = v_0 + \frac{v_0}{4} = \frac{5 v_0}{4} = \underline{6{,}12 \text{ m s}^{-1}}.$$

7. Ein Körper bewegt sich im luftleeren Raum frei fallend aus der Höhe $h = 245$ m. Teilen Sie diese Fallstrecke in $n = 5$ Teilstrecken, und zwar so, daß die Fallzeit des Körpers für jede dieser Teilstrecken gleich groß ist.

Lösung

Wir halten folgendes fest: $h = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Wenn wir die Fallzeit, die für alle Teilabschnitte gleich groß ist, mit dem Zeichen t_0 angeben, so finden wir

$$x_1 = \frac{1}{2} g t_0^2; \quad x_1 + x_2 = \frac{1}{2} g (2 t_0)^2; \ \ldots;$$

$$h = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2} g (n t_0)^2.$$

Für t_0 gilt dann

$$t_0^2 = \frac{2h}{g} \frac{1}{n^2},$$

so daß sich ergibt:

$$x_1 = \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{h}{n^2}; \quad x_2 = \frac{1}{2} g (2 t_0)^2 - x_1 = h \left(\frac{2}{n}\right)^2 - h \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{3h}{n^2};$$

$$\cdots; \ x_n = \frac{2n - 1}{n^2} h.$$

Für $h = 245$ m und $n = 5$ erhalten wir also

$$x_1 = \frac{245\,\text{m}}{25} = \underline{9{,}8\,\text{m}}; \quad x_2 = \frac{3 \cdot 245\,\text{m}}{25} = \underline{29{,}4\,\text{m}};$$

$$x_3 = \underline{49{,}0\,\text{m}}; \quad x_4 = \underline{68{,}6\,\text{m}}; \quad x_5 = \underline{88{,}2\,\text{m}}.$$

8. Ein Massenpunkt führt eine geradlinige Bewegung so aus, daß seine Beschleunigung mit der Zeit gleichförmig anwächst und während der ersten 10 Sekunden der Bewegung vom Nullwert auf den Wert $5\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ steigt. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes nach Ablauf von 10 s, und welche Strecke legt er in dieser Zeit zurück, wenn er sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befand?

Lösung

Für die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Zeit kann geschrieben werden:

$$a = kt, \quad k = \frac{a_{10}}{t_{10}} = \frac{5\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}{10\,\text{s}} = 0{,}5\,\text{m}\,\text{s}^{-3}.$$

Demnach erhalten wir für Geschwindigkeit und Weglänge:

$$v = \int a(t)\,\text{d}t = \int kt\,\text{d}t = \frac{1}{2}\,kt^2;$$

$$v_{10} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\,\text{m}\,\text{s}^{-3} \cdot 10^2\,\text{s}^2 = \underline{25\,\text{m}\,\text{s}^{-1}};$$

$$s = \int v\,\text{d}t = \int \frac{1}{2}\,kt^2\,\text{d}t = \frac{1}{6}\,kt^3;$$

$$s_{10} = \frac{1}{6} \cdot 0{,}5\,\text{m}\,\text{s}^{-3} \cdot 10^3\,\text{s}^3 = \underline{83{,}33\,\text{m}}.$$

9. Eine Granate verlasse das Kanonenrohr mit der Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 1000\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ unter einem Abschußwinkel von $\varphi_0 = 55°$. Unter Vernachlässigung von Luftwiderstand und Erdkrümmung ist die theoretische Schußweite und die maximale Schußhöhe zu bestimmen.

Lösung

Für die Koordinaten eines bestimmten Punktes der Geschoßbahn gelten wie beim schiefen Wurf die Beziehungen

$$x = v_0 \cos \varphi_0; \quad y = v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{1}{2}\,gt^2.$$

Im Punkt B (Bild 4) ist die y-Komponente der Geschwindigkeit gleich Null, so daß geschrieben werden kann

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \varphi_0 - gt = 0.$$

Für die Zeit t, in der die Granate den Punkt B erreicht, gilt

$$t = \frac{v_0 \sin \varphi_0}{g},$$

so daß sich ergibt:

$$y_{\max} = v_0 \frac{v_0 \sin \varphi_0}{g} \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi_0}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi_0}{2g} = \underline{34{,}1 \text{ km}}.$$

Dieser Wert stellt die von der Granate theoretisch erreichbare Maximalhöhe dar.
Im Punkt C ist $y = 0$. Diesen Punkt erreicht die Granate nach einer Zeit, für welche gilt:

$$v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} g t^2 = 0; \quad t = \frac{2v_0 \sin \varphi_0}{g}. \tag{1}$$

Die zweite Wurzel von Gl. (1) $t = 0$ gilt für den Abschußort, an dem ja gleichfalls $y = 0$ ist. Für die Schußweite d erhalten wir dann

$$d = v_0 \frac{2v_0 \sin \varphi_0}{g} \cos \varphi_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi_0}{g} = \underline{95{,}7 \text{ km}}.$$

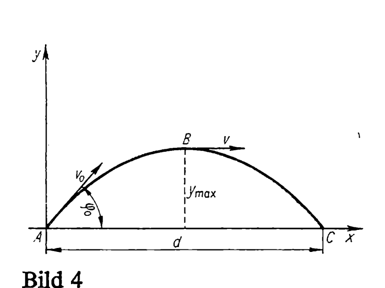
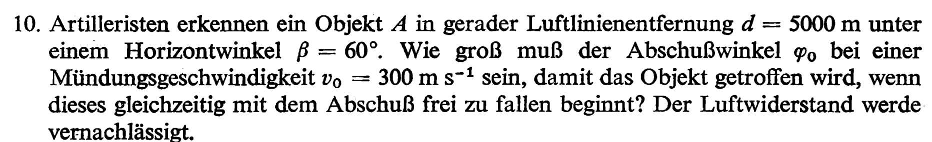


Bild 4

Bild 5



10. Artilleristen erkennen ein Objekt A in gerader Luftlinienentfernung $d = 5000$ m unter einem Horizontwinkel $\beta = 60°$. Wie groß muß der Abschußwinkel φ_0 bei einer Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 300 \text{ m s}^{-1}$ sein, damit das Objekt getroffen wird, wenn dieses gleichzeitig mit dem Abschuß frei zu fallen beginnt? Der Luftwiderstand werde vernachlässigt.

Lösung

Diese Aufgabe ist leicht zu lösen, wenn wir daran denken, daß im Moment des Zusammentreffens die Koordinaten von Schuß und Objekt zusammenfallen müssen (Bild 5). Für die Schußkoordinaten gelten die Beziehungen

$$x = v_0 t \cos \varphi_0, \quad y = v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} g t^2.$$

Die Objektkoordinaten wiederum erfüllen die Beziehungen

$$x' = d \cos \beta, \quad y' = d \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2.$$

Im Moment des Zusammentreffens muß demnach gelten

$$v_0 t \cos \varphi_0 = d \cos \beta;$$

$$v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} g t^2 = d \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2.$$

Nach Dividieren der zweiten Gleichung durch die erste erhalten wir

$$\tan \varphi_0 = \tan \beta, \quad \text{also} \quad \varphi_0 = \beta = 60°.$$

Der Abschußwinkel muß also ebenfalls 60° betragen.

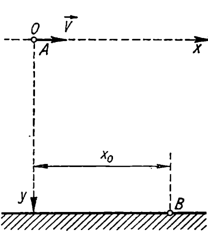


Bild 6

11. Ein Flugzeug A fliegt in einer Höhe $h = 4000$ m mit einer Horizontalgeschwindigkeit $v = 500 \text{ km h}^{-1}$. In welcher waagerecht gemessenen Entfernung x_0 (Bild 6) vom Punkt B muß ein beliebiger Körper aus dem Flugzeug abgeworfen werden, damit er im freien Fall in B auftrifft? Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

Lösung

Der aus dem Flugzeug abgeworfene frei fallende Körper vollführt, bezogen auf die Erdoberfläche, eine Bewegung von der Art des horizontalen Wurfes mit einer Anfangsgeschwindigkeit, die der Flugzeuggeschwindigkeit im Moment des Abwurfs entspricht. Für die Lage des Körpers in jedem beliebigen Moment gilt dann

$$x = vt; \quad y = \frac{1}{2} g t^2.$$

Die Bedingung dafür, daß der Körper im Punkt B auftrifft, kann durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden:

$$x_0 = v t_0; \quad h = \frac{1}{2} g t^2,$$

für die gesuchte Größe x_0 erhalten wir daraus

$$x_0 = v \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ m}}{3{,}6 \cdot 10^3 \text{ s}} \sqrt{\frac{8000 \text{ m}}{9{,}81 \text{ m s}^{-2}}} = \underline{3958 \text{ m}}.$$

12. Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Abschußwinkel φ hochgeworfener Massenpunkt vollführt im luftleeren Raum eine Bewegung in Form einer Parabel (Bild 7), deren Parameterdarstellung durch folgende Gleichungen gegeben ist:

$$x = v_0 t \cos \varphi; \quad y = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2.$$

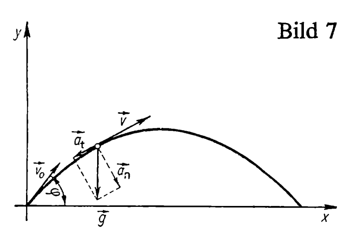


Bild 7

Es sind die Größen Geschwindigkeit, Tangential- und Normalbeschleunigung zu ermitteln, durch welche die Bewegung des Massenpunkts an einem beliebigen Ort seiner Bahn ausgezeichnet ist.

Lösung

Für die Darstellung der Koordinaten und der Geschwindigkeit gelten die Beziehungen

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\varphi; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\varphi - gt;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2g\left(v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} gt^2\right)} = \underline{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}.$$

Die Geschwindigkeit bildet mit den Koordinatenachsen Winkel, für die gilt:

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = \frac{v_0 \cos\varphi}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}};$$

$$\cos(v, y) = \frac{v_y}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = \frac{v_0 \sin\varphi - gt}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}.$$

Für die Tangential- und Normalbeschleunigung erhalten wir:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{g\frac{dy}{dt}}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = \underline{-\frac{g(v_0 \sin\varphi - gt)}{v}};$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = g^2 - \frac{g^2(v_0 \sin\varphi - gt)^2}{v^2} = g^2\left(1 - \frac{v_y^2}{v^2}\right) = \frac{g^2}{v^2}(v^2 - v_y^2) =$$

$$= \frac{g^2}{v^2} v_x^2 = \frac{g^2 v_0^2 \cos^2\varphi}{v^2}; \quad \underline{a_n = \frac{g v_0 \cos\varphi}{v}}.$$

13. Ein Körper beginnt sich um eine feste Achse mit der konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = 0{,}04\ \text{s}^{-2}$ zu drehen. Nach welcher Zeit, vom Beginn der Drehbewegung an gerechnet, bildet die Gesamtbeschleunigung eines beliebigen Punktes des Körpers mit der Tangentialgeschwindigkeit desselben Punktes einen Winkel von $\varphi = 76°$?

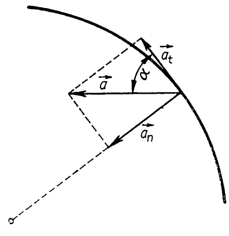


Bild 8

Lösung

Für den Winkel, den die Gesamtbeschleunigung eines bestimmten Punktes des rotierenden Körpers mit der Geschwindigkeitsrichtung bildet (Bild 8), gilt

$$\tan\varphi = \frac{a_n}{a_t} = \frac{r\omega^2}{r\alpha} = \frac{\omega^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 t^2}{\alpha} = \alpha t^2,$$

so daß sich für die Zeit t^*, in der die angegebene Bedingung erfüllt wird, ergibt:

$$t^* = \sqrt{\frac{\tan\varphi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\tan 76°}{0{,}04\,\text{s}^{-2}}} = \sqrt{\frac{4{,}01}{0{,}04\,\text{s}^{-2}}} = \underline{10\,\text{s}.}$$

14. Um den Mantel einer Rolle mit dem Radius r, die sich um eine horizontale Achse drehen kann, ist ein Seil gelegt, an welchem ein Körper hängt (Bild 9). Die Bewegung des Körpers wird durch die Gleichung $s = {}^1/_2\, at^2$ definiert. Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Beschleunigung des Punktes M, der auf dem Rollenumfang liegt.

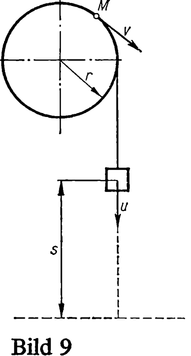


Bild 9

Lösung

Die Geschwindigkeit des Körpers ist durch die Beziehung

$$u = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$$

gegeben. Die Geschwindigkeit v des Punktes M hat ebenfalls den Wert $v = at$. Für die Tangential- bzw. Normalbeschleunigung des Punktes M gilt somit

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{r}.$$

Der Wert der Gesamtbeschleunigung des Punktes M ändert sich dann mit der Zeit entsprechend der Beziehung

$$a^* = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^4t^4}{r^2}} = \underline{\frac{a}{r}\sqrt{r^2 + a^2t^4}.}$$

15. Ein Zug bewegt sich gleichförmig verzögert auf einer Bahn der Länge $s = 800$ m, die in Form eines Kreises mit dem Radius $r = 800$ m gekrümmt ist. Es sind zu bestimmen: der Wert der Gesamtbeschleunigung eines beliebigen Punktes des Zuges am Anfangs- und Endpunkt des gekrümmten Streckenabschnitts sowie die Zeit, die der Zug zum Durchfahren dieser Strecke benötigt. Die Zuggeschwindigkeit am Beginn der Kurvenstrecke sei $v_0 = 54\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ und am Ende $v = 18\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

Lösung

Für die Bewegung eines beliebigen Punktes des Zuges gelten die Beziehungen

$$v = v_0 + a_t t; \quad s = v_0 t + \frac{1}{2}\, a_t t^2.$$

Wenn wir in diese Gleichungen für v, v_0 und s die in der Aufgabe gegebenen Werte einsetzen, können wir daraus die Zeit t^*, in der der Zug den Streckenabschnitt durchfährt, sowie die Tangentialbeschleunigung a_t errechnen. Man findet nämlich

$$\frac{v - v_0}{t^*} = a_t; \quad s = v_0 t^* + \frac{1}{2}\,\frac{v - v_0}{t^*}\, t^{*2} = \frac{1}{2}\,(v_0 + v)\, t^*,$$

so daß sich ergibt:

$$t^* = \frac{2\,s}{v_0 + v} = \frac{1600\,\text{m}}{\frac{72 \cdot 10^3}{3{,}6 \cdot 10^3}\,\text{m s}^{-1}} = 80\,\text{s}; \quad a_t = \frac{v - v_0}{t^*} = -0{,}125\,\text{m s}^{-2}.$$

Für den Wert der Gesamtbeschleunigung gilt die Gleichung $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, wobei man die Normalbeschleunigung am Anfangs- und Endpunkt der Kurvenstrecke aus den Beziehungen

$$a_{n0} = \frac{v^2}{r} \quad \text{bzw.} \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

bestimmen kann. Nach Einsetzen der hieraus berechneten Werte in den Ausdruck für die Gesamtbeschleunigung erhalten wir diese am Anfang und am Ende der Kurvenstrecke zu

$$\underline{a_0 = 0{,}308\,\text{m s}^{-2}}; \quad \underline{a = 0{,}129\,\text{m s}^{-2}}.$$

16. Ein Rad dreht sich mit der Tourenzahl $n = 1500\,\text{U min}^{-1}$. Durch Einsatz einer Bremse kann man erreichen, daß seine Drehbewegung in eine gleichförmig verzögerte übergeht und das Rad nach einer Bremszeit von $t_0 = 30\,\text{s}$ stehenbleibt. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung α und die Zahl der Umdrehungen, die das Rad vom Beginn des Bremsvorgangs bis zu seinem Stillstand ausführt.

Lösung

Für den Momentanwert der Winkelgeschwindigkeit gilt die Beziehung

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

wobei $\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \frac{1500}{60\,\text{s}} = 50\,\pi\,\text{s}^{-1}$. In der Zeit $t = t_0$ ist offensichtlich $\omega = 0$, so daß sich ergibt

$$\omega_0 + \alpha t = 0$$

und somit gefunden wird

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{50}{30}\,\pi\,\text{s}^{-2} = \underline{-5{,}24\,\text{s}^{-2}}.$$

Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes des Rades beschreibt, bezogen auf den Mittelpunkt, in der Zeit t_0 den Winkel

$$\varphi_0 = \omega_0 t_0 + \frac{1}{2}\,\alpha t_0^2 = 1500\,\pi - \frac{5}{6}\,\pi\,900 = 750\,\pi.$$

Für die Anzahl der in der Zeit t_0 ausgeführten Umdrehungen finden wir

$$N = \frac{\varphi_0}{2\pi} = \frac{750\,\pi}{2\,\pi} = \underline{375}.$$

17. Untersuchen Sie die Bewegung eines Massenpunktes, dessen Ortsvektor entsprechend der Beziehung $\vec{r} = \vec{\imath} A \cos bt + \vec{\jmath} A \sin bt$ von der Zeit abhängt, wobei $A = 6$ m und $b = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}^{-1}$ ist.

Lösung

Für die Geschwindigkeit gilt die Beziehung

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{3\pi}{2}\left(-\vec{\imath}\sin\frac{\pi}{4}t + \vec{\jmath}\cos\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{m\,s^{-1}},$$

womit sich für den absoluten Geschwindigkeitsbetrag ergibt

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{\frac{9\pi^2}{4}}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{3\pi}{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Also ist der Geschwindigkeitsbetrag konstant.
Die Richtung der Geschwindigkeit kann man für jeden Moment durch den Einheitsvektor in Geschwindigkeitsrichtung bestimmen, und zwar

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = -\vec{\imath}\sin\frac{\pi}{4}t + \vec{\jmath}\cos\frac{\pi}{4}t.$$

Für die Beschleunigung erhalten wir analog

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{3\pi^2}{8}\left(-\vec{\imath}\cos\frac{\pi}{4}t - \vec{\jmath}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Der Betrag der Gesamtbeschleunigung ist also

$$|\vec{a}| = a = \frac{3\pi^2}{8}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

ebenfalls konstant. Für die Tangential- und Normalbeschleunigung resultiert weiter

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{3\pi^2}{8}\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Der Krümmungsradius $R = v^2/a_n = 6$ m ist also konstant. Da die Komponente des Ortsvektors zur Z-Achse gleich Null ist, handelt es sich um eine Bewegung in der X,Y-Ebene mit dem konstanten Krümmungsradius $R = 6$ m. Es ist eine Bewegung auf einer Kreisbahn. Den vom Ortsvektor $\vec{r}$ und vom Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ gebildeten Winkel kann man aus den folgenden Relationen bestimmen:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{r}\vec{v}}{rv} = \frac{A(\vec{\imath}\cos bt + \vec{\jmath}\sin bt)\;Ab(-\vec{\imath}\sin bt + \vec{\jmath}\cos bt)}{A\,Ab} =$$

$$= -\cos bt \sin bt + \cos bt \sin bt = 0.$$

Es ist also $\varphi = 90°$, d. h., der Geschwindigkeitsvektor ist ständig senkrecht zum Ortsvektor gerichtet. Da $v = \omega R$ ist, erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{6}\,\mathrm{s}^{-1} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Für die Umlaufzeit T gilt dann

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 8\,\mathrm{s}.$$

Der Vektor $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit ist senkrecht zur Kreisebene gerichtet, auf der die angegebene Bewegung des Massenpunktes erfolgt. Es gilt also für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = (\pi/4)\vec{k}\,\mathrm{s}^{-1}$. Für die Geschwindigkeit gilt auch die Beziehung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ oder

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{\pi}{4}\vec{k} \times \left(6\vec{i}\cos\frac{\pi}{4}t + 6\vec{j}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{m\,s}^{-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4} \\ 6\cos\frac{\pi}{4}t; & 6\sin\frac{\pi}{4}t; & 0 \end{vmatrix}\,\mathrm{m\,s}^{-1} = \underline{\left(\vec{j}\,\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}t - \vec{i}\,\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{m\,s}^{-1}}.$$

Wir erhalten offenbar den gleichen Ausdruck wie oben.

18. Bestimmen Sie die Periodendauer für die Bewegung eines Körpers, der in zwei schiefen Ebenen ab- und aufwärts gleitet, die mit der Horizontalen den Winkel α bzw. β (Bild 10) bilden, wenn dieser in der Zeit $t = 0$ aus der Stellung A freigelassen wird. Reibungsverluste sowie Verluste an kinetischer Energie beim Aufprall von einer Ebene auf die andere bleiben unberücksichtigt.

Lösung

Wir setzen voraus, daß sich der Körper anfangs im Punkt A in der Höhe h über der horizontalen Ebene befindet. Zum Punkt B gelangt der Körper mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

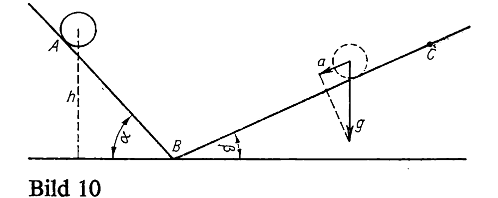


Bild 10

und bewegt sich längs der Bahn BC mit einer Geschwindigkeit weiter, die sich gemäß folgender Beziehung mit der Zeit verändert:

$$v = v_0 - at = v_0 - gt\sin\beta.$$

Die maximale Höhe im Punkt C erreicht der Körper zur Zeit t_1, für welche gilt

$$t_1 = \frac{v_0}{g \sin \beta} \,.$$

Die Zeit, in der der Körper vom Punkt C nach B zurückkehrt, ist ebenfalls t_1, so daß sich für die Gesamtzeit, in der er sich auf dem Abschnitt BC aufwärts bewegt und wieder zurückkehrt, ergibt:

$$T_1 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g \sin \beta} \,.$$

Analog gilt für die Gesamtzeit der Bewegung des Körpers auf dem Abschnitt BA und zurück

$$T_2 = \frac{2v_0}{g \sin \alpha} \,,$$

so daß die Periodendauer des Körpers auf den angegebenen schiefen Ebenen wie folgt ermittelt wird:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right).$$

19. Eine Kurbel $OA = r$ (Bild 11) dreht sich um die feste Achse O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Im Punkt A ist die Kurbel mit einer Pleuelstange der Länge l gelenkig verbunden, welche den Kreuzkopf B in Bewegung setzt, der sich zwischen zwei parallel zueinander verlaufenden Ebenen bewegt. Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kreuzkopfes B.

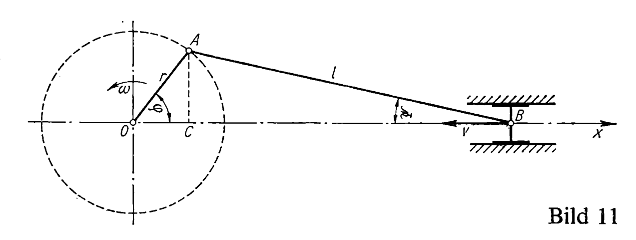


Bild 11

Lösung

Für die x-Koordinate des Punktes B gilt unter Berücksichtigung der Bezeichnungen des Bildes 11

$$x = \overline{OC} + \overline{CB} = r \cos \varphi + l \cos \psi .$$

Durch die Anwendung des Sinussatzes kann der Zusammenhang zwischen den beiden Winkeln φ und ψ in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi . \tag{1}$$

Für den Geschwindigkeitsbetrag des Punktes B kann dann geschrieben werden

$$v = \frac{dx}{dt} = -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - l \sin \psi \frac{d\psi}{dt} . \qquad (2)$$

Durch Differentiation von Gl. (1) nach der Zeit erhalten wir

$$\cos \psi \frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{l} \cos \varphi \cdot \omega, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \omega,$$

wobei $d\varphi/dt = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel darstellt. Gl. (2) kann dann in folgender Form geschrieben werden:

$$v = -r\omega \left(\sin \varphi + \sin \psi \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \right) = -r\omega \frac{\sin (\varphi + \psi)}{\cos \psi} .$$

Diese Relation ermöglicht, die Geschwindigkeit des Punktes B für beliebige Werte des Winkels φ anzugeben. So ergibt sich z. B. für $\varphi = 0$ auch $\psi = 0$ und somit auch $v = 0$. Bei der Stellung $\varphi = 90°$ ist $\sin (\varphi + \psi) = \sin (90° + \psi) = \cos \psi$, so daß $v = -r\omega$ ist. Für die Beschleunigung des Punktes B gilt

$$a = \frac{dv}{dt} = -r\omega^2 \left[\cos \varphi - \frac{r}{l} \left(\frac{\cos^2\varphi}{\cos^3\psi} - \frac{\sin^2\varphi}{\cos \psi} \right) \right],$$

wenn wir $\sin \psi$ nach Gl. (1) ausgedrückt haben. Für den Fall, daß $l \gg r$ ist, kann geschrieben werden $\cos \psi = 1$, und für Geschwindigkeit und Beschleunigung erhalten wir die Beziehungen

$$\underline{v = -r\omega \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right),}$$

$$\underline{a = -r\omega^2 \left(\cos \varphi - \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right).}$$

20. Das Rad eines Eisenbahnwaggons rollt ohne Reibung auf einem geraden Gleis, und zwar so, daß die Geschwindigkeit seines Mittelpunktes v_0 ist. Es ist die Geschwindigkeit für die Punkte A und B in dem Moment zu bestimmen, der in Bild 12 festgehalten wurde.

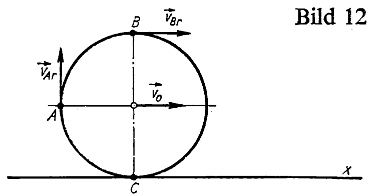


Bild 12

Lösung

Wir gehen von den Beziehungen aus, die den Zusammenhang zwischen absoluter und relativer Geschwindigkeit angeben, wenn das absolute Bezugssystem mit dem Gleis fest verbunden und das relative mit der Radachse verbunden ist. Für die zu bestimmende Absolutgeschwindigkeit der Punkte A und B ergibt sich dann

$$\vec{v}_A = \vec{v}^* + \vec{v}'_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_{Ar},$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}^* + \vec{v}'_B = \vec{v}_0 + \vec{v}_{Br}.$$

Da sich das Rad bezüglich des relativen Bezugssystems gleichförmig dreht, weist die Relativgeschwindigkeit jedes beliebigen Punktes am Radumfang den gleichen Wert auf. Es ist also $\vec{v}_{Ar} = \vec{v}_{Br} = \vec{v}_{Cr}$. Für den Punkt C ist die Absolutgeschwindigkeit im gegebenen Augenblick gleich Null, d. h.,

$$\vec{v}_C = \vec{v}_0 + \vec{v}_{Cr} = 0,$$

woraus deutlich ersichtlich ist, daß $\vec{v}_{Cr} = \vec{v}_{Ar} = \vec{v}_{Br} = \vec{v}_0$ ist. Bezüglich der Geschwindigkeitsrichtung von $\vec{v}_{Ar}$ und $\vec{v}_{Br}$ kann man für den Wert der absoluten Geschwindigkeit der Punkte A und B wie folgt schreiben:

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = \underline{v_0\sqrt{2}}\,; \quad v_B = v_0 + v_0 = \underline{2v_0}.$$

Die Geschwindigkeitsrichtung von v_A ist durch die Beziehung

$$\tan\varphi = \frac{v_0}{v_0} = 1$$

gegeben, d. h. $\varphi = 45°$, wobei φ der Winkel ist, den die Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ mit der x-Achse bildet. Die Geschwindigkeit $\vec{v}_B$ verläuft offensichtlich parallel zur x-Achse.

21. Eine waagerechte, kreisförmige Platte dreht sich so um eine senkrechte Mittelpunktsachse, daß sie in der Minute 120 Umdrehungen ausführt. Entlang ihrem Radius bewegt sich mit einer relativ zur Platte gleichförmigen Geschwindigkeit von $v' = 5\ \text{cm s}^{-1}$ ein Punkt. Es sind die Werte für Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes bezüglich seiner Umgebung zur Zeit $t = 20$ s zu ermitteln, wobei vorausgesetzt wird, daß er sich zur Zeit $t = 0$ im Mittelpunkt der Platte befand.

Lösung

Wir greifen wieder auf die Beziehungen zurück, die den Zusammenhang zwischen absoluter und relativer Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung zum Ausdruck bringen. Für die absolute Geschwindigkeit finden wir

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \omega \times \vec{r}' + \vec{v}'.$$

In unserem Falle ist $\vec{v}' = \text{const}$ und $\vec{r}' = \vec{v}'t$, während $\vec{v}^* = 0$ ist. Es ergibt sich somit

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}' + \vec{v}' = \omega \times \vec{v}'t + \vec{v}'.$$

Da die Vektoren $\omega \times \vec{v}'t$ und $\vec{v}'$ senkrecht zueinander liegen, gilt

$$v = \sqrt{v'^2 + \omega^2 v'^2 t^2} = v'\sqrt{1 + \omega^2 t^2} = \underline{12{,}57\ \text{m s}^{-1}},$$

wenn wir ω aus der Beziehung $\omega = 2\pi n = 2\pi \dfrac{120}{60\,\text{s}} = 4\pi\ \text{s}^{-1}$ ermittelt haben.

Für die absolute Beschleunigung kann geschrieben werden

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \omega \times (\omega \times \vec{r}') + 2(\omega \times \vec{v}') + \alpha \times \vec{r}' + \vec{a}'.$$

In unserem Beispiel gilt: $\vec{a}' = 0$, $\vec{a}^* = 0$ und $\alpha = 0$, so daß resultiert

$$\vec{a} = \omega \times (\omega \times \vec{r}') + 2\,(\omega \times \vec{v}').$$

Da die Vektoren $\omega \times (\omega \times \vec{r}')$ und $\omega \times \vec{v}'$ senkrecht zueinander gerichtet sind, gilt

$$a = \sqrt{(\omega^2 v' t)^2 + 4\omega^2 v'^2} = \omega v' \sqrt{4 + \omega^2 t^2} = \underline{158 \text{ m s}^{-2}}.$$

22. Zwei Meteoriten M_1 und M_2 bewegen sich auf einer gemeinsamen Ellipse, in deren einem Brennpunkt S sich die Sonne befindet (Bild 13). Die Entfernung zwischen beiden Meteoriten ist so gering, daß der Ellipsenbogen M_1M_2 als Strecke betrachtet werden kann. Beim Durchgang durch das Perihel P haben beide Meteoriten voneinander den Abstand d. Wie groß ist ihr gegenseitiger Abstand beim Durchgang durch das Aphel A, wenn bekannt ist, daß sich die Meteoriten mit einer konstanten Flächengeschwindigkeit bewegen und wenn wir die Entfernungen $SP = r_1$ und $SA = r_2$ kennen?

Lösung

Übereinstimmend mit der Aufgabenstellung gilt für die Flächengeschwindigkeit

$$|\vec{p}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = k,$$

wobei k eine Konstante darstellt. In den Punkten P bzw. A kann der Wert der jeweiligen Flächengeschwindigkeit wie folgt ausgedrückt werden:

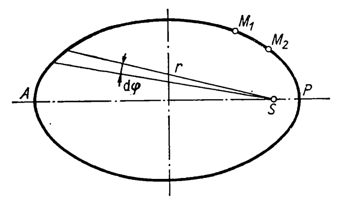


Bild 13

$$p_P = \frac{1}{2} r_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_P = k; \quad p_A = \frac{1}{2} r_2^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_A = k,$$

woraus resultiert

$$r_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_P = r_2^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_A.$$

Diese Gleichung aber gibt die Beziehung

$$r_1(a_t)_P = r_2(a_t)_A$$

an, wobei $(a_t)_2$ bzw. $(a_t)_A$ die Tangentialbeschleunigungen der Meteoriten im Punkt P bzw. A darstellen. Da die gegenseitige Entfernung beider Meteoriten sehr gering ist, kann man dafür in P bzw. A schreiben

$$d_P = \frac{1}{2} (a_t)_P \Delta t^2; \quad d_A = \frac{1}{2} (a_t)_A \Delta t^2,$$

so daß sich ergibt

$$\frac{d_A}{d_P} = \frac{(a_t)_A}{(a_t)_P} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{d. h.} \quad d_A = \frac{r_1}{r_2} d_P = \underline{\frac{r_1}{r_2} d},$$

da ja $d_P = d$ ist. Die Situation ist nämlich so, als ob beide Meteoriten unter gleichen Bedingungen, lediglich mit einem zeitlichen Abstand Δt, auf die gleiche elliptische Bahn gebracht worden wären.

A Aufgaben

1. Die Bewegung eines Punktes ist durch die Gleichungen $x = A_1 t^2 + B_1$ und $y = A_2 t^2 + B_2$ definiert, wobei $A_1 = 0{,}2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $B_1 = 0{,}05\ \mathrm{m}$, $A_2 = 0{,}15\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ und $B_2 = -0{,}03\ \mathrm{m}$ ist. Ermitteln Sie Größe und Richtung von Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit $t = 2\ \mathrm{s}$.
2. Ein Punkt bewegt sich geradlinig, und zwar so, daß die von ihm durchlaufene Bahn gemäß der Beziehung $x = At + Bt^2$ zeitabhängig ist. Dabei ist $A = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ und $B = 6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.
   Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit v^* des Punktes in der Zeit zwischen dem Beginn der zehnten und dem Ende der zwölften Sekunde, und welche Momentangeschwindigkeiten ergeben sich zu den genannten Zeitpunkten?
3. Ein Punkt bewegt sich auf der x-Achse so, daß die Zeitabhängigkeit seiner Bahn durch die Gleichung $x = \frac{k}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$ gegeben ist, wobei k und ω Konstanten sind. Ermitteln Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktionen von x.
4. Die Bewegung eines Punktes wird in Polarkoordinaten durch die Gleichungen $r = nt$ und $\varphi = bt$ dargestellt, wobei n und b Konstanten sind. Formulieren Sie die Gleichung der Bahnbewegung, und drücken Sie die Zeitabhängigkeit von Geschwindigkeit und Beschleunigung aus.
5. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes zur Zeit $t = 10\ \mathrm{s}$, der eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ausführt, wenn seine Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ Null war und wenn er nach $t_1 = 25\ \mathrm{s}$ einen Weg von 110 m Länge durchlaufen hat?
6. Ein Auto fährt in einem bestimmten Punkt seiner Bahn mit der Geschwindigkeit $v_0 = 60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ und 100 m weiter mit der Geschwindigkeit $v = 40\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. Wie groß ist die Beschleunigung des Autos, wenn wir voraussetzen, daß seine Bewegung gleichförmig verzögert ist?
7. Zwei Körper bewegen sich mit den Beschleunigungen $a_1 = 6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ und $a_2 = 4\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ sowie mit den Anfangsgeschwindigkeiten $v_{01} = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und $v_{02} = 15\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ aufeinander zu. Die Anfangsentfernung zwischen beiden beträgt $l = 750\ \mathrm{m}$. Welche Zeit vergeht, bis beide Körper aufeinandertreffen?
8. Zwei Körper, die anfangs 100 m Abstand haben, bewegen sich geradlinig aufeinander zu: der erste mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, der zweite gleichförmig beschleunigt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und der Beschleunigung $a = 4\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Bestimmen Sie den Abstand des Treffpunktes vom Ausgangsort des ersten Körpers sowie die Zeit, nach welcher sie sich treffen.
9. Ein Geschoß verläßt seinen 10 m langen Lauf mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 500\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Wie groß ist die Beschleunigung im Lauf, und in welcher Zeit durchläuft ihn das Geschoß, wenn wir voraussetzen, daß die Bewegung innerhalb des Laufes gleichförmig beschleunigt wird?
10. Ein Beobachter, der im Moment des Anfahrens eines Zuges an dessen Spitze stand, bemerkt, daß der erste Waggon in der Zeit $t_1 = 4\ \mathrm{s}$ unmittelbar an ihm vorbeifährt. Wie lange wird der n-te Waggon brauchen, um an ihm vorbeizufahren (z. B. $n = 7$), wenn alle Waggons gleich lang sind? Die Bewegung

des Zuges soll als geradlinig gleichförmig beschleunigt angesehen werden.

11. Mit welcher Geschwindigkeit bewegte sich ein Auto bis zu dem Moment, da der Fahrer zu bremsen begann, wenn es sich während des Bremsvorgangs bis zum Halt mit der konstanten Beschleunigung $a = -1{,}2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ bewegte und dabei eine Strecke von 135 m zurücklegte?
12. Aus einer Höhe $h = 195$ m über dem Erdboden bewegt sich ein Körper im freien Fall. Im Moment, da dieser Körper zu fallen beginnt, werfen wir vom Boden aus einen anderen Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 65\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ senkrecht aufwärts. Wann und in welcher Höhe begegnen beide Körper einander?
13. Von einer bestimmten Höhe aus werfen wir mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 gleichzeitig zwei Körper: den ersten senkrecht aufwärts, den zweiten senkrecht nach unten. Welche Zeitabhängigkeit ergibt sich für die gegenseitige Entfernung d beider Körper?
14. Wir lassen eine Bleikugel in einen Schacht fallen. Ihr Aufschlag auf dem Boden des Schachts ist nach Ablauf von 10 s zu hören. Wie tief ist der Schacht, wenn wir mit einer Luftschallgeschwindigkeit $v = 340\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ rechnen?
15. Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit v_0, mit der eine Kugel senkrecht aufwärts abgefeuert wurde, und die Höhe h, die sie maximal erreichte, wenn sie nach insgesamt 20 s wieder auf den Boden zurückfällt.
16. Ein frei fallender Körper hat in einem bestimmten Punkt A seiner Bahn die Geschwindigkeit $v_A = 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Ermitteln Sie die Zeit, in welcher der Körper eine Entfernung AB zurücklegt, wenn er in B eine Geschwindigkeit $v_B = 2{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ hat. Wie groß ist die Entfernung AB?
17. Die Beschleunigung eines Massenpunktes verringert sich bei seiner geradlinigen Bewegung gleichförmig von einem Anfangswert $a_0 = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ zur Zeit $t = 0$ in einem Zeitraum von 20 s auf den Wert Null. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit $t = 20$ s, und welchen Weg legte er in dieser Zeit zurück, wenn er sich bei t_0 in Ruhe befand?
18. Eine Elektrolok fährt aus der Ruhestellung heraus mit einer gleichförmig wachsenden Beschleunigung an, so daß sie zur Zeit $t_1 = 100$ s den Wert $a_1 = 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ annimmt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Lokomotive zur Zeit t_1 sowie den Weg, den sie dann vom Start aus zurückgelegt hat.
19. Die Beschleunigung eines Massenpunktes, der sich auf einer Geraden bewegt, ist durch die Beziehung $a = k_1 - k_2 v$ gegeben (v Geschwindigkeit des Massenpunktes, k_1, k_2 Konstanten). Ermitteln Sie die Zeitabhängigkeit der Beschleunigung, der Geschwindigkeit und der zurückgelegten Wegstrecke, wenn sich der Massenpunkt zur Zeit t_0 in Ruhe befand.
20. Aus einem Geschütz der Küstenartillerie, das in einer Höhe $h = 30$ m über NN aufgestellt ist, wird ein Geschoß unter dem Abschußwinkel $\varphi_0 = 45°$ und der Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 1000\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ abgefeuert. Wie groß ist der horizontale Abstand des auf dem Meeresspiegel gelegenen Zielpunktes von der Kanone? (Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt.)
21. Wir bemerken ein unbewegtes Objekt in gerader Luftlinienentfernung $d = 6000$ m unter dem Winkel $\varphi = 30°$ über dem Horizont. Wie groß muß die Mündungsgeschwindigkeit eines Geschosses mindestens sein, um das Objekt noch erreichen zu können? Wie groß muß der entsprechende Abschußwinkel φ_0 sein?

22. Ein Massenpunkt bewegt sich mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ auf einem Kreis mit dem Radius $r = 2\,\mathrm{m}$. Berechnen Sie Periodendauer, Frequenz und Zentripetalbeschleunigung dieser Bewegung.
23. Ein Massenpunkt vollführt eine Bewegung auf einem Kreis mit dem Radius $r = 0{,}2\,\mathrm{m}$ und der konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = 2\,\mathrm{s}^{-2}$. Berechnen Sie den Wert der Tangential-, Normal- und Gesamtbeschleunigung am Ende der vierten Sekunde von Beginn der Bewegung an gerechnet, wenn sich der Massenpunkt zur Zeit t_0 in Ruhe befand.
24. Nach dem Verlassen einer Station wächst die Geschwindigkeit eines Zuges gleichförmig an. Drei Minuten nach Abfahrt erreicht sie auf einer als Kreislinie gekrümmten Bahn mit dem Radius $r = 800\,\mathrm{m}$ den Wert $v = 72\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Es ist der Wert der Tangential-, Normal- und Gesamtbeschleunigung für die Zeit $t = 2\,\mathrm{min}$, vom Zeitpunkt des Anfahrens gerechnet, zu bestimmen.
25. Ein Rad beginnt aus der Ruhestellung heraus eine Drehbewegung mit der konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = 2\,\mathrm{s}^{-2}$. Wieviel Umdrehungen macht das Rad in den ersten 15 Sekunden seiner Bewegung?
26. Ein Rad beginnt aus der Ruhestellung heraus sich gleichförmig beschleunigt zu drehen, und zwar so, daß es während der ersten fünf Sekunden 12,5 Umdrehungen ausführt. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit am Ende der fünften Sekunde?
27. Durch einen Treibriemen wird von einem Rad A mit dem Durchmesser $d_A = 0{,}5\,\mathrm{m}$, welches in der Minute 30 Umdrehungen ausführt, eine Drehbewegung auf das Rad B mit dem Durchmesser $d_B = 0{,}25\,\mathrm{m}$ übertragen. Wieviel Umdrehungen je Minute vollführt das Rad B?
28. In einem 300 m breiten Flußbett fließt das Wasser mit einer Geschwindigkeit von $1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ein Fährschiff bewegt sich relativ zum Wasser mit der Geschwindigkeit $5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. In welcher Richtung muß sich das Fährschiff bewegen, wenn es in kürzester Zeit das andere Ufer erreichen soll, und wie lange dauert die Überfahrt?
29. Ein Zug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Regentropfen, die bei Windstille infolge Luftreibung mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht herabfallen, hinterlassen auf den Fensterscheiben des Zuges Spuren, die um 30° von der Senkrechten abweichen. Mit welcher Geschwindigkeit fallen die Tropfen?
30. Ein Punkt M bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit c, von der Spitze ausgehend, auf der Mantellinie eines Kegels. Der Kegel selbst rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse. Es ist die absolute Beschleunigung des Punktes zur Zeit t, vom Bewegungsbeginn an gerechnet, zu bestimmen, wenn der Winkel zwischen Mantellinie und Kegelachse mit φ angegeben wird.
31. Ein Rad mit dem Radius r dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine senkrecht zur Radebene gerichtete und durch seinen Mittelpunkt gehende Achse so, daß es in der Minute n_1 Umdrehungen ausführt. Gleichzeitig bewegt sich ein Punkt M (Bild 14) gleichförmig auf dem Radumfang in entgegengesetzter Richtung, indem er in der Minute n_2 Umläufe längs des Rad-

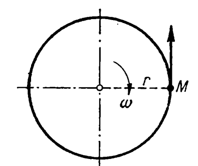


Bild 14

umfanges ausführt. Es ist die absolute Beschleunigung des Punktes M zu bestimmen.

32. Eine Stange OA dreht sich um eine senkrecht zu ihr gerichtete und durch den Punkt O der Stange verlaufende Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Ein Punkt M (Bild 15) bewegt sich mit konstanter relativer Geschwindigkeit v' längs der Stange. Es ist die absolute Beschleunigung des Punktes M zu bestimmen.

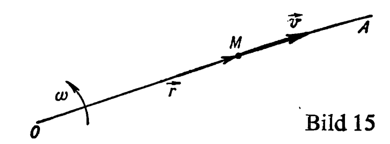


Bild 15

1.2. Dynamik des Massenpunktes

Die Dynamik gründet sich auf die drei NEWTONschen Bewegungsgesetze.

Erstes Bewegungsgesetz (Trägheitssatz)

Ein Massenpunkt befindet sich im Zustand der Ruhe oder vollführt eine gleichförmig geradlinige Bewegung, solange er nicht durch die Wirkung anderer Körper gezwungen wird, diesen seinen Bewegungszustand zu ändern.

Da wir die wechselseitige Einwirkung von Körpern mit dem Begriff Kraft bezeichnen, kann man das erste Bewegungsgesetz folgendermaßen formulieren:

Ein Massenpunkt befindet sich im Zustand der Ruhe oder vollführt eine gleichförmig geradlinige Bewegung, solange er nicht durch die Wirkung bestimmter Kräfte gezwungen wird, diesen seinen Bewegungszustand zu ändern.

Zweites Bewegungsgesetz (Kraftgesetz)

Eine Kraft, die auf einen Massenpunkt einwirkt, ist proportional dem Produkt seiner Masse und der Beschleunigung, die sie ihm verleiht.

Mathematisch kann man das Kraftgesetz (wenn die zugehörige Proportionalitätskonstante gleich eins gesetzt wird) durch die folgende Formel ausdrücken:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{1}$$

wobei $\vec{a}$ die Beschleunigung darstellt, welche die Kraft $\vec{F}$ dem Massenpunkt mit der Masse m verleiht.

Ein Sonderfall der Kraft ist die Gewichtskraft $\vec{G}$ eines Körpers. Es gilt dafür die Beziehung $\vec{G} = m\vec{g}$, wobei $\vec{g}$ die Fallbeschleunigung ist.

Drittes Bewegungsgesetz (Wechselwirkungsgesetz)

Die Kräfte, mit denen zwei Körper aufeinander einwirken, sind gleich groß, jedoch von umgekehrter Richtung.

Wenn auf einen Massenpunkt mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ einwirken, dann ist ihr Einfluß auf den Massenpunkt so groß, als ob auf ihn eine einzige, die resultierende Kraft $\vec{F}_r$ einwirkte, die durch die Summe der wirkenden Kräfte als Vektoren, d. h. $\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i$, gegeben ist.

Für den Fall, daß $\sum \vec{F}_i = 0$ ist, sprechen wir davon, daß sich der Massenpunkt im Gleichgewicht befindet.
Die Gültigkeit der NEWTONschen Bewegungsgesetze ist an **inertiale** Bezugssysteme gebunden. Ein solches ist z. B. das an die Fixsterne angeschlossene Bezugssystem sowie jedes andere, das in bezug auf das an die Fixsterne gebundene System eine gleichförmig geradlinige Bewegung ausführt.
Wenn wir die Bewegung eines Massenpunktes auf ein **nichtinertiales** Bezugssystem beziehen, dann müssen wir außer den Kräften, mit denen wir es im Inertialsystem selbst zu tun haben und durch die wir die gegenseitigen Einflüsse der Körper kennzeichnen, auch die sog. Trägheitskräfte berücksichtigen, und an Stelle von Gl. (1) muß dann geschrieben werden:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_1, \tag{2}$$

wobei $\vec{F}$ die Resultierende der Trägheitskräfte darstellt.
Wenn es sich um ein solches nichtinertiales System handelt, das gegenüber irgendeinem anderen inertialen System eine gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung mit der Beschleunigung $\vec{a}^*$ vollführt, dann gilt $\vec{F} = -m\vec{a}^*$.
Wenn wir es mit einem nichtinertialen System zu tun haben, das sich gegenüber irgendeinem Inertialsystem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dreht (als solches kann man auch ein mit unserer Erde fest verbundenes System ansehen), dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_0 + \vec{F}_C, \\ \vec{F}_0 &= m(\omega \times \vec{r}') \times \vec{\omega}, \\ \vec{F}_C &= -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') \end{aligned} \tag{3}$$

($\vec{F}_0$ Zentrifugalkraft, $\vec{F}_C$ CORIOLIS-Kraft). Die Bedeutung der Symbole in den Gln. (3) ist folgende: Der Vektor $\vec{r}$ ist der Ortsvektor des Massenpunktes m hinsichtlich eines Bezugspunktes auf der Drehachse, der Vektor $\vec{v}'$ stellt die relative Geschwindigkeit des Massenpunktes gegenüber dem angegebenen nichtinertialen System dar.
Der **Impuls der Kraft** $\vec{F}$, die auf einen Massenpunkt während der Zeit t einwirkt, ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\vec{p} = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t.$$

Für die konstante Kraft gilt offensichtlich $\vec{p} = \vec{F}t$.
Die **Bewegungsgröße** eines Massenpunktes wird durch die Beziehung $\vec{p} = m\vec{v}$ ausgedrückt. Zwischen dem Kraftstoß und der Bewegungsgröße eines Massenpunktes, auf den eine Kraft wirkt, besteht der Zusammenhang

$$\Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0,$$

d. h., der Impuls der auf einen freien Massenpunkt wirkenden Kraft entspricht dem Zuwachs seiner Bewegungsgröße.
Die **Arbeit** als die Wirkung einer Kraft längs eines Weges definieren wir in der Mechanik durch die Beziehung

$$\vec{W} = \int_{(\vec{r}_1)}^{(\vec{r}_2)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

($\vec{r}_1$ Ortsvektor des Anfangspunktes, $\vec{r}_2$ Ortsvektor des Endpunktes der Bahn, auf der sich der Angriffspunkt der Einzelkraft $\vec{F}$ bewegt). Im Sonderfall, wenn die Kraft konstant und die Bahn, auf der sich der Angriffspunkt der Kraft bewegt, gerade ist und in der Kraftrichtung liegt, kann die Arbeit auf einfache Weise durch das Produkt aus Kraft und Bahnlänge ausgedrückt werden.
Die **kinetische Energie** eines in Bewegung begriffenen Massenpunktes ist durch die Beziehung $W = {}^1/_2\, mv^2$ gegeben. Der Satz von der kinetischen Energie besagt folgendes:
Die Arbeit, die die auf einen Massenpunkt einwirkende Kraft auf einem bestimmten Wege verrichtet, ist gleich dem Anwachsen der kinetischen Energie des Massenpunktes, d. h.

$$W = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

(v Geschwindigkeit des Massenpunktes am Ende des entsprechenden Weges, v_0 Geschwindigkeit am Anfangspunkt).
Die **Leistung** P wird durch den Ausdruck definiert

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\,.$$

Für den Fall, daß die Arbeit mit der Zeit gleichförmig anwächst, kann die Leistung durch die Beziehung $P = W/t$ ausgedrückt werden, wobei W die in der Zeit t verrichtete Arbeit darstellt.
Nach dem allgemeinen **Newtonschen Gravitationsgesetz** wirken zwei Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2 mit einer Kraft aufeinander, die den Wert hat

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(r gegenseitige Entfernung der Massenpunkte, γ sog. allgemeine Gravitationskonstante).

Die Kraft, mit der ein Massenpunkt der Masse m_1 auf einen anderen der Masse m_2 wirkt, kann in der Form ausgedrückt werden

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12},$$

wobei $\vec{r}_{12}$ der Ortsvektor des zweiten Massenpunktes in bezug auf den ersten ist und den Wert $r = |\vec{r}_{12}|$ hat.

Die **Feldstärke** $\vec{E}$ in einem bestimmten Punkt eines Gravitationsfeldes ist derjenige Anteil der Kraft $\vec{F}$, der im gegebenen Punkt des Feldes auf die Masseneinheit wirkt, d. h.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

In der Umgebung eines Massenpunktes der Masse M gilt für die Gravitationsfeldstärke

$$\vec{E} = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r},$$

wobei $\vec{r}$ den Ortsvektor desjenigen Punktes, in dem die Feldstärke gesucht ist, in bezug auf den Massenpunkt mit der Masse M darstellt.

In der Umgebung mehrerer Massenpunkte der Massen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ berechnen wir die Gravitationsfeldstärke in einem bestimmten Punkt als die Vektorsumme der Feldstärken der einzelnen Massenpunkte, die im gegebenen Punkt zusammenwirken, d. h.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = -\gamma \frac{M_1}{r^3} \vec{r}_1 - \gamma \frac{M_2}{r^3} \vec{r}_2 - \cdots -\gamma \frac{M_n}{r^3} \vec{r}_n =$$

$$= -\gamma \sum \frac{M_i}{r^3} \vec{r}_i.$$

Die angegebene Summierung geht in eine Integration über, wenn es sich um ein Gravitationsfeld in der Umgebung eines Körpers handelt, der homogen mit Masse erfüllt ist.

Die **potentielle Energie** eines Massenpunktes der Masse m in einem bestimmten Punkt eines Gravitationsfeldes ist für irgendeinen Bezugspunkt durch die *Arbeit* gegeben, welche die Feldkräfte verrichten, wenn der Massenpunkt von der Stelle, an der die potentielle Energie bestimmt werden soll, zum Bezugspunkt bewegt wird. Analog wird die potentielle Energie eines Massenpunktes definiert, der sich in einem anderen Kraftfeld befindet. (Ein an einer nicht in der Gleichgewichtslage befindlichen Feder aufgehängter Massenpunkt unterliegt z. B. der Einwirkung durch die Federkräfte.)

Im Gravitationsfeld einer *Punktmasse M* ist die potentielle Energie eines Massenpunktes der Masse m durch die Gl.

$$W_p = -\gamma m M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{4}$$

gegeben, wobei r die Entfernung der Stelle, in der wir die potentielle Energie des Massenpunktes m bestimmen wollen, von der Punktmasse M ist und r_0 die Entfernung des Bezugspunktes von der Punktmasse M angibt. In den meisten Fällen beziehen wir die potentielle Energie auf einen unendlich weit entfernten Bezugspunkt, wodurch $r_0 = \infty$ wird und Gl. (4) die Gestalt annimmt

$$W_p = -\gamma m M \frac{1}{r}. \tag{5}$$

Für die potentielle Energie eines auf einer Feder liegenden Massenpunktes findet man beim Ausschlag x bezüglich der Gleichgewichtslage folgenden Wert:

$$W_p = W = \int_x^0 -kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2,$$

wenn wir voraussetzen, daß die Kraft, mit der die Feder auf den Massenpunkt einwirkt, $F = -kx$ ist.

Das **Potential** in einem bestimmten Punkt eines Gravitationsfeldes entspricht der Arbeit W, die aufgewendet werden muß, um eine Masse m vom gegebenen Punkt bis ins Unendliche zu bringen:

$$V = \frac{W}{m} = \frac{1}{m}\int_\infty^r \gamma \frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (5) ist das Gravitationspotential in der Umgebung einer Punktmasse M, bezogen auf Unendlich, durch die Beziehung gegeben:

$$V = -\gamma \frac{M}{r}.$$

In der Umgebung mehrerer Punktmassen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ berechnen wir das Gravitationspotential in einem bestimmten Punkt als die Summe der Potentiale der einzelnen Punktmassen, d. h.

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = -\gamma \frac{M_1}{r_1} - \gamma \frac{M_2}{r_2} - \cdots - \gamma \frac{M_n}{r_n} = -\gamma \sum \frac{M_i}{r_i},$$

wobei $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Entfernungen der Stelle, für die das Potential gesucht wird, von den Punktmassen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ darstellen. Diese Summierung geht in die Integration über, wenn es sich um ein Gravitationsfeld in der Umgebung eines Körpers handelt, der homogen mit Masse erfüllt ist.
Zwischen der Stärke $\vec{E}$ und dem Potential V gilt in jedem beliebigen Punkt des Gravitationsfeldes folgender Zusammenhang:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V,$$

wobei

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \quad \text{bedeutet.}$$

Der **Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie** sagt aus, daß bei der mechanischen Bewegung eines Massenpunktes die Summe seiner potentiellen und seiner kinetischen Energie konstant ist.
Wenn wir es mit der Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld der Erde in Nähe der Erdoberfläche zu tun haben, dann kann das oben formulierte Gesetz durch die Beziehung ausgedrückt werden

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const},$$

wobei h die Höhe des Massenpunktes über einer horizontalen Ebene ist, auf die wir seine potentielle Energie beziehen. Die Gültigkeit des Gesetzes von der Erhaltung der mechanischen Energie beschränkt sich auf alle die Fälle, wo es sich um die Umwandlung einer Form mechanischer Energie in eine andere handelt (potentielle in kinetische und umgekehrt), d. h., wobei keine anderen Energieformen auftreten. Im allgemeinen Fall gilt das Gesetz von der Erhaltung und Umwandlung der Energie wie folgt:
In einem isolierten System ist die Summe der Energien aller Formen immer konstant.
In einem solchen System laufen die einzelnen Prozesse so ab, daß die Energie der einen Form immer in äquivalente Energie anderer Formen übergeht, so daß die Gesamtenergie des Systems stets erhalten bleibt.

B **Beispiele**

23. Stellen Sie fest, in welchem Verhältnis die Beträge der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zueinander stehen, wenn sie den Winkel $\varphi = 135°$ einschließen und wenn der Betrag ihrer Resultierenden gleich dem Betrag der kleineren Kraft $\vec{F}_2$ ist.

Lösung

Unter Berücksichtigung der Bezeichnungen auf Bild 16 kann geschrieben werden

$$180° - \alpha = 45°; \quad \gamma = 90°.$$

Es ist also

$$F_1 : F_2 = \sin 90° : \sin 45°.$$

Daraus folgt

$$\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{2}.$$

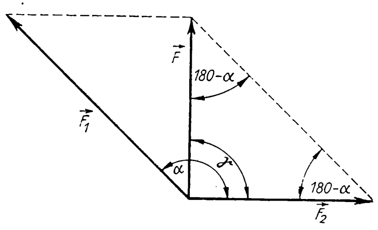


Bild 16

24. Die Kraft $\vec{F}$ ist so in die beiden zueinander senkrechten Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zu zerlegen, daß die Proportion $F_1 : F_2 = m : n$ gilt. Ermitteln Sie die Beträge der beiden Komponenten.

Lösung

Entsprechend der Aufgabenstellung kann geschrieben werden

$$F_1^2 + F_2^2 = F^2.$$

Ferner ist $F_1 = \frac{m}{n} F_2$, so daß

$$\left(\frac{m^2}{n^2} + 1\right) F_2^2 = F^2, \quad \text{d. h.} \quad F_2 = \frac{nF}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ ist.}$$

Da $F_2 = \frac{n}{m} F_1$, kann man analog folgendes schreiben:

$$\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right) F_1^2 = F^2, \quad \text{d. h.} \quad F_1 = \frac{mF}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

25. Ein Körper vom Gewicht $G = 5$ kp bewegt sich mit einer Beschleunigung $a = 12 \text{ m s}^{-2}$ senkrecht nach unten. Welche Kraft wirkt außer seinem Gewicht noch auf ihn ein?

Lösung

Entsprechend dem II. NEWTONschen Bewegungsgesetz kann man für die Gesamtkraft, die auf den Körper wirkt, auch schreiben:

$$F = ma = \frac{G}{g} a = \frac{5 \text{ kp}}{9{,}81 \text{ m s}^{-2}} 12 \text{ m s}^{-2} = 6{,}12 \text{ kp}.$$

Die Kraft F^*, die auf den Körper noch neben dem Gewicht einwirkt, ist dann durch die folgende Beziehung gegeben:

$$F^* = F - G = 6{,}12\,\text{kp} - 5\,\text{kp} = \underline{1{,}12\,\text{kp}}.$$

26. In welcher Zeit durchläuft ein Wagen mit dem Gewicht $\vec{G}_1$ die Strecke s auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α, wenn der Wagen mit einer Last $\vec{G}_2$ (Bild 17) gekoppelt ist und wenn sich aus dem Zusammenwirken von $\vec{G}_1$ und $\vec{G}_2$ eine Bewegung in Richtung der Kraft $\vec{G}_2$ ergibt? Die Trägheitsmomente der Räder bleiben unberücksichtigt.

Lösung

Die Bewegung des Wagens auf der schiefen Ebene wird durch die Kraft $\vec{G}_2$ und durch die in Richtung der schiefen Ebene fallende Gewichtskomponente des Wagens beeinflußt, so daß die resultierende Kraft in Richtung der Bewegung den Wert annimmt

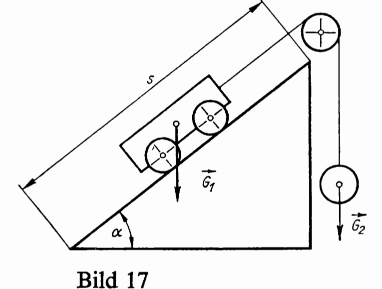


Bild 17

$$F = G_2 - G_1 \sin\alpha.$$

Für die Beschleunigung des Wagens gilt dann

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G_2 - G_1 \sin\alpha}{\dfrac{G_1 + G_2}{g}} = \frac{(G_2 - G_1 \sin\alpha)g}{G_1 + G_2},$$

da die resultierende Kraft nicht nur eine Bewegung des Wagens mit der angegebenen Beschleunigung, sondern auch eine Bewegung der Last G_2 hervorruft. Für den zurückgelegten Weg gilt die Beziehung

$$s = \frac{1}{2} a t^2.$$

Daraus folgt für die gesuchte Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \underline{\sqrt{\frac{2s\,(G_1 + G_2)}{g(G_2 - G_1 \sin\alpha)}}}.$$

27. Ein Körper mit dem Gewicht $G = 10$ kp bewegt sich unter Einfluß einer veränderlichen Kraft $F = k\,(q - t)$, wobei $k = 10\,\text{kp}\,\text{s}^{-1}$ und $q = 1$ s ist. Nach wieviel Sekunden kommt der Körper zum Stillstand, wenn er zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v_0 = 0{,}2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ hatte und die Kraft in Richtung der Geschwindigkeit wies? Welchen Weg legte der Körper bis zu seinem Stillstand zurück?

Lösung

Die Bewegungsgleichung des Körpers hat die Gestalt

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k(q - t).$$

Durch Integration erhalten wir

$$v = \frac{k}{m}\left(qt - \frac{t^2}{2}\right) + v_0.$$

In dem Moment, da der Körper zum Stillstand kommt, ist die Geschwindigkeit $v = 0$, so daß man findet

$$\frac{k}{m}\left(qt - \frac{t^2}{2}\right) + v_0 = 0.$$

Nach Umstellung erhalten wir für die gesuchte Zeit die Gleichung

$$t^2 - 2qt - \frac{2mv_0}{k} = 0.$$

Mit den für die gegebenen Größen geltenden Werten hat diese Gleichung die Wurzeln

$$t_{1,2} = \begin{cases} 2{,}02\ \mathrm{s} \\ -0{,}02\ \mathrm{s} \end{cases}.$$

Da die negative Wurzel keine physikalische Bedeutung hat, gilt als Zeit, nach der der Körper die Geschwindigkeit Null erreicht hat, $t = 2{,}02$ s.

Für den vom Körper zurückgelegten Weg finden wir

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{m}\left(qt - \frac{t^2}{2}\right) + v_0.$$

Nach Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$s = \frac{k}{m}\left(q\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + v_0 t.$$

Nach Einsetzen des gefundenen Wertes für die Zeit $t = 2{,}02$ s sowie der übrigen Größen erhalten wir für die Wegstrecke, die der Körper bis zum Stillstand zurücklegt, den Wert $s = 7{,}07$ m.

28. Es ist die maximale Geschwindigkeit zu bestimmen, die ein Körper von Kugelform mit einem Radius $r = 8$ cm und dem Gewicht $G = 10$ kp im freien Fall erreicht, wenn wir voraussetzen, daß für den Luftwiderstand die Beziehung $F_R = k\sigma v^2$ gilt (v Geschwindigkeit des Körpers, σ seine Projektionsfläche auf die senkrecht zur Bewegungsrichtung orientierte Ebene, k Zahlenfaktor). Letzterer hängt von der Form des Körpers ab und hat für die Kugel den Wert $k = 0{,}024$ kp s^2 m^{-4}.

Lösung

Für den Wert der resultierenden Kraft, die während der Fallbewegung auf den Körper einwirkt, gilt die Beziehung

$$F = G - F_R = G - k\sigma v^2.$$

Der Körper wird zu Beginn eine beschleunigte Bewegung ausführen, jedoch nur, solange er eine verhältnismäßig geringe Geschwindigkeit aufweist, so daß $F > 0$ ist. Seine maximale Geschwindigkeit erreicht er in dem Moment, in dem $F = 0$ ist. Von da an bewegt er sich dann mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig gleichförmig weiter. Es ist demnach

$$G - k\sigma v_{max}^2 = 0.$$

Da im Sinne der Aufgabenstellung $\sigma = \pi r^2$ angesetzt war, finden wir als Endgeschwindigkeit

$$v_{max} = \sqrt{\frac{G}{k\sigma}} = \sqrt{\frac{10\,\text{kp}}{0{,}024\,\text{kp s}^2\,\text{m}^{-4} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}08^2\,\text{m}^2}} = \underline{144\,\text{m s}^{-1}}.$$

29. Im Eisenbahnwagen eines fahrenden Zuges ist auf einer waagerechten Unterlage eine Kugel der Masse $m = 0{,}02$ kg frei beweglich angeordnet. Solange der Zug sich in gleichförmig geradliniger Bewegung befindet, bleibt die Kugel in bezug auf ihre Unterlage in Ruhe. In einem bestimmten Moment beginnt der Zug, mit der konstanten Beschleunigung $a = -2\,\text{m s}^{-2}$ zu bremsen.
Ermitteln Sie die Kraft, die auf die Kugel wirkt, und untersuchen Sie ihre Bewegung bezüglich der Unterlage, auf die sie gelegt wurde. Reibungswiderstände bleiben unberücksichtigt.

Lösung

Im Augenblick, da der Zug zu bremsen beginnt, wird er zu einem nichtinertialen System, in dem außer dem Gewicht der Kugel $G = mg$ auch die auf die Kugel wirkende Trägheitskraft F berücksichtigt werden muß. Im Falle dieses nichtinertialen Systems ist $F = -ma$ (m Masse der Kugel, a Verzögerung des Zuges).
Die Trägheitskraft verläuft in waagerechter Richtung und ist der Verzögerung a des Zuges gerade entgegengesetzt gerichtet. Die resultierende Kraft, die auf die Kugel wirkt, ist dann F, denn die Wirkung des Gewichts der Kugel wird durch die Gegenwirkung ihrer Unterlage kompensiert. Es gilt also

$$F = -ma = 0{,}02\,\text{kg} \cdot 2\,\text{m s}^{-2} = \underline{0{,}04\,\text{N}}.$$

Demnach setzt sich die Kugel in Fahrtrichtung des Zuges mit einer konstanten Beschleunigung von $a = 2\,\text{m s}^{-2}$ in Bewegung. Sie führt eine gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung aus.

30. An einem Ort von 45° geographischer Breite fällt ein Körper der Masse $m = 10$ kg mit der Geschwindigkeit $v = 100\,\text{m s}^{-1}$ auf die Erdoberfläche.
Welchen Wert haben die Trägheitskräfte Zentrifugalkraft und Coriolis-Kraft, die beim Auftreffen auf die Erdoberfläche auf den Körper einwirken?

Lösung

Für die Trägheitskräfte Zentrifugalkraft und Coriolis-Kraft gelten die folgenden Beziehungen (Bild 18):

$$F_0 = mr\omega^2 = mR\cos\varphi\cdot\omega^2;$$

$$F_C = 2m\,|\vec{\omega}\times\vec{v}| = 2m\omega v\sin(90^\circ+\varphi) = 2m\omega v\sin\varphi.$$

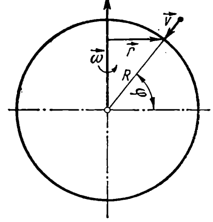


Bild 18

Ferner ist

$$\omega = \frac{2\pi}{86400\text{ s}} \quad \text{und} \quad R = 6370\text{ km};$$

deshalb können wir schreiben

$$F_0 = mR\omega^2\cos\varphi = 10\text{ kg}\cdot 6370\cdot 10^3\text{ m}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4\pi^2}{86400^2\text{ s}^2} =$$

$$= 0{,}238\text{ N} = \underline{0{,}0238\text{ kp}};$$

$$F_C = 2\cdot 10\text{ kg}\,\frac{2}{86400\text{ s}}\cdot 10^2\text{ m s}^{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}104\text{ N} = \underline{0{,}0104\text{ kp}}.$$

Wie ersichtlich, ist im vorgegebenen Fall die Zentrifugalkraft etwas größer als 2‰ und die Coriolis-Kraft ungefähr 1‰ vom Gewicht des Körpers. Die angegebene Geschwindigkeit wird nach einem freien Fall aus etwa 500 m Höhe erreicht. Aus dem oben Dargelegten wird ersichtlich, daß die Fehler, die aus der Vernachlässigung von Trägheitskräften resultieren, wenn es sich um Bewegungen von Körpern nahe der Erdoberfläche handelt, nur äußerst geringfügig sind.

31. Ein Auto mit einem Gewicht $G = 1000$ kp bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 36\text{ km h}^{-1}$ auf einer konvex gewölbten Brücke. In der Brückenmitte beträgt der Krümmungsradius $r = 50$ m. Welche Druckkraft übt der Wagen im Moment des Durchfahrens der Brückenmitte auf seine Unterlage aus?

Lösung

Bei der Behandlung dieser Aufgabe stellen wir uns auf den Standpunkt des mit dem Auto fest verbundenen Bezugssystems. Die resultierende Kraft, mit welcher der Wagen auf die Brücke wirkt, ergibt sich dann als die Differenz zwischen dem Fahrzeuggewicht und der Zentrifugalkraft als Trägheitskraft gemäß der Beziehung

$$F = G - F_0 = G - m\frac{v^2}{r} = 1000\text{ kp} - \frac{1000\text{ kp}}{9{,}81\text{ m s}^{-2}}\,\frac{100\text{ m}^2\text{ s}^{-2}}{50\text{ m}} =$$

$$= \underline{796{,}2\text{ kp}}.$$

32. Ein Massenpunkt der Masse $m = 1$ kg ist an einem Faden der Länge $l = 0{,}3$ m befestigt, dessen anderes Ende gleichfalls befestigt wurde (Bild 19). Der Massenpunkt bewegt sich so, daß er in waagerechter Ebene mit konstanter Geschwindigkeit v einen Kreis beschreibt, wobei der Faden mit der Senkrechten den Winkel $\varphi = 60°$ einschließt. Ermitteln Sie den Wert der Geschwindigkeit v, die Periodendauer des Massenpunktes auf der angegebenen Kreisbahn sowie die Kraft, die bei dieser Bewegung den Faden spannt

Lösung

Bei der Lösung dieser Aufgabe stellen wir uns auf den Standpunkt eines mit dem Massenpunkt fest verbundenen Bezugssystems. Von diesem Standpunkt aus betrachtet, befindet sich der Massenpunkt in Ruhe, und zwar deshalb, weil die Resultierende aus dem Gewicht des Massenpunktes und der Zentrifugalkraft als Trägheitskraft, die auf den Massenpunkt wirkt, in Richtung des Fadens weist und in ihrer Wirkung durch die Festigkeit des Fadens kompensiert wird. Nach Bild 19 gilt:

Bild 19

$$\tan\varphi = \frac{m\,\frac{v^2}{r}}{G} = \frac{mv^2}{Gl\sin\varphi},$$

weil $r = l\sin\varphi$ ist. Man findet also

$$v = \sqrt{\frac{Gl\sin\varphi\tan\varphi}{m}} = \sqrt{gl\sin\varphi\,\tan\varphi} = \underline{2{,}1\ \mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

Für die Periodendauer des Massenpunktes auf der angegebenen Kreisbahn ergibt sich

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi l\sin\varphi}{v} = \underline{0{,}78\ \mathrm{s}}.$$

Und für die Kraft F, durch welche der Faden gespannt wird, finden wir gemäß Bild 19 die Beziehung $F\cos\varphi = G$, d. h.

$$F = \frac{G}{\cos\varphi} = \frac{G}{0{,}5} = \underline{2\ \mathrm{kp}}.$$

33. Ein Körper der Masse m führt eine gleichförmig geradlinige Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 aus. Durch Bremswirkung soll er auf der Strecke s_0 zum Stillstand gebracht werden. Dabei nimmt die Bremskraft F linear mit der Geschwindigkeit ab, und zwar so, daß am Ende ihres Einflusses, wenn der Körper schon zur Ruhe gekommen ist, ihre Größe nur mehr die Hälfte des ursprünglichen Wertes beträgt. Bestimmen Sie die Bremskraft F_0 zu Beginn des Bremsvorgangs.

Lösung

Zur Bestimmung der Abhängigkeit $F = F(v)$ müssen wir berücksichtigen, daß für $v = v_0$ die Bremskraft $F = F_0$ ist und daß für $v = 0$ die Bremskraft auf den halben ursprünglichen Wert abgenommen hat entsprechend $F = F_0/2$. Diesen Bedingungen wird, der Aufgabenstellung entsprechend, folgende Abhängigkeit gerecht:

$$F = \frac{F_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right).$$

Da nun Geschwindigkeit des Körpers und Bremskraft in die gleiche Gerade fallen, aber entgegengesetzte Richtungen haben, nimmt die Bewegungsgleichung die folgende Form an:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{F_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right). \tag{1}$$

Unter Verwendung der Beziehung $ds = v\,dt$, $dt = ds/v$ kann Gl. (1) in eine andere Form gebracht werden:

$$\frac{mv\,dv}{ds} = -\frac{F_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right), \quad \text{d. h.} \quad -\frac{2m}{F_0}\frac{v\,dv}{1 + \dfrac{v}{v_0}} = ds.$$

Durch Integrieren der vorstehenden Gleichung von Beginn des Bremsweges bis zum Stillstand des Körpers erhalten wir

$$\frac{2mv_0}{F_0}\left[v - v_0 \ln (v + v_0)\right]_0^{v_0} = s_0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{2mv_0^2}{F_0}(1 - \ln 2) = s_0.$$

Mithin ergibt sich für den Wert der Bremskraft zu Beginn des Bremsvorgangs

$$F_0 = \frac{2mv_0^2}{s_0}(1 - \ln 2).$$

34. Eine konstante Kraft F wirke auf einen Körper mit dem Gewicht G. In welcher Zeit vergrößert sich hierbei die Geschwindigkeit des Körpers auf den n-fachen Wert der ursprünglichen Geschwindigkeit v_0, die der Körper in dem Augenblick innehatte, als die Kraft auf ihn zu wirken begann?

Lösung

Der Satz über den wechselseitigen Zusammenhang von Kraftimpuls und Bewegungsgröße ermöglicht folgende Schreibweise:

$$Ft = mnv_0 - mv_0,$$

woraus für die gesuchte Zeit resultiert

$$t = \frac{mv_0(n-1)}{F} = \frac{Gv_0(n-1)}{Fg}.$$

35. Welchen Impuls vermittelt eine Wand einer elastischen Kugel der Masse $m = 0{,}2$ kg. wenn diese unter einem Winkel $\varphi = 60°$ gegen die Flächennormale und mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 20\,\mathrm{ms^{-1}}$ auf die Wand trifft?

Lösung

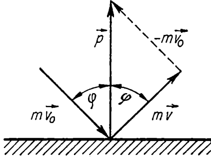


Bild 20

Der Kraftimpuls, mit dem die Wand beim Anprall auf die Kugel wirkt, ist gleich der Änderung der Bewegungsgröße der Kugel, d. h.,

$$\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0.$$

Wenn wir wie in Bild 20 völlig elastische Reflexion voraussetzen, prallt die Kugel mit gleicher Geschwindigkeit und unter gleichem Winkel von der Wand zurück, so daß wir für den Wert des Impulses schreiben können:

$$|\vec{p}| = 2mv\cos\varphi = 2\cdot 0{,}2\,\mathrm{kg}\cdot 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}\cdot\cos 60° = \underline{4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}}.$$

36. Welche Arbeit muß beim Zusammendrücken der Feder eines Waggonpuffers um den Weg $x_0 = 0{,}05$ m verrichtet werden, wenn für das Zusammendrücken um den Weg $x_1 = 0{,}01$ m eine Kraft von 3000 kp erforderlich ist, wobei die Kraft proportional zur Verkürzung der Feder anwächst?

Lösung

Da die Kraft und die Bahn ihres Angriffspunktes ein und dieselbe Richtung haben, kann für die Arbeit geschrieben werden:

$$W = \int F\,\mathrm{d}x.$$

Ferner gilt für die Feder $F = kx$ und $k = \frac{F_1}{x_1} = \frac{3000\,\mathrm{kp}}{0{,}01\,\mathrm{m}}$, so daß wir für die Arbeit erhalten:

$$W = \int_0^{x_0} kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{3000\,\mathrm{kp}\cdot 0{,}0025\,\mathrm{m}^2}{0{,}01\,\mathrm{m}} = \underline{375\,\mathrm{kpm}}.$$

37. Eine Kugel schwimmt in einer Flüssigkeit der Dichte ϱ so, daß sie bis zur Hälfte eingetaucht ist. Welche Arbeit muß zum Herausheben der Kugel aus der Flüssigkeit verrichtet werden, wenn ihr Radius mit R angesetzt wird?

Lösung

Nach Bild 21 können wir unter Berücksichtigung des Archimedischen Prinzips schreiben:

$$W = \int_0^R F\,\mathrm{d}y = \int_0^R (G - V\varrho g)\,\mathrm{d}y, \qquad (1)$$

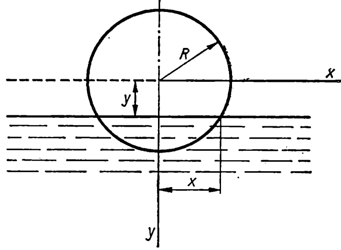


Bild 21

wobei V der in die Flüssigkeit eingetauchte Teil des Kugelvolumens ist. Man kann es aus der Beziehung

$$V = \pi \int_{R-y}^{R} x^2 \, dy = \pi \int_{R-y}^{R} (R^2 - y^2) \, dy = \left[\pi\left(R^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\right]_{R-y}^{R} = \pi R y^2 - \frac{1}{3} \pi y^3$$

berechnen, wenn für den Ausdruck x^2 die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = R^2$ verwendet wird. Das gestattet uns dann, Gl. (1) folgendermaßen umzustellen:

$$W = \int_0^R \left[G - \left(\pi R y^2 - \frac{1}{3} \pi y^3\right)\varrho g\right] dy = \left[Gy - \left(\pi R \frac{y^3}{3} - \frac{1}{12} \pi y^4\right)\varrho g\right]_0^R =$$

$$= GR - \left(\frac{1}{3} \pi R^4 - \frac{1}{12} \pi R^4\right) \varrho g = GR - \frac{1}{4} \pi R^4 \varrho g.$$

Da jedoch entsprechend der Aufgabenstellung für das Gewicht gilt $G = \frac{2}{3} \pi R^3 \varrho g$, können wir schließlich die gesuchte Arbeit schreiben als

$$W = \frac{2}{3} \pi R^3 \varrho g R - \frac{1}{4} \pi R^4 \varrho g = \underline{\frac{5}{12} \pi R^4 \varrho g}.$$

38. Die Hubwinde eines Aufzugs, der mit einem Gesamtgewicht von $G = 1000$ kp belastet ist, wird mit einer konstanten Beschleunigung von $a = 2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ betrieben. Berechnen Sie die Arbeit, die während der ersten fünf Sekunden des Hubvorgangs verrichtet wird.

Lösung

Die Kraft, welche die notwendige Arbeit verrichtet, überwindet das Gewicht des Aufzugs und verleiht ihm darüber hinaus noch eine Beschleunigung a, so daß sie den folgenden Wert annimmt:

$$F = G + ma = G + \frac{G}{g} a = G\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 1000\ \mathrm{kp}\left(1 + \frac{2\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}\right) =$$

$$= 1203{,}8\ \mathrm{kp}.$$

Für den Weg, den der Angriffspunkt dieser Kraft während der Zeit $t = 5$ s zurücklegt, erhalten wir

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} 2\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 25\ \mathrm{s^2} = 25\ \mathrm{m}.$$

Für die gesuchte Arbeit finden wir dann

$$W = Fs = 1204\ \mathrm{kp} \cdot 25\ \mathrm{m} = \underline{30100\ \mathrm{kpm}}.$$

39. Welche Zugkraft kann eine Lokomotive mit einer Leistung von $P = 2500$ PS bei der Geschwindigkeit $v = 60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ theoretisch maximal entwickeln?

Lösung

Entsprechend der Definition für die Leistung können wir schreiben:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Da $\vec{F}$ und $\vec{v}$ die gleiche Richtung haben, gilt $\vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$, so daß wir für die gesuchte Kraft erhalten:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{2500 \cdot 75 \text{ kpm s}^{-1}}{\dfrac{60\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}} = \underline{11\,250 \text{ kp}}.$$

40. Wie lang muß ein Weg s sein, damit eine konstante Kraft F, die auf einen Körper der Masse m einwirkt, seine Geschwindigkeit auf den n-fachen Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu steigern vermag?

Lösung

Wir gehen von dem Satz aus, der besagt, daß die Arbeit, welche die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft längs eines bestimmten Weges verrichtet, gleich dem Zuwachs an kinetischer Energie des Massenpunktes ist. Also finden wir

$$Fs = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \frac{1}{2}\,mn^2v_0^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \frac{1}{2}\,mv_0^2(n^2 - 1).$$

Für den gesuchten Weg erhalten wir damit

$$\underline{s = \frac{mv_0^2(n^2 - 1)}{2F}}\,.$$

41. An einer Stange der Länge $l = 1$ m und vernachlässigbarer Masse ist eine Kugel aufgehängt. Welche horizontale Geschwindigkeit muß man ihr mindestens verleihen, damit sie bis in die höchste Stellung ausschlägt? Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt.

Lösung

Zur Lösung dieser Aufgabe wenden wir das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an. Die potentielle Energie beziehen wir dabei auf die horizontale Ebene, die durch die Ruhelage der Kugel definiert ist. In der Ausgangsstellung ist dann die potentielle Energie der Kugel gleich Null, und die Gesamtenergie ist durch die Größe der kinetischen Energie gegeben. Wenn die gesuchte Geschwindigkeit v_0 so groß sein soll, daß die Kugel gerade noch ihre höchste Stellung erreicht, so hat sie in dieser höchsten Stellung die Geschwindigkeit Null, und damit ist ihre Gesamtenergie ausschließlich durch die ihr dann innewohnende potentielle Energie bestimmt. Wir können also wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{2}\,mv_0^2 = 2mgl,$$

und für die gesuchte Geschwindigkeit finden wir dann

$$v_0 = 2\sqrt{gl} = 2\sqrt{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 1\ \mathrm{m}} = \underline{6{,}26\ \mathrm{m\,s^{-1}}.}$$

42. Auf einer völlig glatten, unbeweglichen Kugel befindet sich ein Massenpunkt in labiler Stellung. Wenn wir ihn aus der Gleichgewichtslage auslenken, wird er sich zunächst auf der Kugeloberfläche bewegen. In welchem Abstand vom höchsten Punkt der Kugel verläßt der Massenpunkt ihre Oberfläche, und in welchem Abstand vom senkrechten Durchmesser der Kugel trifft er auf eine horizontale Unterlage, wenn der Radius der Kugel mit $R = 1{,}5$ m angegeben ist?

Lösung

Beim Studium der Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kugeloberfläche erscheint es zweckmäßig, sich auf den Standpunkt eines Bezugssystems zu stellen, das mit dem bewegten Massenpunkt fest verbunden ist. Der Massenpunkt bleibt bei seiner Bewegung so lange auf der Kugeloberfläche, wie seine Gewichtskomponente in Richtung zum Kugelzentrum größer als die Zentrifugalkraft ist. Für den Punkt, in dem der Massenpunkt die Kugeloberfläche verläßt, kann nach Bild 22 geschrieben werden:

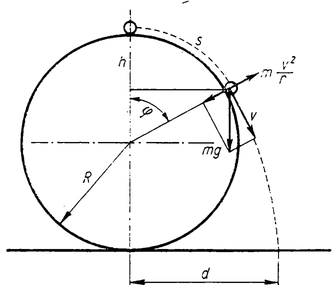


Bild 22

$$mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{R}.$$

Unter Berücksichtigung von $\cos\varphi = \dfrac{R-h}{R}$ geht die vorstehende Gleichung über in

$$g\frac{R-h}{R} = \frac{v^2}{R}, \quad \text{d. h.,} \quad g(R-h) = v^2. \tag{1}$$

In Gl. (1) haben wir zwei Variable: h und v.
Eine weitere Gleichung für die Bestimmung dieser beiden Unbekannten erhalten wir aus dem Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie. Nach Durchlaufen des Weges s verringert sich die potentielle Energie um den Wert mgh, und dafür wächst seine kinetische Energie auf der gleichen Wegstrecke um $^1/_2\, mv^2$ an, so daß wir finden:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{d. h.,} \quad 2gh = v^2. \tag{2}$$

Aus den Gln. (1) u. (2) erhalten wir

$$g(R-h) = 2gh, \quad \text{d. h.,} \quad h = \frac{R}{3} = 0{,}5\ \mathrm{m}.$$

Auf der Kugeloberfläche durchläuft der Massenpunkt den Weg $s = R\varphi$. Da $\cos\varphi = \dfrac{R-h}{R} = \dfrac{2}{3}$, $\varphi = 48°$ und im Bogenmaß $\varphi = 0{,}838$, können wir die Weglänge s

bestimmen zu

$$s = R\varphi = 1{,}5\,\text{m} \cdot 0{,}838 = \underline{1{,}26\,\text{m}}.$$

Aus Gl. (2) erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m s}^{-2} \cdot 0{,}5\,\text{m}} = 3{,}13\,\text{m s}^{-1}.$$

Die Zeit t, nach welcher der Massenpunkt die horizontale Ebene erreicht, auf der die Kugel liegt, erhalten wir aus der Beziehung

$$2R - h = vt \sin\varphi + \frac{1}{2} gt^2.$$

Diese quadratische Gleichung nach t aufgelöst ergibt

$$t_{1,2} = \begin{cases} 0{,}51\,\text{s} \\ -0{,}99\,\text{s} \end{cases}$$

Die negative Wurzel hat offenbar keinen physikalischen Sinn. Für den Abstand Kugeldurchmesser – Auftreffpunkt ergibt sich

$$d = vt\cos\varphi + R\sin\varphi = 3{,}13\,\text{m s}^{-1} \cdot 0{,}51\,\text{s} \cdot \frac{2}{3} + 1{,}5\,\text{m} \cdot 0{,}743 = \underline{2{,}20\,\text{m}}.$$

43. In einer Metallkugel mit dem Radius R wurde ein kugelförmiger Hohlraum mit dem Radius $r = R/2$ hergestellt (Bild 23). Es ist zu ermitteln, durch welche Kraft der auf diese Weise geschaffene Körper auf eine Kugel der Masse m wirkt, die sich in einem Abstand d vom Mittelpunkt der ursprünglichen Metallkugel befindet, wenn deren Masse mit M angegeben ist.

Lösung

Die ursprüngliche Metallkugel der Masse M würde auf den Massenpunkt m durch eine Kraft der Größe

$$F_0 = \gamma \frac{mM}{d^2}$$

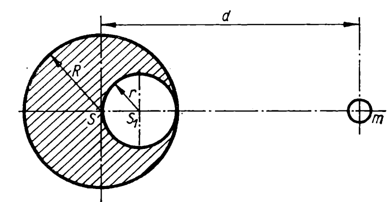


Bild 23

einwirken. Es läßt sich nämlich nachweisen, daß das Gravitationsfeld in der Umgebung eines homogenen Körpers von Kugelform das gleiche ist wie das eines Massenpunktes gleicher Masse, der an der Stelle des Kugelmittelpunktes liegt. Die Kraft F_0 kann als Summe zweier Kräfte aufgefaßt werden: F_x, mit der das Gebilde, das wir durch Herstellen des angegebenen Hohlraums erzielt haben, auf den Massenpunkt m wirkt, und F_1, mit welcher der Metallteil der Masse m' wirkt, der in der Kugel mit dem Mittelpunkt S_1 und dem Radius $r = R/2$ liegt. Es ist also

$$F_0 = F_x + F_1.$$

Für die Kraft F_1 gilt offensichtlich entsprechend dem Gravitationsgesetz

$$F_1 = \gamma \frac{mm'}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \gamma \frac{mM}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2},$$

weil

$$m' = \frac{M}{{}^4/_3\pi R^3} \, \frac{4}{3} \, \pi \, \frac{R^3}{8} = \frac{M}{8}.$$

Für die gesuchte Kraft resultiert demnach

$$F_x = F_0 - F_1 = \gamma \frac{mM}{d^2} - \gamma \frac{mM}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \gamma mM \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right].$$

44. In welchem Punkt auf der direkten Verbindungslinie zwischen Erde und Mond ist die Stärke des gemeinsamen Gravitationsfeldes gleich Null, wenn die Masse des Mondes $^1/_{81}$ der Erdmasse beträgt?

Lösung

Die Bedingung der Kompensation der beiden Gravitationsfelder wird entsprechend der Bezeichnung in Bild 24 erfüllt, wenn

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0, \quad \text{d. h.,} \quad |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|. \tag{1}$$

Wenn wir den Abstand der beiden Mittelpunkte der Himmelskörper mit d angeben und den Abstand des Gravitationsnullpunktes vom Erdmittelpunkt mit der Größe x, dann gilt offenbar

$$\gamma \frac{M}{x^2} = \gamma \frac{^1/_{81}\, M}{(d - x)^2},$$

woraus resultiert $x = 9\,(d - x)$, so daß $x = {}^9/_{10}\, d = \underline{0{,}9\, d}$ gefunden wird.

Der Gravitationsnullpunkt der beiden Felder der Erde und des Mondes liegt auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte im Abstand $x = 0{,}9\, d$ vom Erdmittelpunkt aus gemessen.

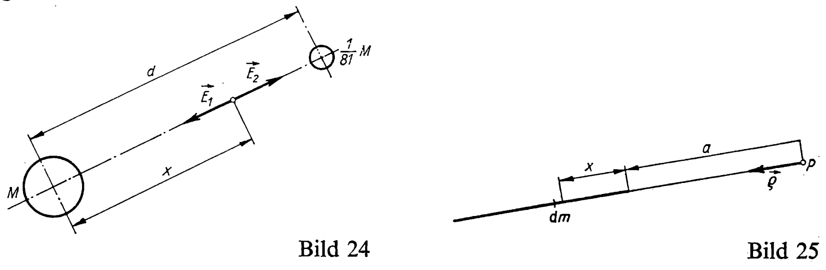


Bild 24 Bild 25

45. Berechnen Sie Potential und Stärke des Gravitationsfeldes eines Stabes der Masse m und der Länge l an einem Ort P, der im Abstand a vom Stabende in der Richtung des Stabes gelegen ist (Bild 25).

Lösung

Der Anteil des Massenelements dm des Stabes am Gesamtpotential im Punkt P ist

$$\mathrm{d}V = -\gamma \frac{\mathrm{d}m}{x+a} = -\gamma \frac{m}{l} \frac{\mathrm{d}x}{x+a},$$

weil dm = (m/l) dx ist. Durch Integration über den ganzen Stab erhalten wir das Potential

$$V = -\gamma \frac{m}{l} \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = -\gamma \frac{m}{l} [\ln(x+a)]_0^l = \underline{-\gamma \frac{m}{l} \ln \frac{l+a}{a}}.$$

Die Gravitationsfeldstärke ermitteln wir aus der Beziehung $E = -\operatorname{grad} V$. In unserem Beispiel heißt das, daß wir schreiben können

$$\vec{E} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} \vec{\varrho} = -\gamma \frac{m}{l} \frac{a}{l+a} \frac{a-l-a}{a^2} \vec{\varrho} = \underline{\gamma \frac{m}{a(l+a)} \vec{\varrho}},$$

wobei $\vec{\varrho}$ den Einheitsvektor in der in Bild 25 angegebenen Richtung darstellt.

46. Errechnen Sie Potential und Stärke eines Gravitationsfeldes, das von einer Kreisplatte (Masse m, Radius r) ausgeht, für einen Ort P auf der zur Platte senkrecht stehenden Mittelpunktsachse im Abstand a von der Platte. Die Dicke der Platte werde vernachlässigt.

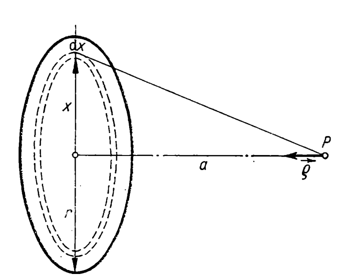


Bild 26

Lösung

Der Anteil eines Massenelements dm der Platte, das als kreisringförmiges Element der Breite dx gewählt wurde (Bild 26), an dem gesamten im Punkt P auftretenden Potential ist

$$\mathrm{d}V = -\gamma \frac{\mathrm{d}m}{s} = -\gamma \frac{\frac{m}{\pi r^2} 2\pi x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Durch Integration über die ganze Platte erhalten wir das wirkende Gesamtpotential zu

$$V = -\gamma \frac{2m}{r^2} \int_0^r \frac{x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\gamma \frac{2m}{r^2} \left[\sqrt{x^2+a^2}\right]_0^r =$$

$$= \underline{-\gamma \frac{2m}{r^2} \left[\sqrt{r^2+a^2} - a^2\right]}.$$

Für die Gravitationsfeldstärke im Punkt P kann dann geschrieben werden

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}\,\vec{\varrho} = -\gamma\,\frac{2m}{r^2}\left[\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} - 1\right]\vec{\varrho} =$$

$$= \gamma\,\frac{2m}{r^2}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\right]\vec{\varrho}\,.$$

47. Welche Horizontalgeschwindigkeit v muß man irgendeinem Körper in einer Höhe $h = 500$ km über der Erdoberfläche vermitteln, damit er als künstlicher Erdsatellit auf einer Kreisbahn die Erde umfliegt? Der Erdradius beträgt 6370 km (Bild 27).

Lösung

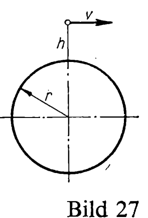


Bild 27

Die Geschwindigkeit v muß der Bedingung genügen, daß die Fliehkraft, die auf einer Kreisbahn eines fliegenden Körpers angreift, gleich der in der vorgegebenen Höhe wirksamen Gravitationskraft ist. Es muß also gelten

$$m\,\frac{v^2}{r+h} = \gamma\,\frac{mM}{(r+h)^2} \tag{1}$$

(γ Gravitationskonstante, M Erdmasse).
Zwischen der Gravitationskraft F_0, die auf den gegebenen Körper an der Erdoberfläche wirken würde, und der Gravitationskraft F, die auf den gleichen Körper in der Höhe h über der Erdoberfläche wirkt, besteht die Beziehung

$$F = F_0\,\frac{r^2}{(r+h)^2}\,,$$

denn

$$F = \gamma\,\frac{mM}{(r+h)^2}\,;\quad F_0 = \gamma\,\frac{mM}{r^2}\,.$$

Da $F_0 = mg$ ist mit $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, resultiert aus Gl. (1)

$$\frac{v^2}{r+h} = g\,\frac{r^2}{(r+h)^2}\,,$$

so daß die gesuchte Geschwindigkeit gefunden wird zu

$$v = \sqrt{g\,\frac{r^2}{r+h}} = r\sqrt{\frac{g}{r+h}} = 6370\cdot 10^3\ \mathrm{m}\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{6870\cdot 10^3\ \mathrm{m}}} = \underline{7600\ \mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

48. Berechnen Sie die kinetische Energie W_k eines Körpers der Masse m, der sich im freien Fall aus großer Höhe H der Erde nähert, im Moment seines Auftreffens auf die Erdoberfläche. Der Erdradius werde mit r angegeben. Wie groß wäre die Energie für den Fall $H \gg r$? Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt.

Lösung

Wir wenden das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an. In der Ausgangshöhe H über der Erdoberfläche, von wo aus sich der Körper der Erde im freien Fall nähert, hat er nur potentielle Energie, die durch die Beziehung gegeben ist:

$$W_p = -\gamma mM \left(\frac{1}{H+r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\gamma mM}{r(H+r)} H = mgr \frac{H}{r+H},$$

denn es ist $g = \gamma \frac{M}{r^2}$.

Im Moment des Auftreffens auf die Erdoberfläche hat der Körper nur kinetische Energie, für die sich aus dem Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie ergibt:

$$\underline{W_k = mgr \frac{H}{r+H}}.$$

Und für den Fall $H \gg r$ finden wir

$$\underline{W_k = mgr}.$$

49. Ein Körper werde von der Erdoberfläche aus mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht aufwärts geworfen. Welche Höhe erreicht er, und wie groß müßte die Anfangsgeschwindigkeit mindestens sein, damit der Körper nicht auf die Erde zurückfällt? Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt.

Lösung

Wir beziehen uns wiederum auf das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie. Die Gesamtenergie des Körpers ist im Moment seines Starts allein durch den Wert seiner kinetischen Energie bestimmt, da die potentielle an der Erdoberfläche gleich Null ist. In der Maximalhöhe H, die der Körper erreicht, ist die Gesamtenergie andererseits ausschließlich durch seine potentielle Energie vorhanden. Beziehen wir diese potentielle Energie auf die Erdoberfläche, so können wir schreiben:

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = -\gamma mM \left(\frac{1}{r+H} - \frac{1}{r}\right).$$

Da $g = \gamma \frac{M}{r^2}$ ist, kann die vorhergegangene Gleichung auch in die Form gebracht werden:

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = mgr \frac{H}{r+H}.$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Maximalhöhe H der Wert

$$\underline{H = \frac{v_0^2}{2gr - v_0^2} r}.$$

Im Falle, daß wir nur ein einziges Gravitationsfeld, nämlich das irdische, vorliegen haben, lautet die Bedingung dafür, daß der Körper nicht wieder zur Erde zurückfällt, daß er also bis in die Höhe $H = \infty$ fliegt, wie folgt:

$$2gr - v_0^2 = 0,$$

so daß die Startgeschwindigkeit mindestens einen Wert von

$$v_0 = \sqrt{2gr} = \underline{11\,200 \text{ m s}^{-1}}$$

haben muß, die sog. 2. kosmische Geschwindigkeit.

50. Mit welcher Mindestgeschwindigkeit müßte eine Rakete von der Erde aus gestartet werden, damit sie auf den Mond trifft? Wie groß ist in diesem Fall die Aufschlaggeschwindigkeit auf der Mondoberfläche? Der Abstand der Mittelpunkte der Erde und des Mondes beträgt im Mittel $d = 380\,000$ km, der Erdradius ist $r_E = 6370$ km, der Mondradius $r_M = {}^1/_4\, r_E$. Die Mondmasse beträgt ${}^1/_{81}$ der Masse der Erde.

Lösung

Zur Lösung dieses Problems wenden wir wieder das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an, da wir den Luftwiderstand in der Erdatmosphäre unberücksichtigt lassen. Da man mit hinreichender Genauigkeit Mond und Erde als Kugelkörper ansehen kann, sind ihre jeweiligen Gravitationsfelder ebensogroß wie die von Massenpunkten mit der Erd- bzw. Mondmasse, die im Erd- bzw. Mondmittelpunkt liegen. Bei der Bewegung der Rakete von der Erde zum Mond wird das Gravitationsfeld der Erde eine Bremswirkung ausüben, während das Gravitationsfeld des Mondes im Gegensatz dazu eine beschleunigende Wirkung ausübt. Nach dem Resultat des Beispiels 44 (Bild 24) wird das Gravitationsfeld der Erde bis zu jenem Punkt hin überwiegen, der vom Erdmittelpunkt die Strecke $x = {}^9/_{10}\, d$ entfernt liegt, während hinter diesem Punkt dann das Gravitationsfeld des Mondes überwiegt. Es reicht also aus, der Rakete eine solche Geschwindigkeit zu erteilen, die es ihr erlaubt, bis zu dem Punkt zu gelangen, der vom Erdmittelpunkt den Abstand x hat. Von da an wird sie dann unter dem Einfluß des überwiegenden Mond-Gravitationsfeldes mit einer beschleunigten Bewegung auf den Mond zu fallen. Es kann daher geschrieben werden:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \gamma \frac{mM_E}{r_E} - \gamma \frac{mM_M}{d - r_E} = -\gamma \frac{mM_E}{0{,}9d} - \gamma \frac{mM_M}{0{,}1d},$$

wobei wir auf der linken Seite der Gleichung die Summe von kinetischer und potentieller Energie der Rakete an der Erdoberfläche und auf der rechten Seite die Gesamtenergie der Rakete im Punkt $x = 0{,}9\, d$ vom Erdmittelpunkt finden. Diese Gesamtenergie besteht hier wieder nur aus der potentiellen, da die Geschwindigkeit und damit die kinetische Energie an diesem Punkt gleich Null angesetzt werden. Für die gesuchte minimale Abschußgeschwindigkeit der Rakete von der Erdoberfläche kann also geschrieben

werden

$$v^2 = 2\left[\gamma M_E\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{0{,}9d} + \frac{1}{81(d - r_E)} - \frac{1}{81 \cdot 0{,}1d}\right)\right] =$$

$$= 2gr_E\left(1 - \frac{r_E}{0{,}9d} + \frac{r_E}{81(d - r_E)} - \frac{r_E}{81 \cdot 0{,}1d}\right),$$

so daß gefunden wird

$$v = \sqrt{2gr_E \cdot 0{,}98} = 11{,}2\,\text{km s}^{-1} \cdot 0{,}99 = \underline{11{,}09\,\text{km s}^{-1}}.$$

Für die Geschwindigkeit v^*, mit der die Rakete auf dem Mond auftrifft, kann analog geschrieben werden

$$-\gamma\frac{mM_E}{0{,}9d} - \gamma\frac{mM_M}{0{,}1d} = \frac{1}{2}mv^{*2} - \gamma\frac{mM_M}{r_M} - \gamma\frac{mM_E}{d - r_M},$$

da wir auf der linken Seite der Gleichung den Wert der Gesamtenergie der Rakete im Punkt mit dem Abstand $x = 0{,}9\,d$ vom Erdmittelpunkt und auf der rechten wiederum die Gesamtenergie der Rakete beim Auftreffen auf die Mondoberfläche dargestellt haben. Nach einer Umformung folgt zunächst

$$v^{*2} = 2\left[\gamma\frac{M_M}{r_M}\left(1 - \frac{81r_M}{0{,}9d} - \frac{r_M}{0{,}1d} + \frac{81r_M}{d - r_M}\right)\right],$$

und mit den Massen bzw. Radien können wir schreiben

$$v^{*2} = 2\left[\frac{1}{4 \cdot 81}\gamma\frac{M_E}{r_E}\left(1 - \frac{81r_E}{4 \cdot 0{,}9d} - \frac{r_E}{4 \cdot 0{,}1d} + \frac{81r_E}{4(d - \frac{1}{4}r_E)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 81}2gr_E\left[1 - \frac{81r_E}{4 \cdot 0{,}9d} - \frac{r_E}{4 \cdot 0{,}1d} + \frac{81r_E}{4(d - \frac{1}{4}r_E)}\right],$$

so daß wir schließlich für die Auftreffgeschwindigkeit finden

$$v^* = \frac{1}{18}\sqrt{2gr_E \cdot 0{,}91} = \frac{1}{18} \cdot 11{,}2\,\text{km s}^{-1} \cdot 0{,}95 = \underline{0{,}591\,\text{km s}^{-1}}.$$



Aufgaben

33. An zwei gleich langen Ketten AC und BC (Bild 28), die in den Punkten A und B befestigt sind, hängt ein Körper K. Wie groß muß die Länge l der Ketten sein, wenn die Kraft, durch die eine Kette gespannt wird, maximal die Größe T_0 haben darf und der Abstand $AB = 2a$ gegeben ist?
34. An drei symmetrisch angeordneten Seilen ist ein Körper K aufgehängt (Bild 29). Wieviel wiegt er, wenn die Länge eines jeden Seiles $l = 1$ m ist, die Befesti-

gungspunkte ein gleichseitiges △ ABC mit der Seite $a = 1$ m bilden und wenn die einzelnen Seile jeweils durch die Kraft $F = 25$ kp gespannt werden?

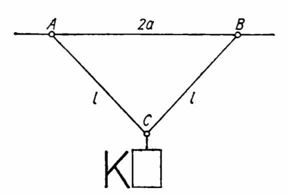


Bild 28

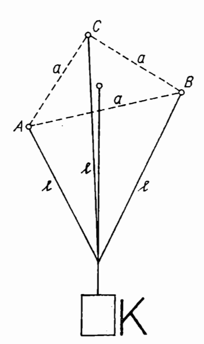


Bild 29

35. Ein Körper wird durch die Wirkung der Kraft $F = 0{,}02$ N in Bewegung versetzt und legt während der ersten vier Sekunden seiner Bewegung eine Strecke von 3,2 m Länge zurück. Wie groß ist seine Masse, und welche Geschwindigkeit wird er am Ende der fünften Sekunde seiner Bewegung haben?

36. Eine Granate der Masse $m = 5$ kg verläßt ihren Lauf mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 1200 \text{ m s}^{-1}$. Wie groß war die im Lauf wirkende Kraft unter der Annahme, daß die Bewegung der Granate im Lauf gleichförmig beschleunigt verlief und 0,01 s dauerte? Welche Arbeit wurde dabei von der beschleunigenden Kraft verrichtet?

37. Eine Granate der Masse $m = 24$ kg verläßt ihren Lauf mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 500 \text{ m s}^{-1}$. Der Lauf sei 2 m lang. Wie groß ist der Durchschnittswert der im Lauf auf die Granate wirkenden Kraft?

38. Stellen Sie fest, in welchen Punkten der Erdoberfläche Zentrifugalkraft und CORIOLIS-Kraft unter gleichartigen Bedingungen ihren maximalen und minimalen Wert aufweisen.

39. Ein Eisenbahnwaggon bewegt sich auf einer horizontalen geraden Strecke. Er wird mit einer Kraft gebremst, die genau ein Zehntel seines Gewichts ist. Bestimmen Sie die Zeit, die vom Beginn der Bremsung bis zum Stillstand vergeht, sowie die Strecke, die er dabei zurücklegt, wenn der Waggon im Moment des Bremseinsatzes eine Geschwindigkeit von 72 km h^{-1} innehatte.

40. Wie groß ist das scheinbare Gewicht einer 75 kp schweren Person in einem Aufzug, der sich
a) mit einer Verzögerung von $0{,}2 \text{ m s}^{-2}$ aufwärts und mit einer Beschleunigung von $0{,}2 \text{ m s}^{-2}$ abwärts bewegt,
b) mit einer Beschleunigung von $0{,}15 \text{ m s}^{-2}$ aufwärts und mit einer Verzögerung von $0{,}15 \text{ m s}^{-2}$ abwärts bewegt?

41. Zwei gleich große kugelförmige Körper werden aus verschiedenen Werkstoffen mit den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 gefertigt. Beide Kugeln fallen in Luft. Unter der Voraussetzung, daß der Luftwiderstand proportional dem Geschwindigkeitsquadrat ist, soll ermittelt werden, in welchem Verhältnis die von beiden Kugeln erreichten Maximalgeschwindigkeiten stehen.

42. Eine Kugel der Masse m dringt mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 in ein hemmendes Medium ein, dessen Widerstand F proportional zur Geschwindigkeit eines Massenpunktes wächst, d. h.,

$F = -kv$. Welchen Weg legt die Kugel bis zum Stillstand zurück, wenn außer dem Widerstand des hemmenden Mediums keine andere Kraft auf sie wirkt?

43. Ein Stein mit dem Gewicht $G = 3$ kp hängt an einem Faden der Länge $l = 1$ m und führt in vertikaler Ebene eine Bewegung auf einer Kreisbahn aus. Es ist die kleinste Winkelgeschwindigkeit für den Umlauf des Steins auf der Kreisbahn zu finden, bei der der Faden reißen würde, wenn dazu eine Kraft von $F = 9$ kp notwendig ist.
44. Ein Ball der Masse $m = 0{,}1$ kg wurde durch Anstoß so in Bewegung versetzt, daß seine Geschwindigkeit $v = 10\ \text{m s}^{-1}$ beträgt. Welche Kraft wirkte auf ihn, wenn die Dauer des Kraftstoßes $t = 0{,}01$ s betrug?
45. Der Motor eines Autos mit dem Gesamtgewicht $G = 960$ kp entwickelt eine Zugkraft von 1600 N. In welcher Zeit kann der Wagen eine Geschwindigkeit von $54\ \text{km h}^{-1}$ erreichen?
46. Ein Waggon mit dem Gewicht $G = 16000$ kp bewegt sich geradlinig mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5\ \text{m s}^{-1}$. Wie groß ist der Mittelwert der auf den Waggon wirkenden Reibungskraft, wenn dieser dadurch innerhalb einer Minute zum Halten kommt?
47. Welche Arbeit verrichtet ein Pferd, das einen Wagen von 1500 kp Gewicht mit konstanter Geschwindigkeit 600 m weit zieht und dabei eine Reibung von 0,8 % des Wagengewichts überwindet?
48. Eine stählerne Spiralfeder der Länge $l_0 = 0{,}8$ m wird unter Einwirkung der Kraft $F_1 = 2$ kp um die Länge $x_1 = 0{,}05$ m gedehnt. Welche Arbeit wird bei einer Dehnung der Spiralfeder auf das Zweifache ihrer ursprünglichen Länge benötigt, wenn die Kraft, die diese Arbeit verrichtet, proportional der Ausdehnung der Feder ist?
49. Ein hölzerner Zylinder ist zu $^2/_3$ seiner Länge in Wasser untergetaucht. Welche Arbeit muß zum Herausziehen des Zylinders aus dem Wasser verrichtet werden, wenn sein Radius $r = 0{,}1$ m und seine Länge $h = 0{,}6$ m ist?
50. Ein Geschoß der Masse $m = 0{,}02$ kg erreicht mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 400\ \text{m s}^{-1}$ einen Baum. Wie tief dringt es in ihn ein, wenn der Widerstand des Holzes $F = 1000$ kp beträgt?
51. Ein Körper der Masse $m = 100$ kg bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 20\ \text{km h}^{-1}$. Er soll auf einem 20 m langen Weg zum Stillstand gebracht werden. Mit welcher konstanten Kraft muß seine Bewegung abgebremst werden?
52. Ein mit der Geschwindigkeit $v_1 = 60\ \text{km h}^{-1}$ fahrender Zug kann durch Anlegen der Bremsen auf einer Strecke $s_1 = 400$ m zum Halten gebracht werden. Welche Geschwindigkeit dürfte der Zug haben, wenn er durch gleichmäßiges Bremsen auf einer Strecke $s_2 = 100$ m zum Halten gebracht werden soll?
53. Ein Körper der Masse $m = 0{,}8$ kg wird senkrecht nach oben geworfen. In der Höhe $h = 10$ m hat er noch eine kinetische Energie von $W_k = 20$ kpm. Welche Maximalhöhe kann der Körper erreichen?
54. Wie groß ist die maximale Leistung eines Wasserrades, dessen Antrieb durch Wasser erfolgt, das aus einer Höhe $h = 10$ m herabfällt, wenn in einer Sekunde jeweils 150 l Wasser zur Verfügung stehen?
55. Berechnen Sie die Leistung des Motors eines LKW, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = 30\ \text{km h}^{-1}$ auf einer Straße mit 5 % Steigung bewegt, wenn das Gesamtgewicht des Fahrzeuges $G = 5000$ kp beträgt. Der Reibungswiderstand wird vernachlässigt.
56. Ein Stein A befindet sich auf dem höchsten Punkt eines halbkugelförmigen,

glatten Körpers mit dem Radius r (Bild 30). Wir verleihen ihm in horizontaler Richtung eine Anfangsgeschwindigkeit v_0. Es ist zu ermitteln, von welchem Punkt aus der Stein die Oberfläche

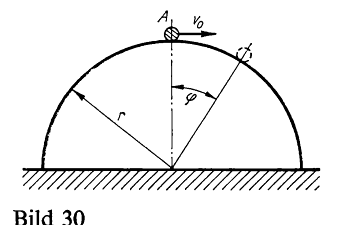


Bild 30

seiner halbkugeligen Unterlage verläßt. Bei welchem Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 verläßt der Stein seine Unterlage bereits im Auflagepunkt? Der Reibungswiderstand wird vernachlässigt.

7. Wie groß ist der Unterschied der Gravitationskraft, mit der die Erde auf einen Körper wirkt, der einmal in einer
5. Höhe $h = 6400$ m über NN, ein anderes Mal direkt auf NN liegt? Der Erdradius ist $r = 6370$ km.
8. Berechnen Sie Potential und Stärke des Gravitationsfeldes eines Drahtes der Masse m, der in die Form eines Krei-
5. ses mit dem Radius r gebogen wurde, im Punkt P auf der Kreisachse im Abstand s von seinem Mittelpunkt (Bild 31).

59. Ermitteln Sie die Beschleunigung, mit der ein Körper auf die Mondoberfläche fallen würde, wenn wir voraussetzen,

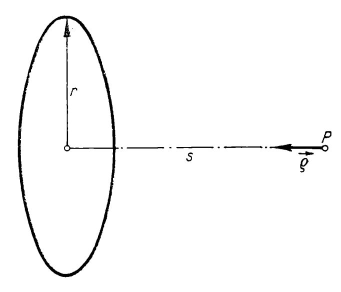


Bild 31

daß auf den Körper nur das Gravitationsfeld des Mondes wirkt und wenn bekannt ist, daß für Masse und Radius des Mondes die Werte $M_M = {}^1/_{81}\, M_E$ und $r_M = {}^1/_4\, r_E$ gelten (M_E Erdmasse, r_E Erdradius).

60. Berechnen Sie die notwendige Anfangsgeschwindigkeit v_0, die man einem Körper vermitteln muß, der sich senkrecht aufwärts bis zu einer Höhe vom Wert des Erdradius (6370 km) über die Erdoberfläche bewegen soll. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

1.3. Dynamik des Systems von Massenpunkten und des starren Körpers

Unter dem **Schwerpunkt** des Systems aus zwei Massenpunkten verstehen wir denjenigen Punkt auf ihrer Verbindungslinie, der diese im umgekehrten Verhältnis der Massen beider Massenpunkte teilt.

Den gemeinsamen Schwerpunkt dreier Massenpunkte definieren wir als den Punkt auf der Verbindungslinie des Schwerpunktes der beiden ersten Massenpunkte und des dritten, der diese Verbindungslinie wieder im umgekehrten Verhältnis der Massensumme der ersten beiden Punkte und des dritten teilt.

Ähnlich können wir die Definition des Schwerpunktes auf ein System von beliebig vielen Massenpunkten erweitern.
Der Ortsvektor des Schwerpunktes eines Systems von Massenpunkten $\vec{r}^*$ bezüglich eines bestimmten Bezugspunktes ist durch die folgende Beziehung gegeben:

$$\vec{r}^* = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

($\vec{r}_i$ Ortsvektor des i-ten Punktes des Systems bezüglich desselben Bezugspunktes, m_i Masse des i-ten Punktes).
Der Zusammenhang zwischen den Schwerpunktkoordinaten des Systems von Massenpunkten und den zugehörigen Massenpunktkoordinaten des Systems ist analog durch die Beziehungen

$$x^* = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y^* = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z^* = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

gegeben.
Den Ortsvektor bzw. die Schwerpunktkoordinaten eines homogen mit Masse erfüllten Körpers bestimmen wir durch Volumenintegration aus

$$\vec{r}^* = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \varrho \vec{r}\,\mathrm{d}\tau}{\int \varrho\,\mathrm{d}\tau}$$

bzw.

$$x^* = \frac{\int \varrho x\,\mathrm{d}\tau}{\int \varrho\,\mathrm{d}\tau}; \quad y^* = \frac{\int \varrho y\,\mathrm{d}\tau}{\int \varrho\,\mathrm{d}\tau}; \quad z^* = \frac{\int \varrho z\,\mathrm{d}\tau}{\int \varrho\,\mathrm{d}\tau},$$

wobei ϱ die Dichte, die an verschiedenen Stellen des Körpers verschieden sein kann, und $\mathrm{d}\tau$ das Volumenelement ist.
Das **Drehmoment** $\vec{M}$ hinsichtlich eines bestimmten Bezugspunktes O definieren wir durch die Beziehung

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

($\vec{r}$ Ortsvektor des Angriffspunktes der Kraft bezogen auf den Punkt O).
Analog definieren wir den **Drehimpuls** $\vec{L}$ eines Massenpunktes hinsichtlich des Bezugspunktes O durch die Beziehung

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

($\vec{r}$ Ortsvektor des Massenpunktes bezüglich des Punktes O).

Der Zusammenhang zwischen dem Moment der auf einen Massenpunkt – hinsichtlich eines bestimmten Bezugspunktes – wirkenden Kraft und dem Drehimpuls des Massenpunktes – bezüglich desselben Bezugspunktes – ist durch die Beziehung gegeben:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Es kann nachgewiesen werden, daß die Projektion des Drehmoments bezüglich eines Punktes auf einer bestimmten Geraden – und in deren Richtung – vom Ort des auf der Geraden gewählten Punktes unabhängig ist. Eine solche Projektion des Drehmoments in Richtung einer bestimmten Geraden bezeichnen wir als *Drehmoment bezüglich einer Geraden* (Achse).
Als ein **Kräftepaar** bezeichnen wir zwei gleich große Kräfte entgegengesetzter Richtung, die an zwei verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen und deren Verbindungslinie nicht in die Kräftegerade derjenigen Kräfte fällt, die das Paar bilden. Das Moment des Kräftepaares wird durch das Produkt des Wertes der das Paar bildenden Kräfte und dem Abstand der Kräftegeraden gebildet.
Die Bewegung eines Systems von Massenpunkten bzw. eines Körpers wird durch die beiden Impulssätze beschrieben.

Der **1. Impulssatz** besagt:
Die Summe aller Außenkräfte, die auf die einzelnen Punkte eines Systems wirken, ist gleich der Ableitung der gesamten Bewegungsgröße des Systems nach der Zeit.
Mathematisch kann er durch die Gleichung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ausgedrückt werden, wobei $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ und $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i$ ist.
Dem ersten Impulssatz gleichbedeutend ist der *Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.* Er besagt:
Unter der Einwirkung äußerer Kräfte bewegt sich der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten bzw. eines Körpers so, als ob die Gesamtmasse des Systems bzw. des Körpers im Schwerpunkt konzentriert wäre und alle Kräfte im Schwerpunkt angriffen.
Mathematisch kann dieser Satz durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$m\vec{a}^* = \vec{F}$$

(m Gesamtmasse des Massenpunktsystems bzw. des Körpers, $\vec{a}^*$ Schwerpunktbeschleunigung, $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ Vektorsumme aller auf das Massenpunktsystem bzw. auf den Körper wirkenden Außenkräfte). Wenn die Summe der äußeren Kräfte gleich

Null ist, oder wenn äußere Kräfte nicht vorhanden sind (isoliertes, abgeschlossenes System), verändert sich die Schwerpunktlage nicht. Dieser Sachverhalt findet seinen Ausdruck im Gesetz von der Erhaltung des Schwerpunktes eines abgeschlossenen Systems.

Der **2. Impulssatz** besagt:

Die Summe der Momente aller äußeren Kräfte, die auf die einzelnen Massenpunkte eines Systems hinsichtlich eines bestimmten Bezugspunktes wirken, ist gleich der Ableitung des Gesamtdrehimpulses des Systems (hinsichtlich desselben Bezugspunktes) nach der Zeit.

Mathematisch kann er durch die folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

wobei $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ und $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ ist.

Für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten, d. h., für ein System, auf das nur innere Kräfte wirken (äußere sind nicht vorhanden), ergeben sich aus dem 1. und 2. Impulssatz zwei Erhaltungsgesetze: das Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße **und** das Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses.

Das **Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße** besagt:

Die Gesamtbewegungsgröße eines abgeschlossenen Systems ist konstant, d. h.

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Das **Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses** besagt:

Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant, d. h.

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Im **Gleichgewicht** befindet sich ein Körper dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Summe aller auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte ist gleich Null, d. h., $\sum \vec{F}_i = 0$;
2. Die Summe der Momente aller äußeren Kräfte hinsichtlich eines beliebigen Punktes ist gleich Null, d. h., $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$.

Wenn irgendein Körper sich um eine feste Achse dreht, nimmt seine Bewegungsgleichung die Form an:

$$M = J\alpha,$$

wobei α die Winkelbeschleunigung, M die Projektionsgröße des Gesamtmoments der äußeren Kräfte in Richtung der Drehachse, d. h. der Betrag des Gesamtmoments

der äußeren Kräfte hinsichtlich der Drehachse, und J das sog. **Massenträgheitsmoment** des Körpers bezüglich der Drehachse ist, das durch die Beziehung

$$J = \sum m_i r_i^2$$

definiert wird (r_i Abstand des Massenpunktes m_i von der Drehachse). Bei Körpern, die homogen mit Masse erfüllt sind, gilt dafür

$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \int \varrho r^2 \, \mathrm{d}\tau,$$

wobei die Integration über das gesamte Volumen des betreffenden Körpers ausgeführt werden muß.

Die Berechnung der Trägheitsmomente von Körpern in bezug auf beliebige Achsen wird durch einige Lehrsätze erleichtert, insbesondere durch den **Satz von Steiner**, der besagt:

Das Massenträgheitsmoment J eines Körpers, bezogen auf eine beliebige Drehachse, ist gleich seinem Massenträgheitsmoment J_S, bezogen auf die parallele Schwerpunktachse, vermehrt um das Produkt aus Masse und dem Quadrat des Abstandes beider Achsen.

Mathematisch kann man den Satz durch die Beziehung ausdrücken:

$$J = J_S + ma^2$$

(m Gesamtmasse, a Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse).

Das Trägheitsmoment eines Körpers hinsichtlich irgendeiner beliebigen Achse kann allgemein durch die Gleichung

$$J = (\vec{T}\vec{\varrho})\,\vec{\varrho}$$

ausgedrückt werden, wobei $\vec{T}$ der Tensor der Bewegungsgröße eines Körpers in einem bestimmten Punkt einer Geraden und $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor in Richtung der Geraden, hinsichtlich der wir das Trägheitsmoment suchen, ist.

Bei spezieller Wahl eines geeigneten Koordinatensystems, wenn die Koordinatenachsen in Richtung der Achsen eines Trägheitsellipsoids fallen (Hauptträgheitsachsen), kann der Tensor der Bewegungsgröße eines Körpers, z. B. im Schwerpunkt, durch folgende einfache Beziehung ausgedrückt werden:

$$\vec{T}_S = J_{S1}\vec{i}\vec{i} + J_{S2}\vec{j}\vec{j} + J_{S3}\vec{k}\vec{k} \tag{1}$$

(J_{S1}, J_{S2}, J_{S3} Trägheitsmomente des Körpers bezüglich seiner Hauptträgheitsachsen: Hauptträgheitsmomente). Die Hauptträgheitsachsen sind dadurch gekennzeichnet, daß für eine von ihnen das Trägheitsmoment ein Maximum, für eine andere ein Minimum ist und daß alle drei Achsen aufeinander senkrecht stehen.

Unter Berücksichtigung von Gl. (1) kann man das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Achse, die mit den Hauptträgheitsachsen die Winkel α, β, γ einschließt, durch folgende Beziehung ausdrücken:

$$J = (\vec{T}_S \vec{\varrho}) \vec{\varrho} = J_{S1} \cos^2 \alpha + J_{S2} \cos^2 \beta + J_{S3} \cos^2 \gamma .$$

Die allgemeine Bewegung eines Körpers kann als die Summe der Translationsbewegung seines Schwerpunktes und der Rotation des Körpers um die durch seinen Schwerpunkt gehende Achse angesehen werden.
Die *kinetische Energie eines Körpers*, der eine Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse ausführt, errechnet man aus

$$W_k = \frac{1}{2} J\omega^2 ,$$

wobei J das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der gewählten Drehachse ist.
Die *Arbeit*, welche die äußeren Kräfte bei der Drehung eines Körpers um einen bestimmten Winkel φ verrichten, ist durch die Beziehung

$$W = M\varphi$$

gegeben, wenn der Wert des Kräftemoments M bezüglich der Drehachse konstant ist. Diese Arbeit ist gleich der Zunahme der kinetischen Energie der Rotation des Körpers in diesem Drehabschnitt.
Allgemein ist die gesamte kinetische Energie eines Körpers als Summe der kinetischen Energie der Translation des Schwerpunktes mit der Gesamtmasse m des Körpers und seiner kinetischen Energie der Rotation um eine Schwerpunktachse gegeben. Es ergibt sich so

$$W_k = \frac{1}{2} mv_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 .$$

Auch bei dieser allgemeinen Bewegung eines Körpers gilt das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie, *solange es tatsächlich nur zu Umwandlungen der einen Form mechanischer Energie in eine andere kommt* und Umwandlungen in nichtmechanische Energieformen (innere, elektrische usw.) ausgeschlossen sind.
Jeder Körper stellt ein **physikalisches Pendel** dar, wenn er so befestigt ist, daß er sich unter der Wirkung seines Eigengewichts um eine nichtvertikale Achse drehen kann, die nicht durch seinen Schwerpunkt verläuft.
Wenn es sich um ausreichend kleine Auslenkungen φ aus der Gleichgewichtslage handelt, kann die Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels in der Form ge-

schrieben werden

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mga}{J}\varphi$$

(m Gesamtmasse des Pendels, a Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse, J Trägheitsmoment des Pendels bezüglich der Drehachse).
Als Lösung dieser Differentialgleichung finden wir den Ausdruck, der die Zeitabhängigkeit der Auslenkung φ angibt, in der Form

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$\left(\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}\right.$ Kreisfrequenz, φ_0 Amplitude, α Phasenkonstante$\left.\right)$.
Die Periodendauer eines physikalischen Pendels berechnen wir aus

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\,.$$

Für die sog. *reduzierte Pendellänge* eines physikalischen Pendels gilt die Beziehung

$$l = \frac{J}{ma}\,.$$

Sie bedeutet den Abstand zweier bezüglich des Pendelschwerpunkts unsymmetrisch liegender Achsen, um die das physikalische Pendel mit gleicher Periode schwingt.
Wenn sich ein Körper um eine willkürlich durch ihn gelegte Achse dreht, dann ändert sich infolge der wirkenden Zentrifugalkräfte die Trägheit seiner Massenelemente. Dreht sich ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch seinen Schwerpunkt verlaufende Achse, dann hat das Gesamtmoment der Zentrifugalkräfte bezüglich aller Punkte auf der Achse, also auch bezüglich des Körperschwerpunkts, den gleichen Wert, der durch die Beziehung

$$M_{S0} = \omega^2 U_S$$

gegeben ist, wobei U_S der Wert des sog. *Auslenkungsmoments* des Körpers hinsichtlich der gegebenen Achse ist. Allgemein wird das Auslenkungsmoment bezüglich der Achse durch die Beziehung

$$U = (\vec{T}\,\mathfrak{o}) \times \mathfrak{o}$$

bestimmt ($\vec{T}$ Tensor der Bewegungsgröße des Körpers im entsprechenden Punkt auf der Achse, $\mathfrak{o}$ Einheitsvektor, der in die Richtung der Achse fällt).
Infolge dieses Einflusses ist die Wirkung der Zentrifugalkräfte analog zur Wirkung

des Kräftepaares, das bestrebt ist, die Körperachse aus ihrer momentanen Lage auszulenken. Wenn der rotierende Körper mechanisch auf einer in Lagern fixierten Achse liegt, entstehen dadurch in den Lagern Drücke, durch die die Lager belastet werden.
Nur in den Fällen, da eine der Hauptträgheitsachsen Rotationsachse ist, befinden sich die Zentrifugalkräfte im Gleichgewicht miteinander, und daher ist ihr Einfluß auf die Lage der Achse, gegebenenfalls auf die sie führenden Lager, gleich Null.

B Beispiele

51. Aus einer homogenen kreisförmigen Platte mit dem Radius r wird ein Kreis mit dem halben Radius der kreisförmigen Platte ausgeschnitten (Bild 32). Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunkts des auf diese Weise entstandenen Körpers.

Lösung

Die Lage des Schwerpunkts des angegebenen Gebildes läßt sich leicht bestimmen, indem wir das ganze Gebilde in zwei Teile zerlegen, und zwar in den Kreis mit dem Radius $r/2$ mit dem Zentrum in S_1, wo sich auch der Schwerpunkt dieses Teils befindet, und dem verbleibenden Teil, der aus Symmetriegründen seinen Schwerpunkt in S_0 hat, d. h. im Zentrum des Ursprungskreises. Für die Lage des resultierenden Schwerpunktes S gilt

$$\left(\frac{r}{2} - x\right) : x = \left(\pi r^2 - 2\pi \frac{r^2}{4}\right) : \pi \frac{r^2}{4},$$

woraus für das gesuchte x resultiert: $\underline{x = r/6.}$

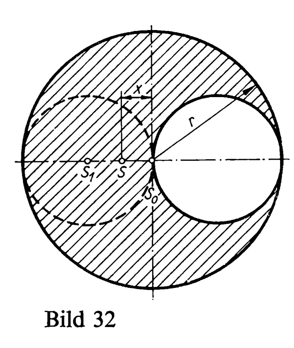


Bild 32

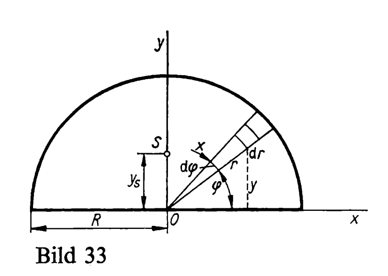


Bild 33

52. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts für einen homogenen Körper, der die Form einer Halbkreisplatte mit zu vernachlässigender Dicke und dem Radius R hat.

Lösung

Bei der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems (Bild 33) ist aus Symmetriegründen $x_S = 0$. Für y_S gilt

$$y_S = \frac{\int y \, \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int\limits_0^R \int\limits_0^\pi r \sin\varphi \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \frac{2m}{\pi R^2}}{m},$$

$$y_S = \frac{2}{\pi R^2} \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\varphi\right]_0^\pi = \underline{\frac{4R}{3\pi}},$$

wobei, wie aus dem Bild hervorgeht, für die Größen y und $\mathrm{d}m$ geschrieben wurde $y = r \sin\varphi$ und

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\frac{\pi R^2}{2}} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r.$$

53. Ermitteln Sie den Schwerpunkt eines homogenen Kreiskegels der Höhe h.

Lösung

Wenn wir den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems in die Kegelspitze legen und die y-Achse in Richtung der Kegelhöhe annehmen (Bild 34), dann wird deutlich, daß bei Wahrung der Symmetrie $x_S = z_S = 0$ ist, und für y_S gilt

$$y_S = \frac{\int y \, \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\frac{3m}{h^3} \int\limits_0^h y^3 \, \mathrm{d}y}{m} = \frac{3}{h^3} \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{3}{4} h,$$

wenn wir festgelegt haben, daß

$$\mathrm{d}m = \pi x^2 \, \mathrm{d}y \frac{m}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{3m}{r^2 h} \frac{r^2}{h^2} y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{3m}{h^3} y^2 \, \mathrm{d}y;$$

da $x : y = r : h$, folgt $x = \frac{r}{h} y$.

Der Schwerpunkt des Kegels befindet sich somit, von der Spitze aus gemessen, im Abstand $^3/_4$ seiner Höhe auf der Kegelachse.

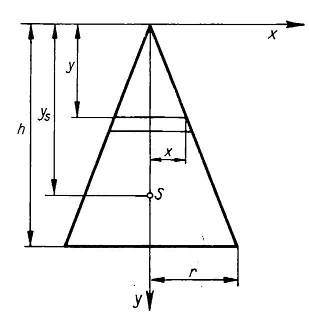


Bild 34

54. Gegeben sei ein System aus drei Massenpunkten: $m_1 = 0{,}05$ kg; $m_2 = 0{,}010$ kg; $m_3 = 0{,}015$ kg. Zur Zeit $t = 0$ befinden sie sich in den Stellungen A_1 (3; 4; 5), A_2 (−2; 4; −6), A_3 (0; 0; 0) in Ruhe, wobei die Koordinaten Maßzahlen in Zentimetern bedeuten sollen. Unter der Wirkung äußerer Kräfte, deren Summe durch einen Vektor $F = 0{,}05$ N in Richtung der x-Achse angegeben ist, setzen sich die Massenpunkte in Bewegung. Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunkts des Systems nach Ablauf der Zeit $t = 2$ s.

Lösung

Für die Lage des Schwerpunkts des Systems zur Zeit $t = 0$ ergibt sich

$$x_{S0} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = -\frac{1}{6}\,\text{cm} = -0{,}17\,\text{cm};$$

$$y_{S0} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 2\,\text{cm};$$

$$z_{S0} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3} = -\frac{35}{30}\,\text{cm} = -1{,}17\,\text{cm}.$$

Durch Anwenden des Satzes von der Schwerpunktbewegung erhalten wir für die Beschleunigung des Schwerpunkts

$$a_{S0} = \frac{F}{\sum m_i} = \frac{0{,}05\,\text{N}}{0{,}03\,\text{kg}} = 1{,}67\,\text{m s}^{-2}.$$

Gemäß der gegebenen Aufgabenstellung fällt die Beschleunigung in die Richtung der x-Achse, so daß für die x-Koordinate des Schwerpunkts geschrieben werden kann

$$x_S = x_{S0} + \frac{1}{2}\,a_S t^2 = -0{,}17\,\text{cm} + \frac{1}{2}\cdot 167\,\text{cm s}^{-2}\cdot 4\,\text{s}^2 = \underline{3{,}338\,\text{m}}.$$

Für die Koordinaten y_S, z_S gilt offenbar: $\underline{y_S = y_{S0}}$; $\underline{z_S = z_{S0}}$.

55. Im einen Ende eines Bootes, das ruhig auf dem Wasser liegt, befindet sich ein Mensch. Um welche Strecke verändert das Boot seine Lage, wenn der Mensch an das andere Ende des Bootes geht? Das Gewicht des Menschen sei G, das des Bootes G_1, die Länge des Bootes sei $l = 2a$. Der Wasserwiderstand bei der Bewegung des Bootes bleibt unberücksichtigt.

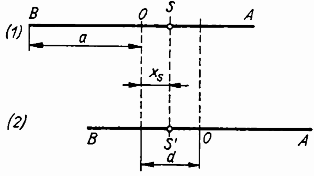


Bild 35

Lösung

Das Boot mit dem an Bord befindlichen Menschen kann als ein abgeschlossenes System angesehen werden. Für dieses gilt das Gesetz von der Erhaltung der Schwerpunktlage. In Bild 35 ist die Lage des Bootes für die beiden Fälle dargestellt: Im Fall (1) befindet sich der Mensch am rechten Ende des Bootes (Stellung A), im Fall (2) in Stellung B. Im ersten Fall liegt der Schwerpunkt des Systems im Abstand x_S, von der Bootsmitte O aus gesehen, in Richtung nach A.

Da die Bootsmitte O zugleich auch der Schwerpunkt des Bootes ist, können wir in Übereinstimmung mit der Schwerpunktdefinition für x_S schreiben

$$x_S = \frac{a\frac{G}{g}}{\frac{G}{g} + \frac{G_1}{g}} = \frac{aG}{G + G_1}\,.$$

Beim Stellungswechsel des Menschen von A nach B verschiebt sich das Boot um die Strecke d so, daß die Lage des neuen Schwerpunkts S' dieselbe ist wie die des ursprünglichen Schwerpunkts S. Aus Bild 35 ist zu ersehen, daß gilt

$$d = 2x_S = 2a\,\frac{G}{G + G_1}\,.$$

56. Bis zu welcher Höhe schlägt ein ballistisches Pendel der Masse $M = 10$ kg aus, wenn es von einem Geschoß der Masse $m = 0{,}1$ kg und der Geschwindigkeit $v = 200\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ getroffen wird?

Lösung

Wenn das Geschoß ein ballistisches Pendel trifft, vereinigt es sich mit ihm, und das Pendel beginnt, sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit v' zu bewegen. Nach dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses für das aus Pendel und Geschoß gebildete abgeschlossene System gilt die Gleichung

$$mv = (M + m)\,v',$$

d. h.,

$$v' = \frac{mv}{M + m}\,.$$

Zur Berechnung der erreichten Höhe h (Bild 36) wenden wir das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an, das uns die Beziehung ermöglicht

$$\frac{1}{2}\,(M + m)\,v'^2 = (M + m)\,gh,$$

d. h.,

$$h = \frac{v'^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2g(M + m)^2} =$$

$$= \frac{10^{-2}\ \mathrm{kg^2} \cdot 4 \cdot 10^4\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 102\ \mathrm{kg^2}} = 0{,}2\ \mathrm{m}.$$

57. Welche Treibstoffmenge muß eine einfache Einstufenrakete aufnehmen, damit sie nach Verbrennen des gesamten Treibstoffs die erste kosmische Geschwindigkeit erreicht, wenn die Leermasse der Rakete $m_r = 100$ kg beträgt und die relative Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase $v_r = 3000\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ist?

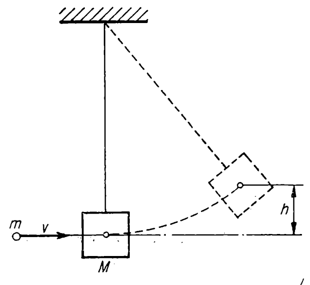


Bild 36

Lösung

Diese Aufgabe werden wir unter Benutzung des Gesetzes von der Erhaltung des Impulses für ein abgeschlossenes System lösen. Die Rakete zusammen mit dem Treibstoff stellt ein solches abgeschlossenes System dar. Zu einem bestimmten Zeitpunkt t, in dem die Rakete hinsichtlich eines gewählten Bezugssystems die Geschwindigkeit v hat, sei die Masse von Rakete plus gegenwärtigem Treibstoffinhalt durch das Symbol m gegekennzeichnet. Der Impuls der Rakete wird zu diesem Zeitpunkt durch die Beziehung

$$\vec{p}_t = m\vec{v}$$

angegeben. Nehmen wir an, daß in der Zeit $\mathrm{d}t$ aus der Rakete Gase mit einer Masse $\mathrm{d}m'$ entweichen, und zwar mit einer Geschwindigkeit $\vec{u}$, die hinsichtlich des gleichen Bezugssystems gemessen wird, auf das wir die Raketengeschwindigkeit beziehen. Dann erhöht sich in der Zeit $\mathrm{d}t$ die Raketengeschwindigkeit vom Wert $\vec{v}$ auf $\vec{v} + d\vec{v}$. Der Impuls des gesamten Systems wird dann zur Zeit $t + \mathrm{d}t$ sein

$$\vec{p}_{t+\mathrm{d}t} = (m - \mathrm{d}m')(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) + \mathrm{d}m'\vec{u}.$$

Entsprechend dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses eines abgeschlossenen Systems finden wir dann

$$\vec{p}_{t+\mathrm{d}t} = \vec{p}_t,$$

d. h.,

$$(m - \mathrm{d}m')(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) + \mathrm{d}m'\vec{u} = m\vec{v}. \tag{1}$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $\mathrm{d}m' = -\mathrm{d}m$ ist, denn die Masse der entweichenden Gase bedeutet eine Verringerung des von der Rakete mitgeführten Treibstoffvorrats, dann können wir Gl. (1) in die Form bringen

$$\mathrm{d}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}m}{m}(\vec{u} - \vec{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{m}\vec{v}_\mathrm{r}. \tag{2}$$

In Gl. (2) haben wir das Glied $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$ als kleine Größe höherer Ordnung außer Betracht gelassen und $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_\mathrm{r}$ bezeichnet, wobei $\vec{v}_\mathrm{r}$ die relative Ausströmgeschwindigkeit der Gase bezüglich der Rakete darstellt. Wenn wir in Bild 37 den Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ mit dem Symbol $\vec{\varrho}$ bezeichnen, dann finden wir

$$\vec{v} = v\vec{\varrho}, \quad \vec{v}_\mathrm{r} = -v_\mathrm{r}\vec{\varrho},$$

und wir können so Gl. (2) auf eine skalare Beziehung bringen gemäß

Bild 37

$$\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}m}{m}v_\mathrm{r}. \tag{3}$$

Durch Integration von Gl. (3) finden wir

$$v = -v_r \ln m + C.$$

Den Wert der Integrationskonstante C ermitteln wir aus den Anfangsbedingungen. Zur Zeit $t = 0$ war die Geschwindigkeit der Rakete gleich Null, d. h. $v = 0$, und die Raketenmasse hatte die Größe $m = m_0$. Nach Einsetzen dieser Werte in Gl. (3) erhalten wir

$$0 = -v_r \ln m_0 + C, \quad C = v_r \ln m_0,$$

so daß wir Gl. (3) folgendermaßen schreiben können:

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m}.$$

Für den Endwert der Raketengeschwindigkeit v_e gilt dann nach Verbrauch des gesamten Treibstoffs

$$v_e = v_r \ln \frac{m_0}{m_r}, \tag{4}$$

wobei m_r die Leermasse der Rakete ist. Für die gesuchte Masse des insgesamt notwendigen Treibstoffs gilt offenbar $m_{Tr} = m_0 - m_r$. Die Startmasse m_0 kann aus Gl. (4) ermittelt werden

$$m_0 = m_r \exp\left[\frac{v_e}{v_r}\right],$$

so daß gilt

$$m_{Tr} = m_r\left(\exp\left[\frac{v_e}{v_r}\right] - 1\right).$$

Nach Einsetzen der vorgegebenen Größen finden wir

$$m_{Tr} = 100\ \text{kg}\left(\exp\left[\frac{7{,}9}{3}\right] - 1\right) =$$

$$= 100\ \text{kg} \cdot 12{,}92 = \underline{1292\ \text{kg}}.$$

58. Eine abgewinkelte Stange mit einem ⌊-Profil (Bild 38), deren Schenkel die Länge $a = 0{,}3$ m und $b = 0{,}15$ m haben und aus dem gleichen Material bestehen, ist im Endpunkt des einen Schenkels so gelagert, daß sie sich um eine waagerechte Achse drehen kann, die senkrecht auf der durch die Schenkel der Stange definierten Ebene steht und durch den Aufhängepunkt verläuft. Bestimmen Sie den Winkel, der in der Gleichgewichtsstellung vom Schenkel a und der Vertikalen eingeschlossen wird.

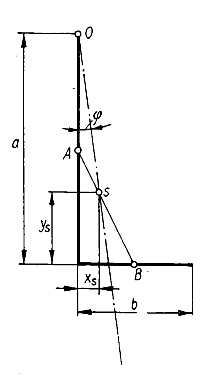


Bild 38

Lösung

Die Gleichgewichtsbedingungen erfordern, daß
a) die Vektorsumme aller auf den Körper wirkenden Kräfte gleich Null ist und
b) die Vektorsumme der Momente aller Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes gleich Null ist.

Die Bedingung (a) ist dann erfüllt, wenn das Gewicht der Stange durch ihre Aufhängung im Punkt O kompensiert ist. Die Bedingung (b) wird dann erfüllt, wenn der Schwerpunkt, der Angriffspunkt des Körpergewichts, auf einer durch den Aufhängepunkt gehenden Vertikalen liegt. Dann ist nämlich auch die Vektorsumme der Momente aller Kräfte (des Gewichts der Stange und des Widerstands der Befestigung), z. B. bezogen auf den Aufhängepunkt O, gleich Null. Wenn wir die Schwerpunktkoordinaten in einem Koordinatensystem, das aus den Schenkeln der Stange gebildet wird, mit den Symbolen x_S und y_S bezeichnen, finden wir

$$\tan\varphi = \frac{x_S}{a - y_S};$$

es gilt aber die Proportion

$$\overline{AS} : \overline{SB} = b : a$$

und ferner

$$\overline{AS}\sin\varphi : \overline{SB}\sin\varphi = b : a$$

oder auch

$$x_S : \left(\frac{b}{2} - x_S\right) = b : a,$$

woraus folgt

$$x_S = \frac{b^2}{2(a+b)}.$$

Völlig analog können wir schreiben

$$\overline{AS}\cos\varphi : \overline{SB}\cos\varphi = b : a$$

oder

$$\left(\frac{a}{2} - y_S\right) : y_S = b : a,$$

woraus wir finden

$$y_S = \frac{a^2}{2(a+b)}.$$

Es hat sich somit ergeben

$$\tan\varphi = \frac{\dfrac{b^2}{2(a+b)}}{a - \dfrac{a^2}{2(a+b)}} = \frac{b^2}{a^2 + 2ab} = 0{,}125,$$

also ist der Winkel

$$\underline{\varphi = 7° \, 10'.}$$

59. Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Stange der Länge l und der Masse m bezüglich einer senkrecht zu ihr stehenden Achse, die a) durch den Endpunkt der Stange und b) durch ihren Mittelpunkt geht

Lösung

a) Für das Trägheitsmoment der Stange bezüglich der Achse O (Bild 39) können wir schreiben

$$J = \int x^2 \, dm = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 \, dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \underline{\frac{1}{3} ml^2};$$

b) entsprechend dem STEINERschen Satz

$$J = J_S + \frac{1}{4} ml^2$$

(J_S Trägheitsmoment der Stange bezogen auf die Schwerpunktachse) kann J_S durch die folgende Beziehung ausgedrückt werden:

$$J_S = J - \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2 - \frac{1}{4} ml^2 = \underline{\frac{1}{12} ml^2}.$$

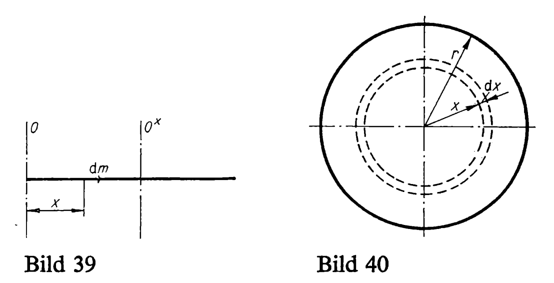


Bild 39 Bild 40

60. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen kreisförmigen Platte der Masse $m = 2$ kg und des Radius $r = 0{,}1$ m in bezug auf eine senkrecht zur Plattenebene gerichtete Mittelpunktsachse.

Lösung

Wenn wir als Massenelement dm ein kreisringförmiges Element der Platte mit der Breite dx wählen, dann kann wie in Bild 40 für das Trägheitsmoment geschrieben

werden:

$$J = \int x^2 \,\mathrm{d}m = \int_0^r x^2 \frac{m}{\pi r^2} 2\pi x \,\mathrm{d}x = \frac{2m}{r^2} \int_0^r x^3 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2m}{r^2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2 = \underline{0{,}01\,\mathrm{kg\,m}^2}.$$

61. Bestimmen Sie die Trägheitsmomente eines homogenen Prismas der Masse m in bezug auf die drei senkrecht auf den Flächen stehenden Mittelpunktsachsen. Die Kantenlängen seien a, b, c.

Lösung

Gemäß dem in Bild 41 dargestellten Bezugssystem und den dort verwendeten Bezeichnungen ergibt sich das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse durch die Beziehung

$$J_x = \int u^2 \,\mathrm{d}m = \frac{m}{bc} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 4 \frac{m}{bc} \int_0^{\frac{c}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z =$$

$$= 4 \frac{m}{bc} \int_0^{\frac{c}{2}} \left[\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2}\right] \mathrm{d}z = 4 \frac{m}{bc} \left[\frac{b^3 c}{48} + \frac{bc^3}{48}\right] = \underline{\frac{1}{12} m (b^2 + c^2)},$$

da das Massenelement $\mathrm{d}m = (m/abc)\, a \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ und $u^2 = y^2 + z^2$ ist. Es ist offenkundig, daß wir für die Trägheitsmomente des Prismas bezüglich der y- und z-Achsen ganz analoge Beziehungen erhalten in der Form

$$\underline{J_y = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)}; \quad \underline{J_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)}.$$

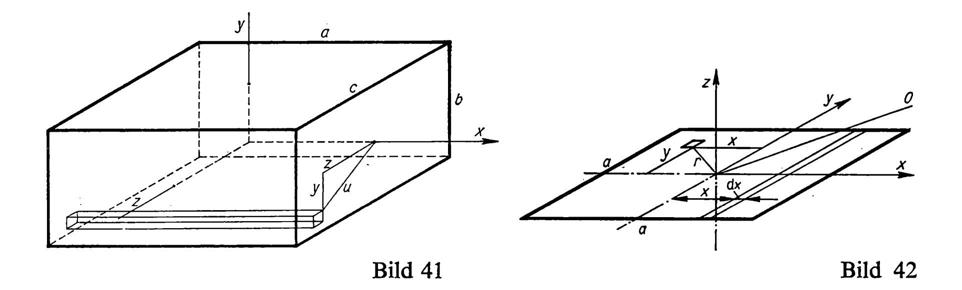


Bild 41 Bild 42

62. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen quadratischen Platte mit der Masse $m = 2$ kg und der Seitenlänge $a = 0{,}1$ m bezüglich einer Achse 0, die unter einem Winkel $\varphi = 45°$ durch den Plattenmittelpunkt geht, wobei die senkrecht zur Plattenebene gerichtete Achsenprojektion parallel zur Seite des Quadrats verläuft (Bild 42).

Lösung

Für das gesuchte Trägheitsmoment gilt

$$J = J_{S1} \cos^2 \alpha + J_{S2} \cos^2 \beta + J_{S3} \cos^2 \gamma$$

(J_{S1}, J_{S2}, J_{S3} Hauptträgheitsmomente, α, β, γ Winkel, die die Achse 0 mit den Hauptträgheitsachsen einschließt). In unserem Beispiel sind dies die x-, y- und z-Achse. Aus Bild 42 und der Aufgabenstellung geht hervor, daß $\varphi = 45°$, $\beta = 90°$ und $\gamma = 45°$ beträgt. Wir berechnen zunächst die Hauptträgheitsmomente J_{S1}, J_{S2}, J_{S3}. Offenbar gilt für sie

$$J_{S1} = J_{S2} = \int x^2 \, \mathrm{d}m = \frac{m}{a^2} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 a \, \mathrm{d}x = \frac{m}{a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{1}{12} ma^2.$$

Für J_{S3} gilt

$$J_{S3} = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \frac{m}{a^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{4m}{a^2} \int\limits_0^{\frac{a}{2}} \int\limits_0^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{4m}{a^2} \int\limits_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^3}{24} + \frac{ay^2}{2}\right) \mathrm{d}y = \frac{4m}{a^2} \left[\frac{a^3 y}{24} + \frac{ay^3}{6}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{6} ma^2.$$

Für das gesamte Trägheitsmoment J erhalten wir dann

$$J = \frac{1}{12} ma^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{6} ma^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{8} ma^2 = \frac{1}{8} 2 \, \mathrm{kg} \cdot 10^{-2} \, \mathrm{m}^2 = \underline{\underline{0{,}0025 \, \mathrm{kg\,m}^2.}}$$

63. Ein Schwungrad setzt sich unter der Einwirkung einer Kraft, deren Moment bezüglich der Drehachse den Wert $M = 200$ Nm hat, in Bewegung um eine feste Achse. Nach Ablauf der ersten Minute hat es eine Drehzahl von 120 U min^{-1} erreicht. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Schwungrades?

Lösung

Die Bewegungsgleichung eines rotierenden Körpers lautet $M = J\alpha$, so daß wir finden

$$J = \frac{M}{\alpha}.$$

Da M konstant ist, ergibt sich auch für die Winkelbeschleunigung α ein konstanter Wert, so daß wir schreiben können

$$\omega = \alpha t, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}.$$

Nach Einsetzen der vorgegebenen Zahlenwerte erhalten wir das Trägheitsmoment des Schwungrades zu

$$J = \frac{M}{\alpha} = \frac{Mt}{2\pi n} = \frac{200 \text{ Nm} \cdot 60 \text{ s}}{2 \cdot \dfrac{120}{60 \text{ s}}} = \underline{955 \text{ kg m}^2}.$$

64. Eine homogene gerade Metallstange der Dichte $\varrho = 8 \text{ g cm}^{-3}$ und der Länge $l = 0{,}3$ m dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse, die durch den Schwerpunkt geht und senkrecht zur Stange gerichtet ist. Welchen Höchstwert darf die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung annehmen, wenn die höchstzulässige Spannung, der wir die Stange in Längsrichtung aussetzen können, 600 kp cm^{-2} beträgt?

Lösung

Die Gesamtkraft, die in Längsrichtung der Stange angreift, ist gleich der Summe der Zentrifugalkräfte, mit denen die entfernteren Gebiete der Stange auf jene wirken, die sich näher an der Rotationsachse befinden. Der Anteil der Stangenelemente an der Gesamtkraft (Bild 43) beträgt dann

$$\mathrm{d}F = x\omega^2 \, \mathrm{d}m = \varrho A \omega^2 x \, \mathrm{d}x,$$

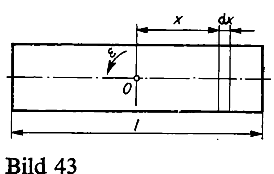


Bild 43

wenn wir den Querschnitt der Stange mit A bezeichnen. Die wirkende Gesamtkraft wird dann wie folgt gefunden:

$$F = \varrho A \omega^2 \int_0^{\frac{l}{2}} x \, \mathrm{d}x = \varrho A \omega^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{\varrho A \omega^2 l^2}{8}.$$

Die höchstzulässige Spannung beträgt

$$\frac{F}{A} = 600 \text{ kp cm}^{-2},$$

und damit ist

$$A \cdot 600 \text{ kp cm}^{-2} = \frac{\varrho A \omega^2 l^2}{8},$$

woraus für die gesuchte Winkelgeschwindigkeit resultiert

$$\omega = \sqrt{\frac{8 \cdot 600 \text{ kp cm}^{-2}}{\varrho l^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 600 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2}}{8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}} \approx \underline{809 \text{ s}^{-1}}.$$

65. Wie groß muß die Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse y in einer in Bild 44 aufgebauten Anordnung sein, damit der Auslenkungswinkel φ der beiden Stangen von $l = 1$ m Länge einen Betrag von 45 °C annimmt?

Lösung

Bei der Lösung dieser Aufgabe stellen wir uns zweckmäßigerweise auf den Standpunkt des mitrotierenden Bezugssystems. In diesem Bezugssystem befinden sich beide Stangen im Gleichgewichtszustand. Dann aber muß das Gesamtmoment der auf die Stangen wirkenden Kräfte, d. h. des Stangengewichts und der Zentrifugalkräfte (z. B. in bezug auf einen Punkt 0), gleich Null sein. Für den Wert des Moments, das vom Gewicht der Stange herrührt, bezogen auf den Punkt 0, gilt

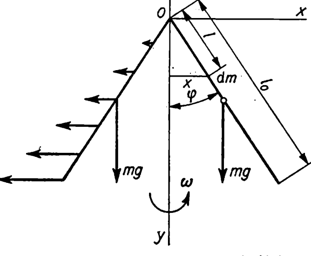


Bild 44

$$M_1 = mg \frac{l_0}{2} \sin \varphi.$$

Den Wert des von den Zentrifugalkräften ausgeübten Moments berechnen wir wie folgt:

$$M_2 = \int x\omega^2 \, dm \, l \cos \varphi = \int_0^{l_0} l \sin \varphi \, \omega^2 \frac{m}{l_0} \, dl \, l \cos \varphi =$$

$$= \frac{m}{l_0} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \int_0^{l_0} l^2 \, dl = \frac{m}{l_0} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \left[\frac{l^3}{3}\right]_0^{l_0} = \frac{1}{3} m l_0^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Da die Momente der Gewichtskraft und der Zentrifugalkräfte in bezug auf einen Punkt 0 (Bild 44) entgegengesetzt gerichtet sind, ist die Gleichgewichtsbedingung durch die Beziehung gegeben:

$$mg \frac{l_0}{2} \sin \varphi = \frac{1}{3} m l_0^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Für den Wert der bei vorgegebener Auslenkung erforderlichen Winkelgeschwindigkeit finden wir somit

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2 \, l_0 \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{3g\sqrt{2}}{2 l_0}} = \underline{4{,}56 \text{ s}^{-1}}.$$

66. Ein zylindrischer Körper mit der Masse $m = 10$ kg und dem Radius $r = 0{,}2$ m dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \pi\ \mathrm{s}^{-1}$ um seine Längsachse. Berechnen Sie den Drehimpuls des Körpers in bezug auf einen beliebigen Punkt der Drehachse (Bild 45).

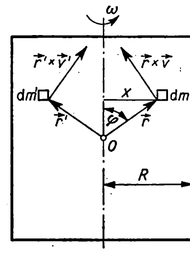


Bild 45

Lösung

Für den Drehimpuls eines Körpers in bezug auf einen Punkt 0 auf seiner Drehachse können wir schreiben

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v})\, \mathrm{d}m.$$

Die beiden symmetrisch angeordneten Massenelemente dm und dm' tragen zum Gesamtdrehimpuls nur durch diejenigen Komponenten ihrer Drehimpulse bei, die in Richtung der Drehachse zeigen, denn die senkrecht zur Drehachse weisenden Komponenten ergeben zusammen den Wert Null. Da $\vec{r}$ senkrecht zu $\vec{v}$ gerichtet ist ($\vec{r} \perp \vec{v}$), gilt für den Drehimpuls, der offensichtlich in die Richtung der Drehachse fällt,

$$L = \int r v \sin\varphi\, \mathrm{d}m = \int x\, v\, \mathrm{d}m = \int x^2 \omega\, \mathrm{d}m = \omega \int x^2\, \mathrm{d}m = J\omega,$$

denn

$$r \sin\varphi = x, \quad v = x\,\omega.$$

Da sich das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich seiner Längsachse zu $J = {}^1/_2 mr^2$ ergibt, gilt dann für den Drehimpuls

$$L = J\omega = \frac{1}{2}\, mr^2\omega = \frac{1}{2}\, 10\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m}^2\,\pi\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{0{,}628\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}}.$$

67. Eine hölzerne Stange der Länge $l = 0{,}4$ m und der Masse $m = 1$ kg kann sich um eine zur Stange senkrechte Mittelpunktsachse drehen. Das Ende der Stange wird von einem Geschoß der Masse $m_1 = 0{,}01$ kg mit der Geschwindigkeit $v_1 = 200\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ getroffen, das sich senkrecht zur Achse und zur Stange bewegt (Bild 46). Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Stange zu drehen beginnt, wenn das Geschoß in ihr steckenbleibt.

Lösung

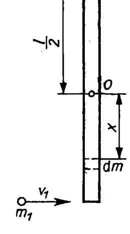


Bild 46

Hierbei wenden wir das Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses für ein abgeschlossenes System an, das in diesem Falle von Stange und Geschoß zusammen gebildet wird. Bevor das Geschoß die Stange trifft, ist der Gesamtdrehimpuls des Systems in bezug auf den Stangenmittelpunkt ausschließlich durch den auf ihn bezogenen Drehimpuls des anfliegenden Geschosses gegeben:

$$L_1 = m_1 v_1 \frac{l}{2}.$$

Der Drehimpuls der Stange, die sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Mittelpunktsachse dreht, hat – bezogen auf diesen Stangenmittelpunkt – eine in die Stangenachse fallende Richtung und dabei folgenden Wert:

$$L_2 = \int xv \, dm = \int xx\omega \, dm = \omega \int x^2 \, dm = \omega J,$$

wobei J das Trägheitsmoment der Stange in bezug auf die Drehachse ist. Aus dem Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses für ein abgeschlossenes System ergibt sich dann für unser Beispiel die Gleichung

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = \omega J + m_1 \frac{l}{2} v,$$

wobei v die Geschwindigkeit ist, mit der sich das Geschoß zusammen mit der Stange unmittelbar nach dem Steckenbleiben weiterbewegt. Aus $v = {}^1/_2 \, l\omega$ und $J = {}^1/_{12} \, ml^2$ ergibt sich

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = \frac{1}{12} ml^2 \omega + \frac{1}{4} m_1 l^2 \omega .$$

Für die gesuchte Winkelgeschwindigkeit ω erhalten wir schließlich

$$\omega = \frac{m_1 v_1 l}{2J} = \frac{0{,}01 \text{ kg} \cdot 200 \text{ m s}^{-1} \cdot 0{,}4 \text{ m}}{2\left(\frac{1}{12} \, 1 \text{ kg} \cdot 0{,}16 \text{ m}^2 + 0{,}01 \text{ kg} \, \frac{0{,}16 \text{ m}^2}{4}\right)} = \underline{29{,}1 \text{ s}^{-1}}.$$

68. Berechnen Sie den Inhalt an kinetischer Energie der Rotation einer Hohlkugel mit dem Außendurchmesser $d_1 = 0{,}2$ m, dem Innendurchmesser $d_2 = 0{,}18$ m und der Masse $m = 0{,}25$ kg, die sich mit der Tourenzahl $n = 1500 \text{ U min}^{-1}$ um ihren Durchmesser dreht.

Lösung

Für die kinetische Energie eines Körpers, der sich um eine feste Achse dreht, gilt bekanntlich

$$W_k = \frac{1}{2} J\omega^2 .$$

Das Massenträgheitsmoment einer Vollkugel mit dem Radius r in bezug auf ihren Durchmesser ist durch die Beziehung

$$J_k = \frac{2}{5} m^* r^2$$

gegeben, wobei m^* die Masse der Vollkugel darstellt. Eine Hohlkugel kann als die Differenz zweier homogener Vollkugeln mit den Radien r_1, r_2 und den Massen m_1, m_2 angesehen werden. Für das Massenträgheitsmoment der Hohlkugel finden wir dann

$$J_H = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 - \frac{2}{5} m_2 r_2^2 .$$

Es ist offenkundig, daß die Masse der Hohlkugel $m = m_1 - m_2$ ist. Die Massen m_1 und m_2 sowie die Radien r_1 und r_2 sind durch folgende Beziehungen miteinander verbunden:

$$m_1 : m_2 = r_1^3 : r_2^3,$$

oder

$$m_1 : m = r_1^3 : (r_1^3 - r_2^3),$$

$$m_2 : m = r_2^3 : (r_1^3 - r_2^3).$$

Mit diesen Beziehungen erhalten wir für das Massenträgheitsmoment einer Hohlkugel in bezug auf ihren Durchmesser

$$J_H = \frac{2}{5} m \left(\frac{r_1^5}{r_1^3 - r_2^3} - \frac{r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} \right) = \frac{2}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}.$$

Für die kinetische Energie der rotierenden Hohlkugel finden wir dann

$$W_k = \frac{1}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} \omega^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \left(\frac{1500}{60\,\text{s}} \right)^2}{5} 250\,\text{g} \frac{10^5 - 9^5}{10^3 - 9^3}\,\text{cm}^2 = 18{,}6 \cdot 10^7\,\text{erg} = \underline{18{,}6\,\text{Nm}}.$$

69. Ein Schwungrad, das zusammen mit der Welle, auf der es sitzt, ein Trägheitsmoment von $J = 200\,\text{kg}\,\text{m}^2$ bezüglich seiner Drehachse hat, rotiert mit einer Drehzahl von $180\,\text{U}\,\text{min}^{-1}$. Unter dem Einfluß der in seinen Lagern wirkenden Reibung kommt es innerhalb von zwei Minuten nach dem Zeitpunkt, da äußere Kräfte zu wirken aufhören, zum Stehen. Wie groß ist das Moment der Reibungskräfte unter der Voraussetzung, daß es konstant ist?

Lösung

Bei der Lösung dieser Aufgabe gehen wir von dem Lehrsatz aus, der besagt, daß die Arbeit der äußeren Kräfte bei der Drehung eines Körpers um einen bestimmten Winkel gleich der Zunahme seines Inhalts an kinetischer Energie ist, d. h.

$$W = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2.$$

Da die Reibungskräfte in ihrer Wirkung entgegengesetzt zur Bewegung gerichtet sind, finden wir

$$W = -M\varphi$$

(M gesuchtes Moment der Reibungskräfte, φ Winkel, den der Körper bei seiner Drehung in den angegebenen zwei Minuten beschreibt, ehe er zum Stillstand kommt).

Wenn wir weiterhin die Größe der Winkelgeschwindigkeit in dem Augenblick, da die äußeren Kräfte zu wirken aufhören, mit ω_0 bezeichnen, ergibt sich

$$-M\varphi = -\frac{1}{2} J\omega_0^2,$$

so daß für das gesuchte Moment der Reibungskräfte folgt

$$M = \frac{1}{2} \frac{J\omega_0^2}{\varphi}.$$

Da jedoch $\omega = \omega_0 - \alpha t$, gilt $\omega_0 - \alpha t_0 = 0$. Es ergibt sich

$$\alpha = \frac{\omega_0}{t_0}$$

und damit

$$\varphi = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2} \alpha t_0^2 = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{t_0} t_0^2 = \frac{1}{2} \omega_0 t_0.$$

Für M können wir dann mit $t_0 = 2$ min weiter schreiben:

$$M = \frac{1}{2} \frac{J\omega_0^2}{\frac{1}{2} \omega_0 t_0} = \frac{J\omega_0}{t_0} = \frac{J\, 2\pi n_0}{t_0} = \frac{200 \text{ kg m}^2 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \frac{180}{60 \text{ s}}}{120 \text{ s}} =$$

$$= \underline{31{,}4 \text{ Nm}.}$$

70. Eine Stange der Masse $m = 2$ kg und der Länge $l = 1$ m ist auf einer horizontalen Achse gelagert, die durch den Endpunkt der Stange verläuft. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der andere Endpunkt der Stange durch seine tiefste Stellung, wenn wir die Stange aus der Höchstlage fallen lassen (Bild 47)? Mit welcher Kraft wird die die Stange tragende Achse im Moment des Durchlaufens der tiefsten Stellung beansprucht?

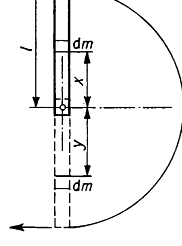


Bild 47

Lösung

Wir wenden hierbei das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an. Wenn wir die potentielle Energie der Stange hinsichtlich einer durch die Drehachse verlaufenden horizontalen Ebene betrachten, können wir für die potentielle Energie der Stange in ihrer Höchstlage wie folgt schreiben:

$$W_p = \int gx \,\mathrm{d}m = \frac{mg}{l} \int_0^l x \,\mathrm{d}x = \frac{mg}{l} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2} mgl,$$

während wir für die unterste Lage finden

$$W_{\mathrm{p}} = -\frac{1}{2}\,mgl.$$

Entsprechend dem Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie muß die Summe der Gesamtenergie in beiden Extremlagen die gleiche sein, so daß wir schreiben können

$$\frac{1}{2}\,mgl = -\frac{1}{2}\,mgl + \frac{1}{2}\,J\omega^2,$$

d. h.

$$mgl = \frac{1}{2}\,J\omega^2.$$

Da weiter $\omega = \frac{v}{l}$ und $J = \frac{1}{3}\,ml^2$ ist, ergibt sich

$$mgl = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,ml^2\,\frac{v^2}{l^2},$$

so daß schließlich gefunden wird

$$v = \sqrt{6\,gl} \approx \underline{7{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

Die Kraft, mit der die Drehachse beim Durchlaufen der tiefsten Lage belastet wird, ist durch die Summe von Stangengewicht und Zentrifugalkraft gegeben. Für letztere gilt

$$F_0 = \int y\,\omega^2\,\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\,\omega^2\int_0^l y\,\mathrm{d}y = \frac{m}{l}\,\omega^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2}\,ml\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,ml\,\frac{v^2}{l^2} = \frac{1}{2}\,\frac{m}{l}\,6\,gl = 3\,mg.$$

Damit kann die Gesamtkraft, durch welche die Achse belastet wird, wie folgt beschrieben werden:

$$F = mg + F_0 = mg + 3mg =$$

$$= 4mg = 4\cdot 2\ \mathrm{kp} = \underline{8\ \mathrm{kp} = 78{,}5\ \mathrm{N}}.$$

71. Ein auf einer Welle sitzendes Rad hat, auf seine Drehachse bezogen, ein Trägheitsmoment J. In Bild 48 wurde um die Welle ein Seil gewunden, an dem ein Körper K hängt. Der Radius der Welle sei r. Unter dem Einfluß der Erdanziehung setzt sich der Körper nach unten in Bewegung. Wie groß ist der Weg, um den der Körper in der Zeit t_0 absinkt?

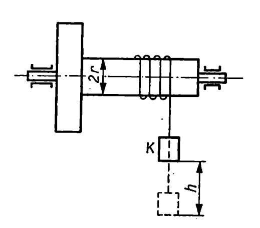


Bild 48

Lösung

Für die Lösung dieser Aufgabe wenden wir wiederum das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an, das für einen beliebig herausgegriffenen Moment der Bewegung des Körpers folgenden Ausdruck hat:

$$mgh = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2,$$

da die Abnahme der potentiellen Energie des Körpers sowohl für den Zuwachs an kinetischer Energie des Körpers ($^1/_2\, mv^2$), als auch für den Zuwachs an kinetischer Energie der Rotation ($^1/_2\, J\omega^2$) zuständig ist.
Da $v = r\omega$ ist, kann die obige Gleichung in eine neue Form gebracht werden:

$$mgh = \frac{v^2}{2}\left(\frac{J}{r^2} + m\right).$$

Wir leiten diese Gleichung nach der Zeit ab und erhalten

$$mg\frac{dh}{dt} = v\frac{dv}{dt}\left(\frac{J}{r^2} + m\right).$$

Da die Ableitung der Höhe nach der Zeit $dh/dt = v$ ist, bekommen wir für die Beschleunigung $a = dv/dt$ des Körpers die Beziehung

$$a = \frac{mg}{\dfrac{J}{r^2} + m}.$$

Wie ersichtlich, ist die Beschleunigung konstant, die Bewegung des Körpers wird also eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte sein. Für den Weg, um den der Körper während der Zeit t_0 herabsinkt, wird also gefunden

$$h_0 = \frac{1}{2} at_0^2.$$

72. Eine homogene Kugel der Masse m und des Radius r rollt unter dem Einfluß ihres Eigengewichts auf einer schiefen Ebene, die mit der horizontalen Ebene den Winkel φ einschließt. Welche Geschwindigkeit hat der Schwerpunkt der Kugel nach Durchlaufen der Strecke s, und in welcher Beziehung steht diese Geschwindigkeit zu jener, die der Schwerpunkt der Kugel im Falle einer reibungslos verlaufenden reinen Rutschbewegung auf der gleichen schiefen Ebene haben würde?

Lösung

Entsprechend dem Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie muß die kinetische Gesamtenergie der Kugel in jedem beliebigen Moment ihrer Bewegung gleich dem seit Bewegungsbeginn eingetretenen Verlust an potentieller Energie sein (Bild 49). Es

gilt also

$$mgh = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,J\omega^2,$$

denn die resultierende Bewegung der Kugel kann als Summe der translativen Bewegung und der Rotation um die durch den Kugelschwerpunkt gehende Achse angesehen werden.

Da das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf ihren Durchmesser mit $J = {}^2/_5\,mr^2$ angegeben wird und da $\omega = v/r$ und $h = s\sin\varphi$ ist, kann die obige Gleichung auf die Form

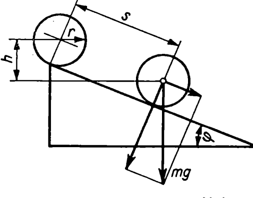


Bild 49

$$mgh = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\,mr^2\,\frac{v^2}{r^2}$$



gebracht werden, woraus sich weiterhin ergibt

$$\frac{7}{10}\,v^2 = gs\sin\varphi,$$

d. h.

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}\,gs\sin\varphi}.$$

Bei einer reinen, reibungslosen Rutschbewegung würde die Drehung der Kugel wegfallen, so daß für die Energie gälte

$$\frac{1}{2}\,mv^{*2} = mgs\sin\varphi$$

und für die Geschwindigkeit folgte

$$v^* = \sqrt{2\,gs\sin\varphi}.$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Geschwindigkeiten v und v^* ist dann gegeben durch

$$v = \sqrt{\frac{5}{7}}\,v^* \approx 0{,}84\,v^*.$$

73. Ein homogener Kreiszylinder mit der Masse m und dem Radius r rollt unter Ausschaltung jeglicher Rutschbewegung infolge seines Eigengewichts auf einer schiefen Ebene, die mit der horizontalen Ebene den Winkel φ einschließt (Bild 50). Ermitteln Sie die Beschleunigung a_S des Zylinderschwerpunkts und die Geschwindigkeit v_S des Schwerpunkts nach Durchlaufen der Strecke s für den Fall, daß der Zylinder sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befand.

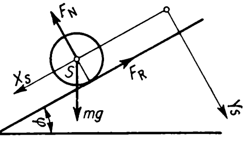


Bild 50

Lösung

Auf den Zylinder wirken die folgenden Kräfte: das Eigengewicht mg, der Widerstand der schiefen Ebene F_N, der ebenso groß ist wie die Normalkraft, mit der der Zylinder auf die schiefe Ebene drückt, und die Reibung F_R auf der Berührungslinie von Zylinder und schiefer Ebene. Die Bewegung des Zylinders kann als Bewegung des Schwerpunkts S und Rotation um die Symmetrieachse angesehen werden. Dann nimmt die Bewegungsgleichung des Zylinders die folgende Form an:

$$m \frac{d^2 x_S}{dt^2} = mg \sin \varphi - F_R;$$

$$m \frac{d^2 y_S}{dt^2} = mg \cos \varphi - F_N;$$

$$J_S \frac{d\omega}{dt} = F_R r,$$

wenn wir die Schwerpunktskoordinaten der Walze mit x_S und y_S bezeichnet haben. Es wird ersichtlich, daß in jedem Augenblick $d^2 y_S/dt^2 = 0$ gelten muß, so daß wir finden

$$mg \cos \varphi - F_N = 0$$

oder

$$F_N = mg \cos \varphi.$$

Da sich der Zylinder ohne Rutschen bewegt, ergibt sich für seine Schwerpunktsgeschwindigkeit in jedem Moment

$$v_S = \frac{dx_S}{dt} = r\omega.$$

Für die Beschleunigung des Schwerpunkts erhalten wir dann

$$a_S = \frac{d^2 x_S}{dt^2} = \frac{dv_S}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

Beim Einsetzen dieses Ausdrucks in die erste Gleichung für die allgemeine Bewegung des Zylinders erhalten wir

$$mr \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \varphi - F_R.$$

Wenn wir die Reibung F_R mittels der dritten Bewegungsgleichung ausdrücken, finden wir nach der Umformung

$$(mr^2 + J_S) \frac{d\omega}{dt} = mgr \sin \varphi.$$

Da $J_S = {}^1/_2\, mr^2$ ist, ergibt sich weiter

$$\frac{3}{2}\, mr^2\, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = mgr \sin \varphi,$$

woraus für

$$a_S = r\, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

folgt:

$$a_S = \frac{\mathrm{d}v_S}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\, g \sin \varphi.$$

Für die gesuchte Geschwindigkeit können wir schreiben $v_S = a_S t$, und wegen $s = {}^1/_2\, a_S t^2$, also $t = \sqrt{2s/a_S}$ finden wir die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S zu

$$v_S = a_S \sqrt{\frac{2s}{a_S}} = \sqrt{2a_S s} = \sqrt{\frac{4}{3}\, gs \sin \varphi} = 2 \sqrt{\frac{gs \sin \varphi}{3}}.$$

74. Eine homogene kreisförmige Platte mit der Masse $m = 2$ kg und dem Radius $r = 0{,}10$ m schwingt als physikalisches Pendel um eine horizontale Achse, die durch den Scheibenumfang verläuft. Ermitteln Sie die Periodendauer dieses physikalischen Pendels sowie seine reduzierte Pendellänge.

Lösung

Für die Periodendauer eines physikalischen Pendels gilt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr}}.$$

Nach dem Satz von Steiner ergibt sich das Trägheitsmoment der Platte, bezogen auf die Drehachse, zu

$$J = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}\, mr^2.$$

Für die Periodendauer T erhalten wir dann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\, mr^2}{mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}} = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{3 \cdot 0{,}10\ \mathrm{m}}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}} = 0{,}77\ \mathrm{s}.$$

Für die reduzierte Pendellänge dieses physikalischen Pendels finden wir

$$l = \frac{J}{mr} = \frac{\frac{3}{2}\, mr^2}{mr} = \frac{3}{2}\, r = 0{,}15\ \mathrm{m}.$$

75. Gegeben ist eine gerade, homogene Stange der Länge $l = 1$ m. Bestimmen Sie denjenigen Abstand vom Stangenmittelpunkt, in dem die Stange aufzuhängen ist, damit sie als physikalisches Pendel mit minimaler Periode schwingt.

Lösung

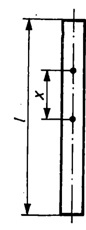


Bild 51

Die Periodendauer des physikalischen Pendels ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}}\,.$$

Durch Anwenden des Satzes von STEINER können wir das Trägheitsmoment der Stange in bezug auf die Pendelachse (Bild 51) bestimmen zu

$$J = \frac{1}{12}\,ml^2 + mx^2.$$

Damit nun die Periodendauer des physikalischen Pendels ein Minimum ist, muß der Ausdruck

$$y = \frac{J}{mgx} = \frac{\frac{1}{12}\,ml^2 + mx^2}{mgx} = \frac{\frac{1}{12}\,l^2 + x^2}{gx}$$

ebenfalls ein Minimum sein. Das ist der Fall bei

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2gx^2 - g\left(\frac{1}{12}\,l^2 + x^2\right)}{g^2x^2} = 0.$$

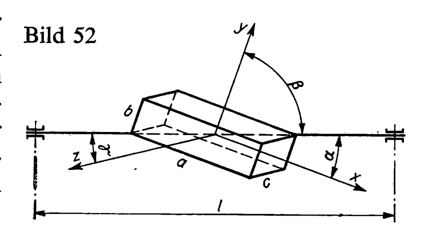
Diese Bedingung ist erfüllt für

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}} = \frac{1\text{ m}}{3{,}464} = \underline{0{,}29\text{ m}.}$$

Dieses Resultat entspricht der minimalen Periodendauer. Wir können uns von seiner Richtigkeit überzeugen, indem wir für das berechnete y die zweite Ableitung bilden. Das wird aber auch direkt aus der Formel für die Periodendauer des physikalischen Pendels deutlich, da $T \to \infty$ für den Fall $x \to 0$ gilt.

76. Ein homogener prismatischer Körper der Masse $m = 10$ kg mit den Abmessungen $a = 0{,}2$ m, $b = 0{,}05$ m, $c = 1$ m dreht sich um eine mechanische Achse (Bild 52), die in Richtung der Körperdiagonale fällt, mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi\ \mathrm{s}^{-1}$. Die Rotationsachse ist in Lagern gehaltert, die einen Abstand $l = 0{,}5$ m haben.

Bild 52



Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf seine Rotationsachse sowie die Druckkräfte, die als Folge der Zentrifugalkräfte auf die Lager wirken.

Lösung

Für das Trägheitsmoment gilt

$$J = J_{S1} \cos^2 \alpha + J_{S2} \cos^2 \beta + J_{S3} \cos^2 \gamma$$

(J_{S1}, J_{S2}, J_{S3} Hauptträgheitsmomente).
Die Hauptträgheitsachsen fallen in Richtung der x- bzw. y- bzw. z-Achse. Aus Bild 52 geht hervor, daß für die Winkel gilt

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aus dem bereits berechneten Beispiel 61 wissen wir, daß für die Trägheitsmomente bezüglich der Achsen gilt

$$J_{S1} = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2), \quad J_{S2} = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2), \quad J_{S3} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Unter Einbeziehung dieser Formeln können wir schreiben:

$$J = \frac{1}{12} m \left[\frac{a^2(b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2(a^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{6} m \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \approx \underline{0{,}0167 \text{ kg m}^2}.$$

Die Druckkraft F, die, hervorgerufen durch die Zentrifugalkräfte, auf jedes Lager wirkt, ist eine Funktion des Moments der Zentrifugalkräfte in bezug auf einen Punkt auf der Drehachse gemäß

$$Fl = M.$$

Das Moment der Zentrifugalkräfte ist durch

$$\vec{M} = \vec{U} \omega^2$$

gegeben, wobei $\vec{U}$ das Auslenkungsmoment der Platte in bezug auf die Rotationsachse ist, für das die Beziehung gilt

$$\vec{U} = (\vec{T}_S \times \vec{\varrho}) \times \vec{\varrho},$$

in der $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor in Richtung der Rotationsachse ist.
Da weiter gilt

$$\vec{T}_S = J_{S1} \vec{i}\vec{i} + J_{S2} \vec{j}\vec{j} + J_{S3} \vec{k}\vec{k},$$

sowie auch

$$\vec{\varrho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

finden wir

$$\vec{T_S}\vec{\varrho} = J_{S1}\cos\varphi\,\vec{i} + J_{S2}\cos\beta\,\vec{j} + J_{S3}\cos\gamma\,\vec{k}.$$

Für das Auslenkungsmoment $\vec{U}$ kann also geschrieben werden

$$\vec{U} = (\vec{T_S} \times \vec{\varrho}) \times \vec{\varrho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ J_{S1}\cos\varphi & J_{S2}\cos\beta & J_{S3}\cos\gamma \\ \cos\varphi & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(J_{S2}\cos\beta\cos\gamma - J_{S3}\cos\beta\cos\gamma) - \vec{j}(J_{S1}\cos\varphi\cos\gamma -$$

$$- J_{S3}\cos\varphi\cos\gamma) + \vec{k}(J_{S1}\cos\varphi\cos\beta - J_{S2}\cos\varphi\cos\beta) =$$

$$= \vec{i}(J_{S2} - J_{S3})\cos\beta\cos\gamma - \vec{j}(J_{S1} - J_{S3})\cos\varphi\cos\gamma + \vec{k}(J_{S1} - J_{S2})\cos\varphi\cos\beta =$$

$$= \frac{m}{12(a^2 + b^2 + c^2)}\,[bc(c^2 - b^2)\,\vec{i} + ac(a^2 - c^2)\,\vec{j} + ab(b^2 - a^2)\,\vec{k}].$$

Für den absoluten Wert des Auslenkungsmoments erhalten wir damit

$$U = \frac{m}{12\,(a^2 + b^2 + c^2)}\sqrt{b^2c^2(c^2 - b^2)^2 + a^2c^2(a^2 - c^2)^2 + a^2b^2(b^2 - a^2)^2} =$$

$$= \frac{10\ \mathrm{kg}}{12 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2} \cdot 7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^4 = 0{,}011\ \mathrm{kg\,m}^2.$$

Der Wert des von den Zentrifugalkräften ausgeübten Moments ist dann

$$M = U\omega^2 = 0{,}011\ \mathrm{kg\,m}^2 \cdot 4\pi^2\ \mathrm{s}^{-2} = 0{,}4343\ \mathrm{kg\,m}^2\,\mathrm{s}^{-2} = 0{,}4343\ \mathrm{Nm}.$$

Für die Druckkraft in den Lagern erhalten wir

$$F = \frac{M}{l} = \frac{0{,}4343\ \mathrm{kg\,m}^2\,\mathrm{s}^{-2}}{0{,}5\ \mathrm{m}} = \underline{0{,}87\ \mathrm{N}.}$$

A Aufgaben

61. Vier Massenpunkte mit den Massen $m_1 = 0{,}002$ kg, $m_2 = 0{,}005$ kg, $m_3 = 0{,}010$ kg, $m_4 = 0{,}007$ kg sind in einem Raum derart angeordnet, daß sie die Lagen A_1 (0,03; 0,04; 0,05), A_2 (−0,02; −0,03; −0,04), A_3 (−0,04; 0,02; 0,07), A_4 (0,01; −0,04; −0,06) einnehmen, wobei alle Koordinaten in Metern angegeben sind. Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts in diesem Massenpunktsystem.
62. Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunktes für ein Gebilde, das Bild 53 zeigt. Man kann es sich dadurch entstanden denken, daß aus einem Rechteck mit den Seiten a und b an einer der beiden

Seiten ein Halbkreis mit dem Radius $r = b/2$ herausgeschnitten und an die andere Seite des Rechtecks angefügt wurde.

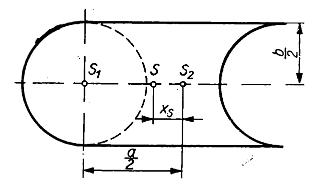


Bild 53

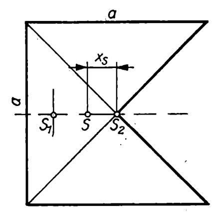


Bild 54

63. Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunktes für ein Gebilde, das entsteht, wenn wir aus einem Quadrat mit einer Seitenlänge a ein Dreieck herausschneiden (Bild 54).
64. Bestimmen Sie die Schwerpunktslage eines Drahtes, der in Gestalt eines Viertelkreises mit dem Radius $r = 0{,}1$ m gebogen ist.
65. Ermitteln Sie die Schwerpunktslage einer homogenen Halbkugel mit dem Radius r.
66. Zwei freie Massenpunkte A und B mit den Massen m_1 und m_2 führen eine gleichförmige Bewegung aus. Zur Zeit $t = 0$ beträgt der gegenseitige Abstand beider Punkte $\overline{AB} = d$, die Geschwindigkeit v_2 des Punktes B verläuft in Richtung der Verbindungslinie zwischen A und B, die Geschwindigkeit v_1 des Massenpunktes A ist dagegen senkrecht zur Verbindungslinie gerichtet (Bild 55). Bestimmen Sie Bahngleichung und Geschwindigkeit für den Schwerpunkt des Massenpunktsystems.

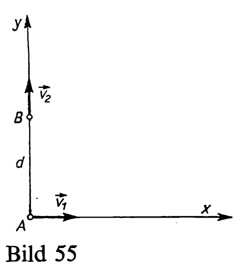


Bild 55

67. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich ein auf vollkommen glatter Eisfläche stehender Schütze in Bewegung setzt, nachdem er einen horizontalen Schuß abgefeuert hat. Die Masse von Schütze, Ausrüstung und Gewehr zusammen sei $m_1 = 70$ kg, die des Geschosses $m_2 = 0{,}010$ kg, die Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses sei $v_0 = 700 \text{ m s}^{-1}$.
68. Ein mit Sand beladener Wagen der Masse $m_1 = 100$ kg führt auf horizontaler Ebene eine geradlinige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 1 \text{ m s}^{-1}$ aus. Aus entgegengesetzter Richtung kommend, fliegt auf den Wagen eine Kugel der Masse $m_2 = 2$ kg mit einer Geschwindigkeit $v_2 = 70 \text{ m s}^{-1}$ und bleibt in der Sandladung des Wagens stecken. Beide Geschwindigkeitsangaben beziehen sich auf die Straße. Bestimmen Sie, nach welcher Seite und mit welcher Geschwindigkeit sich Wagen und Kugel nach dem Einschlag weiterbewegen.
69. Mit welcher Kraft wird eine Rakete vorwärtsgetrieben, aus der in jeder Sekunde Gase mit einer Masse von 100 kg bei einer relativen Ausströmgeschwindigkeit $v_r = 3000 \text{ m s}^{-1}$ ausgestoßen werden.

70. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe in bezug auf eine in die Richtung des Durchmessers fallende Achse.
71. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe von der Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln der Länge b und der Basis $2a$ in bezug auf eine Achse, die auf der Basis senkrecht steht und durch den gegenüberliegenden Scheitelpunkt geht. Die Masse der dreieckigen Scheibe sei m.
72. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel (Masse m, Radius r) in bezug auf eine durch den Kugelmittelpunkt verlaufende Achse.
73. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe von der Gestalt eines Quadrats mit einer Seitenlänge $a = 0{,}1$ m und der Masse $m = 2$ kg in bezug auf eine Achse, die seine Diagonale ist.
74. Am Rande einer homogenen Halbkugel mit dem Gewicht $G = 10$ kp, die in Bild 56 auf einer horizontalen Ebene liegt, ist ein Körper vom Gewicht $Q = 5$ kp befestigt. Welcher Auslenkwinkel φ stellt sich im Gleichgewichtsfall ein?

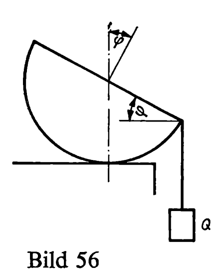


Bild 56

75. Auf einer schiefen Ebene, die unter dem Winkel $\varphi = 10°$ gegen die Horizontale geneigt ist, steht ein Kreiszylinder mit einem Radius $r = 0{,}05$ m. Wie groß darf die Höhe des Zylinders maximal sein, damit er nicht umkippt?
76. An eine Wand ist eine Leiter gelehnt. Der Reibungskoeffizient der Leiter bezüglich der Wand ist $\mu_1 = 0{,}4$, der Reibungskoeffizient der Leiter, bezogen auf die waagerechte Unterlage $\mu_2 = 0{,}5$. Wie groß kann der minimale Winkel sein, den die Leiter mit dem waagerechten Fußboden einschließt, damit diese noch nicht wegrutscht, wenn wir voraussetzen, daß sich der Schwerpunkt der Leiter in ihrem Mittelpunkt befindet?
77. Eine homogene kreisförmige Scheibe (Radius $r = 0{,}3$ m, Masse $m = 60$ kg) wird bei ihrer Drehbewegung um eine zur Scheibenebene senkrecht gerichtete und durch den Scheibenmittelpunkt verlaufende Achse der Einwirkung äußerer Kräfte ausgesetzt, deren Moment eine konstante Komponente in Richtung der Drehachse mit einem Wert $M = 0{,}01$ kpm hat. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung der Drehbewegung der Scheibe sowie die Arbeit, die die äußeren Kräfte während der ersten drei Minuten der Scheibendrehung verrichten, wenn die Scheibe in der Zeit $t = 0$ in Ruhe war.
78. Berechnen Sie bei einer Vorrichtung (Bild 57) die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung, bei der die Abweichung der Stange mit einer Länge $l_0 = 1$ m

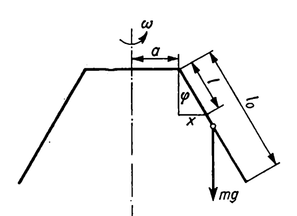


Bild 57

von der senkrechten Richtung $\varphi = 30°$ beträgt, wenn die Länge $a = 1$ m ist.

79. Berechnen Sie die kinetische Energie eines zylindrischen Körpers mit einem Radius $r = 0{,}08$ m und einer Masse $m = 1{,}5$ kg zur Zeit $t = 5$ s, wenn sich dieser Körper um seine Längsachse mit einer konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = \pi/8\ \mathrm{s}^{-2}$ dreht und wenn sich der Körper in der Zeit $t = 0$ in Ruhe befand.
80. Mit welcher konstanten Winkelgeschwindigkeit dreht sich eine homogene Vollkugel (Masse $m = 5$ kg, Radius $r = 0{,}1$ m) um ihren Durchmesser, wenn ihre Bewegungsenergie $W_k =$ $= 0{,}01$ kpm beträgt?
81. Eine Stange mit einer Länge $l = 1$ m ist so befestigt, daß sie sich um eine durch den Endpunkt der Stange verlaufende Achse drehen kann (Bild 58). Welche Geschwindigkeit müssen wir dem freien

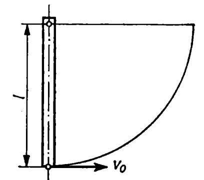


Bild 58

Endpunkt der Stange verleihen, damit er bei seiner Auslenkung von der Gleichgewichtslage die durch die Drehachse verlaufende waagerechte Ebene erreicht?
82. Ein Körper mit der Form eines kreisförmigen Reifens mit einer Masse $m = 10$ kg, einem Außendurchmesser $d = 1$ m und einer vernachlässigbaren Dicke rollt ohne Rutschbewegung auf einer schiefen Ebene, die mit der waagerechten Ebene den Winkel $\varphi = 30°$ einschließt. Ermitteln Sie, durch welche Geschwindigkeit der Schwerpunkt des Reifens nach dem Durchlaufen einer Bahn $s = 5$ m gekennzeichnet ist, wenn am Anfangspunkt dieser Bahn die Geschwindigkeit des Reifens gleich Null war.
83. Ein homogener Körper, der die Form eines kreisförmigen Zylinders hat, dreht sich um seine Längsachse. Wie groß ist der Wert des Moments der äußeren Kräfte bezüglich der Drehachse, wenn sich der Wert des Drehimpulses des Körpers bezüglich der Drehachse mit der Zeit ändert, und zwar so, daß er innerhalb von 5 Sekunden vom Nullwert auf den Wert $L = 0{,}157\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ anwächst?
84. Ein Eiskunstläufer dreht sich um seine senkrechte Achse mit einer konstanten Frequenz $f_0 = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, wobei sein Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse $J_0 = 2\ \mathrm{kg\,m^2}$ beträgt. Um welchen Wert verringert sich die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung, wenn er durch das Ausstrecken der Arme sein Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse auf den Wert $J_1 = 2{,}1\ \mathrm{kg\,m^2}$ vergrößert?
85. In welchem Mittelpunktsabstand müssen wir eine homogene kreisförmige Scheibe mit einem Radius $r = 0{,}1$ m befestigen, damit sie als physikalisches Pendel mit einer minimalen Periodendauer schwingt?
86. Eine Stange mit einer Länge $l = 1$ m schwingt als physikalisches Pendel um eine waagerechte Achse, die durch den Endpunkt der Stange verläuft. Ermitteln Sie die reduzierte Länge dieses Pendels.
87. Eine homogene kreisförmige Scheibe mit einer Masse $m = 4$ kg, einem Radius $r = 0{,}1$ m und einer vernachlässig-

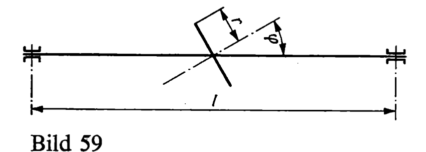


Bild 59

baren Dicke dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi\,s^{-1}$ um eine Achse, die durch den Mittelpunkt der Scheibe verläuft und mit der geometrischen Achse der Scheibe den Winkel $\varphi = 30°$ einschließt (Bild 59). Die mechanische Achse der Scheibe sei in Lagern angeordnet, die in einem Abstand $l = 0{,}5$ m voneinander entfernt liegen. Berechnen Sie die durch die Zentrifugalkräfte verursachten Druckkräfte, die auf die Lager wirken.

1.4. Elastizität und Festigkeit

Unter **Spannung** σ versteht man den Quotienten aus einer Kraft $\vec{F}$ und der Fläche A, auf welche die Kraft wirkt, d. h.

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

Die Spannung σ kann man zerlegen in eine Normalkomponente, die in einem gegebenen Punkt parallel zur Flächennormalen von A verläuft, und in eine Tangentialkomponente, die im gegebenen Punkt in die Tangentialebene zu A fällt. Die Normalspannung bezeichnen wir als Zug oder Druck, je nachdem, wie die wirkende Normalspannung bezüglich der Fläche, auf die sie wirkt, orientiert ist.
Im Bereich der sog. vollkommenen Elastizität besteht ein Zusammenhang zwischen den herrschenden Kräften und den durch sie hervorgerufenen Deformationen, der durch das **Hookesche Gesetz** beschrieben wird. Es besagt folgendes:
Die Deformation elastischer Körper ist den angreifenden Kräften proportional und umgekehrt.
Im Falle, daß eine Zugdeformation an einer Stange oder einem Draht der ursprünglichen Länge l_0 vorliegt, kann das HOOKEsche Gesetz mathematisch durch die Beziehung

$$\sigma = E\varepsilon$$

ausgedrückt werden (σ Normalspannung, $\varepsilon = \Delta l/l_0$ sog. relative Dehnung, E sog. Zugelastizitätsmodul, der eine Stoffkonstante ist). Ferner ist $\Delta l = l - l_0$ die Gesamtverlängerung von Stab oder Draht bei der Deformation. Eine Verlängerung des Stabes wird von einer Verringerung seines Querschnitts begleitet. Für die relative Verkürzung seiner Querdimension

$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0}$$

(a_0 Größe vor, a Größe nach der Deformation) gilt

$$\eta = \frac{1}{\mu}\varepsilon = \frac{\sigma}{\mu E}.$$

μ ist die POISSONsche Konstante.
Für die *Druckdeformation* eines Stabes gelten analoge Beziehungen. Hierbei treten aber andere Verformungen auf: Verkürzung der Länge und Vergrößerung der Querschnittsfläche.
Wenn eine *Schubbeanspruchung* elastischer Körper vorliegt, wenn z. B. ein rechtwinkliges Prisma mit den Kanten a, b und c an seiner Grundfläche mit den Kanten a und b befestigt ist und wenn an seiner oberen Begrenzungsfläche eine Tangentialspannung der Größe τ angreift, kann man das HOOKEsche Gesetz durch die Beziehung

$$\tau = G\gamma$$

ausdrücken, in der γ die relative Verschiebung der oberen Begrenzungsfläche des Prismas hinsichtlich seiner (fixierten) Grundfläche und G der sog. *Schubmodul* ist.
Zwischen den Materialkonstanten E, G und μ besteht der Zusammenhang

$$G = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)} .$$

Wenn ein Stab der Länge l in horizontaler Stellung einseitig an einer festen Wand eingespannt ist und an seinem freien Ende mit einer vertikalen Kraft F belastet wird, gilt für die Abweichung h des freien Endes aus seiner ursprünglichen Lage

$$h = \frac{Fl^3}{3\,EI} ,$$

wobei I das sog. *Flächenträgheitsmoment* des Stabquerschnitts in bezug auf seine Biegeachse ist.
Wenn ein horizontal gelagerter Stab an beiden Enden gestützt ist und in der Mitte zwischen den beiden Unterstützungspunkten von einer vertikal gerichteten Kraft F belastet wird, weicht die Stabmitte aus ihrer ursprünglichen Stellung um den Betrag

$$h = \frac{Fl^3}{48\,EI}$$

ab.
Wenn ein zylindrischer Stab mit der Länge l und dem Radius r an einer seiner beiden Grundflächen befestigt ist und an seinem freien Ende durch Kräfte belastet wird, deren Moment in bezug auf die geometrische Achse des Stabes den Wert M annimmt, dann gilt für den Drehwinkel φ, um den sich der Stab verdreht, die Beziehung

$$\varphi = \frac{2\,lM}{\pi G r^4} .$$

Da der Schubmodul G auch bei einer Verdrehung wirksam ist, wird er auch als *Torsionsmodul* bezeichnet.

B Beispiele

77. Ein Draht der ursprünglichen Länge $l_0 = 10$ m ist an einem Ende befestigt und wird an seinem anderen durch eine Kraft $F = 20$ kp in Längsrichtung gespannt, wobei er eine Längenänderung um den Betrag $\Delta l = 0{,}4$ cm erfährt. Ermitteln Sie den ursprünglichen Durchmesser des Drahtes sowie seine Änderung bei der Streckung, wenn der Elastizitätsmodul des Drahtes $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2} und sein Schubmodul $G = 0{,}75 \cdot 10^6$ kp cm^{-2} beträgt.

Lösung

Entsprechend dem Hookeschen Gesetz ist der Zusammenhang zwischen relativer Verlängerung und Spannung durch die Beziehung

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad \frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

gegeben, so daß wir finden

$$A = \pi r_0^2 = \frac{Fl_0}{\Delta l E}.$$

Für den gesuchten Durchmesser ergibt sich dann

$$d = 2r_0 = 2\sqrt{\frac{Fl_0}{\pi \Delta l E}} = 2\sqrt{\frac{20\ \text{kp} \cdot 1000\ \text{cm}}{\pi \cdot 0{,}4\ \text{cm} \cdot 2 \cdot 10^6\ \text{kp cm}^{-2}}} = \underline{0{,}178\ \text{cm.}}$$

Die relative Verringerung des Durchmessers hängt mit der relativen Verlängerung gemäß der Beziehung

$$\eta = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{1}{\mu}\varepsilon$$

zusammen, wobei μ die Poissonsche Konstante ist, die mit E und G gemäß der Beziehung

$$G = \frac{E}{2(\mu + 1)}$$

verknüpft ist. Daraus folgt:

$$\mu = \frac{2G}{E - 2G} = \frac{2 \cdot 0{,}75 \cdot 10^6\ \text{kp cm}^{-2}}{(2 - 1{,}5)\ 10^6\ \text{kp cm}^{-2}} = 3.$$

Es ist also

$$\eta = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Damit ergibt sich die Durchmesserverringerung zu

$$\Delta d = \frac{1}{3}\,\varepsilon d_0 = \frac{1}{3}\,\frac{0{,}4}{1000}\,0{,}178\ \text{cm} = \underline{2{,}37 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}.}$$

78. Wie groß ist die Verlängerung eines Stabes der Länge l und der Querschnittsfläche A unter dem Einfluß seines Eigengewichts, wenn er an einem Ende befestigt ist und wenn seine Dichte ϱ und sein Elastizitätsmodul E gegeben sind?

Lösung

In Bild 60 wird jedes Stabelement dx durch das Gewicht des unter ihm hängenden Stabteils gespannt. Für die Verlängerung des Stabelements dx gilt dann

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{1}{E}\,\frac{\varrho A g x}{A}\,\mathrm{d}x = \frac{\varrho g}{E}\,x\,\mathrm{d}x.$$

Bild 60

Die Gesamtverlängerung ist durch die Summe der Verlängerungen aller einzelnen Stabelemente gegeben, so daß wir finden

$$\Delta l = \frac{\varrho g}{E}\int_0^l x\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{\varrho g}{E}\,\frac{l^2}{2}}\,.$$

79. Wie groß ist die Volumenänderung eines prismatischen Eisenstabes mit den ursprünglichen Maßen $a_0 = 1$ m, $b_0 = c_0 = 0{,}1$ m, wenn der Stab in seiner Längsrichtung mit einer Zugspannung $\sigma = 1000$ kp cm^{-2} belastet wird? Der Elastizitätsmodul des Eisens, aus dem der Stab gefertigt wurde, ist $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2} und sein Schubmodul $G = 0{,}75 \cdot 10^6$ kp cm^{-2}.

Lösung

Das ursprüngliche Stabvolumen ist

$$V_0 = a_0 b_0 c_0\,.$$

Die einzelnen Abmessungen ändern sich durch die Belastung wie folgt:

$$a = a_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right); \quad b = c = b_0\left(1 - \frac{\sigma}{\mu E}\right).$$

Für das Volumen finden wir also nach der Deformation

$$V = abc = a_0 b_0 c_0 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)\left(1 - \frac{\sigma}{\mu E}\right)^2 = V_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)\left(1 - \frac{2\sigma}{\mu E} + \frac{\sigma^2}{\mu^2 E^2}\right) =$$

$$= V_0\left(1 - \frac{2\sigma}{\mu E} + \frac{\sigma^2}{\mu^2 E^2} + \frac{\sigma}{E} - \frac{2}{\mu}\,\frac{\sigma^2}{E^2} + \frac{1}{\mu^2}\,\frac{\sigma^3}{E^3}\right) =$$

$$= V_0\left(1 + \frac{\sigma}{E} - \frac{2\sigma}{\mu E}\right) = V_0\left[1 + \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)\right].$$

Das ist dann der Fall, nachdem wir diejenigen Ausdrücke vernachlässigt haben, die mit den kleinen Größen höherer Ordnung σ^2/E^2 und σ^3/E^3 multipliziert wurden.
Für die Volumenänderung ergibt sich damit

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{V_0 \sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right) = a_0 b_0 c_0 \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right).$$

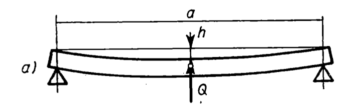
Da für die POISSONsche Konstante gilt

$$G = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)}, \quad \text{d. h.} \quad \mu = \frac{2G}{E - 2G} = \frac{2 \cdot 0{,}75 \cdot 10^6 \text{ kp cm}^{-2}}{(2 - 1{,}5)\, 10^6 \text{ kp cm}^{-2}} = 3,$$

erhalten wir

$$\Delta V = 100 \text{ cm} \cdot 10^2 \text{ cm}^2 \frac{10^3 \text{ kp cm}^{-2}}{2 \cdot 10^6 \text{ kp cm}^{-2}}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \underline{1{,}667 \text{ cm}^3.}$$

80. Ein Metallrohr der Länge a, dem Innenradius r_i und dem Außenradius r_a ist in waagerechter Lage an beiden Enden befestigt und wird in der Mitte durch einen Körper vom Gewicht Q belastet. Wie groß wird die Durchbiegung des Rohres in seiner Mitte, wenn der Elastizitätsmodul E des Rohrmaterials gegeben ist?



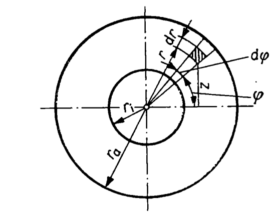


Bild 61

Lösung

Für die Durchbiegung des an beiden Enden eingespannten Rohres (Bild 61 a) gilt:

$$h = \frac{Qa^3}{48EI},$$

wobei

$$I = \int z^2 \, \mathrm{d}A$$

das Flächenträgheitsmoment des Rohrquerschnitts in bezug auf die Biegeachse ist. Da $z = r \sin \varphi$ und $\mathrm{d}A = r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r$ (Bild 61 b) ist, finden wir

$$I = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{r_a^4 - r_i^4}{4}\left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin^2 \varphi\right]_0^{2\pi} = \pi \frac{r_a^4 - r_i^4}{4}.$$

Für die gesuchte Durchbiegung der Rohrmitte ergibt sich also

$$h = \frac{Qa^3}{48E\pi \frac{r_a^4 - r_i^4}{4}} = \underline{\frac{Qa^3}{12E\pi\,(r_a^4 - r_i^4)}}.$$

81. Ein zylindrischer Eisenstab (Länge $l = 0{,}5$ m, Durchmesser $d = 0{,}005$ m) ist an einem Ende befestigt und am anderen mit einem Rad vom Radius $r = 0{,}2$ m versehen (Bild 62). Welche Tangentialkraft muß am Radumfang angreifen, damit der Durchmesser des Stabes am Radende gegenüber dem Festende um den Drehwinkel $\varphi = 15°$ verdreht wird? Der Torsionsmodul des verwendeten Materials betrage $G = 0{,}73 \cdot 10^6$ kp cm^{-2}.

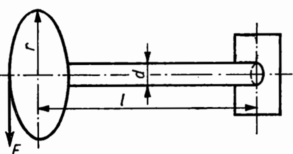


Bild 62

Lösung

Der Drehwinkel φ hängt mit dem Moment der Kräfte, welche die Verdrehung verursachen, gemäß der Beziehung

$$M = \frac{\pi G}{2} \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4}{l} \varphi$$

zusammen. Dabei ist $M = Fr$, so daß für die gesuchte Kraft gefunden wird

$$F = \frac{\pi G d^4 \varphi}{32 l r} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}73 \cdot 10^6 \text{ kp cm}^{-2} \cdot 0{,}0625 \text{ cm}^4}{32 \cdot 50 \cdot 20 \text{ cm}^2} \cdot \frac{15\pi}{180} = \underline{1{,}17 \text{ kp.}}$$

82. Eine Kreisplatte der Masse $m = 2$ kg und mit einem Radius $r = 0{,}1$ m schwingt als Torsionspendel an einem Eisendraht der Länge $l = 1$ m und mit dem Durchmesser $d = 0{,}002$ m. Bestimmen Sie den Torsionsmodul des Materials, aus dem der Draht besteht, nachdem experimentell gefunden wurde, daß die Periodendauer des Torsionspendels $T = 1{,}9$ s beträgt.

Lösung

Für die Periodendauer dieses Pendels gilt die Beziehung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M_0}}$$

(J Trägheitsmoment der Kreisscheibe in bezug auf die Rotationsachse, M_0 sog. Direktionsmoment). M_0 hängt mit dem Torsionsmodul sowie den Abmessungen des

Drahtes folgendermaßen zusammen:

$$M_0 = \frac{\pi G}{2} \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4}{l}.$$

Daraus können wir das gesuchte G erhalten

$$G = \frac{32\, l M_0}{\pi d^4}.$$

Da das Direktionsmoment M_0 mit einer Schwingung des Torsionspendels durch die Beziehung

$$M_0 = \frac{4\pi^2 J}{T^2}$$

ausgedrückt werden kann, finden wir schließlich

$$G = \frac{32 l}{\pi d^4} \frac{4\pi^2}{T^2} J = \frac{32 l}{\pi d^4} \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{1}{2} m r^2 = \frac{64 \pi m l r^2}{d^4 T^2} =$$

$$= \frac{64 \cdot 3{,}14 \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 10^2\,\mathrm{cm} \cdot 10^2\,\mathrm{cm}^2}{16 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^4 \cdot 1{,}9^2\,\mathrm{s}^2} = 6{,}96 \cdot 10^6 \,\frac{\mathrm{kg\,m\,s}^{-2}}{\mathrm{cm}^2} =$$

$$= \underline{0{,}709 \cdot 10^6\,\mathrm{kp\,cm}^{-2}}.$$

83. Welche Länge müßte ein Eisendraht haben, damit er unter der Wirkung seines eigenen Gewichts zerreißt, wenn er an einem Ende fest aufgehängt ist? Die Dichte des Eisens sei $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m}^{-3}$, die Festigkeitsgrenze liege bei $3200\,\mathrm{kp\,cm}^{-2}$.

Lösung

Auf die verschiedenen übereinanderliegenden Querschnitte des Drahtes wirken unterschiedliche Kräfte; auf jeden Querschnitt wirkt das Gewicht des darunterhängenden Drahtteils. Die kleinste Kraft wirkt demnach auf den Querschnitt am unteren, die größte auf den am oberen, am Aufhängungsende. Die größte Spannung, unter welcher der Draht gerade noch nicht reißt, erfüllt die Bedingung

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 3200\,\mathrm{kp\,cm}^{-2}.$$

Es ist aber $Q = \varrho g A l$, so daß wir finden

$$l = \frac{3200\,\mathrm{kp\,cm}^{-2}}{7{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m}^{-3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s}^{-2}} = \underline{4{,}102\,\mathrm{km}}.$$

Der Draht zerreißt, wenn seine Länge größer als 4,102 km ist.

A Aufgaben

88. Ein Stahldraht von der ursprünglichen Länge $l_0 = 2$ m und mit dem Durchmesser $d = 0{,}002$ m ist an einem Ende befestigt und wird am anderen Ende durch eine Kraft F in Längsrichtung belastet. Wie groß muß diese Kraft F sein, damit der Draht eine Verlängerung um 0,003 m erfährt, wenn sein Elastizitätsmodul $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2} beträgt?
89. Ein Eisenstab von der ursprünglichen Länge $l_0 = 2$ m und mit dem Querschnitt $A = 10^{-4}$ m^2 ist an einem Ende befestigt und wird am anderen Ende durch die Kraft $F = 1000$ kp auf Zug beansprucht. Welche Länge hat der Stab nach seiner Streckung, wenn der Elastizitätsmodul des Eisens mit $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2} angegeben wird?
90. Ein zylindrisches Metallrohr von der ursprünglichen Länge $l_0 = 2$ m, dem ursprünglichen Außendurchmesser $d = 0{,}2$ m und einer Wanddicke $s = 0{,}02$ m wird durch eine Normalkraft $F = 3000$ kp auf Druck beansprucht. Ermitteln Sie die Normalspannung, die am Rohrquerschnitt angreift, sowie den Betrag der Rohrverkürzung, wenn der Elastizitätsmodul des verwendeten Materials mit $E = 1{,}2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2} angegeben wird.
91. Um welchen Betrag würde sich ein Stahlseil der Länge $l_0 = 9000$ m verlängern, wenn es, unter der Wirkung seines Eigengewichts stehend, frei hängend in Meerwasser hinabgelassen wird? Die Dichte des Meerwassers sei $\varrho_1 = 1{,}03 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, die des Seilmaterials $\varrho_2 = 7{,}7 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, der Elastizitätsmodul $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2}.
92. Ein zylindrischer Stab der ursprünglichen Länge l_0 ist an einem Ende befestigt und wird an seinem anderen Ende durch eine in Längsrichtung angreifende Kraft F beansprucht. Um welchen Betrag ändert sich das Stabvolumen bei der Deformation, wenn der Elastizitätsmodul mit der Größe E angegeben wird?
93. Ein Eisenstab von der Form eines Quaders mit den ursprünglichen Abmessungen $a_0 = 0{,}5$ m, $b_0 = 0{,}1$ m, $c_0 = 0{,}05$ m wird einem allseitig wirkenden, gleichförmigen Normaldruck von der Größe $\sigma = 10$ kp cm^{-2} unterworfen. Um welchen Betrag verringert sich das Volumen des Quaders nach der Deformation, wenn der Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2} und der Schubmodul $G = 0{,}73$ kp cm^{-2} groß ist?
94. Ein zylindrischer Eisenstab mit der Länge $l = 1$ m und dem Radius $r = 0{,}02$ m ist an seinem Ende so befestigt, daß er eine waagerechte Stellung einnimmt. Mit welcher Kraft muß man an seinem anderen Ende senkrecht zur Stabrichtung einwirken, damit sich dieses Ende durch Biegung um den Betrag $h = 0{,}005$ m gegenüber der ursprünglichen Lage verschiebt? Der Elastizitätsmodul des Stabes sei $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2}.
95. Ein Holzstab von rechteckigem Querschnitt mit den Seitenlängen $a = 0{,}05$ m und $b = 0{,}005$ m wird in zwei Punkten gestützt, die $l = 1$ m auseinander liegen. Die Seitenlänge a liegt in der Horizontalen. Um welchen Betrag senkt sich die Stabmitte im Vergleich zur ursprünglichen Lage, wenn wir den Stab in seiner Mitte mit einer Last $Q = 1$ kp beanspruchen? Das verwendete Holz habe einen Elastizitätsmodul von $E = 1{,}2 \cdot 10^5$ kp cm^{-2}.
96. Ein zylindrischer Stahlstab (Länge $l = 0{,}5$ m, Radius $r = 0{,}01$ m) ist an einem Ende befestigt, am anderen wird

er durch Kräfte verdreht, deren mit der Zylinderachse zusammenfallendes Moment mit M bezeichnet sei. Welchen Betrag muß das Moment M aufweisen, damit die Verdrehung der Zylinderdeckfläche gegenüber der Grundfläche einen Drehwinkel $\varphi = 1°$ annimmt? Der Torsionsmodul des Zylinders habe die Größe $G = 0{,}75 \cdot 10^6$ kp cm^{-2}.

97. Ermitteln Sie die Periodendauer eines Torsionspendels, das durch eine Kreisplatte mit der Masse $m = 3$ kg und dem Radius $r = 0{,}1$ m gebildet wird, welche an einem Draht (Länge $l = 1{,}2$ m, Radius $r_D = 0{,}001$ m) aufgehängt ist. Der Torsionsmodul des Drahtes hat den Wert $G = 0{,}73 \cdot 10^6$ kp cm^{-2}.

98. Welcher Belastung hält eine Granitplatte von der Form eines regelmäßigen Sechsecks mit der Kantenlänge $a = 0{,}1$ m stand, wenn die zulässige Druckbeanspruchung für Granit mit 50 kp cm^{-2} angenommen wird?

99. Wie groß muß der Radius eines Kupferdrahtes sein, damit er unter Einfluß der in seiner Längsrichtung wirkenden Kraft $F = 50$ kp nicht zerreißt? Die Zerreißfestigkeit des Kupfers wird mit 2000 kp cm^{-2} angenommen.

1.5. Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

Eine Flüssigkeit wird dann als ideal bezeichnet, wenn sie inkompressibel ist und wenn in ihr keine innere Reibung wirkt.

Die Grundgleichung der Hydrostatik wird durch die Beziehung

$$\varrho U + p = \text{const} \tag{1}$$

für eine inkompressible Flüssigkeit angegeben. In dieser Gleichung bedeutet ϱ die Dichte, $U = gh$ das Potential des Kräftefeldes, in dem sich die Flüssigkeit befindet, und p den Druck, der in der Flüssigkeit herrscht. Gl. (1) besagt:

In einer im Ruhezustand befindlichen inkompressiblen Flüssigkeit ist die Summe aus potentieller Energie ihres Volumens und Druck an allen Stellen gleich groß.

Wenn auf eine Flüssigkeit ein größerer Druck wirkt und wenn diese Flüssigkeit keinen allzu großen Raum einnimmt, kann in Gl. (1) das Glied ϱU bei der Druckangabe vernachlässigt werden. Dadurch vereinfacht sich Gl. (1) auf die Form

$$p = \text{const},$$

d. i. das **Pascalsche Gesetz** über die gleichmäßige Verteilung des Drucks in Flüssigkeiten.

Der Druck in einer Tiefe h unter der Oberfläche einer Flüssigkeit der Dichte ϱ, der vom Eigengewicht der Flüssigkeit verursacht wird, ist durch die Beziehung

$$p = \varrho h g$$

gegeben (g Fallbeschleunigung).

Ein Körper, der in ein flüssiges Medium (Flüssigkeit, Gas) eintaucht, unterliegt dem

Auftrieb, der nach dem **Archimedischen Gesetz** dem Gewicht derjenigen Flüssigkeitsmenge gleich ist, die vom eintauchenden Körper verdrängt wird.
Die Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit, die unter der Wirkung ihres Eigengewichts aus der Öffnung eines Gefäßes ausfließt, ist durch die **Torricellische Ausflußformel** gegeben zu

$$v = \sqrt{2gh},$$

wobei h den Abstand der Ausströmöffnung von der Flüssigkeitsoberfläche darstellt. Beim Ausströmen füllt die Flüssigkeit nicht den gesamten Öffnungsquerschnitt aus. Der ausströmende Flüssigkeitsstrahl erleidet eine Verengung. Für die Flüssigkeitsmenge $\mathrm{d}V$, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ durch den Öffnungsquerschnitt A austritt, gilt die Beziehung

$$\mathrm{d}V = \mu A v \,\mathrm{d}t,$$

wobei μ der sog. Verengungskoeffizient des ausströmenden Flüssigkeitsstrahls ist.
Beim stationären Strömen einer idealen Flüssigkeit durch ein Rohr wird durch jeden Querschnitt des Rohres in der Zeiteinheit die gleiche Flüssigkeitsmenge transportiert, so daß sich die **Kontinuitätsgleichung** ergibt

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

(A_1 und A_2 zwei unterschiedliche Querschnittsflächen des Rohres, v_1 und v_2 die bereffenden Strömungsgeschwindigkeiten).
Bei der stationären, wirbelfreien Strömung einer idealen Flüssigkeit ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie einer Volumeneinheit der Flüssigkeit und des Druckes an allen Stellen gleich, so daß sich die **Bernoullische Gleichung** ergibt

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho V + p = \text{const.}$$

Wenn sich in einer Flüssigkeit mit der inneren Reibung (Viskosität) η ein kugelförmiger Körper vom Radius r bewegt, dann ist die Widerstandskraft F_W, welche die Flüssigkeit der Körperbewegung entgegensetzt, nach dem **Stokesschen Gesetz** durch die Beziehung

$$F_\mathrm{W} = 6\pi\eta r v$$

gegeben, in der v die Geschwindigkeit des Körpers gegenüber der umgebenden Flüssigkeit darstellt.
Wenn wir in eine Flüssigkeit, die sich in einem weiten Gefäß befindet, ein enges Rohr mit kreisförmigem Querschnitt, eine Kapillare, senkrecht eintauchen, dann nimmt der Flüssigkeitsspiegel in der Kapillare eine andere Höhe als in der umgebenden Flüssig-

keit an. Die die Wandung der Kapillare benetzende Flüssigkeit (z. B. Wasser in Glaskapillare) steigt unter der Wirkung einer *Oberflächenspannung* in der Kapillare über die Höhe im umgebenden Gefäß. Es tritt *Kapillaraszension* ein. Die Flüssigkeitsoberfläche in der Kapillare ist konkav gekrümmt, es ist ein Flüssigkeitsmeniskus. Wenn aber eine Flüssigkeit die Wandung der Kapillare nicht benetzt (z. B. Quecksilber in Glas), dann liegt der Flüssigkeitsspiegel innerhalb der Kapillare unter derjenigen in der umgebenden Flüssigkeit, es besteht *Kapillardepression*, der Meniskus ist konvex. Für die Differenz der Flüssigkeitshöhen h innerhalb der Kapillare und der umgebenden Flüssigkeit gilt bei Kapillaraszension bzw. bei Kapillardepression die Beziehung

$$\varrho g h = \frac{2\varepsilon}{r'}$$

(ϱ Dichte der Flüssigkeit, r' Radius des Meniskus, ε Oberflächenspannung der Flüssigkeit).

B Beispiele

84. Um welchen Winkel weicht der Flüssigkeitsspiegel in einem Tankwagen von der Horizontalen ab, wenn dieser mit einer Verzögerung von $a = 5 \text{ m s}^{-2}$ gebremst wird?

Lösung

Setzen wir einmal voraus, daß sich der Tankwagen (Bild 63) in Richtung des Pfeils bewegt. Wenn wir uns auf den Standpunkt eines fest mit dem Wagen verbundenen Bezugssystems stellen, befinden wir uns in einem nichtinertialen System, und die resultierende Kraft $\vec{F}'$, die auf ein beliebiges Flüssigkeitsteilchen wirkt, setzt sich aus der Gewichtskraft und der Trägheitskraft zusammen, so daß gilt

$$\vec{F}' = \vec{G} + \vec{F}.$$

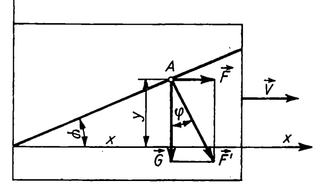


Bild 63

Bezüglich dieses nichtinertialen Systems ist $|\vec{F}| = ma$, wobei m die Masse eines beliebigen Flüssigkeitsteilchens und a die Verzögerung des Tankwagens ist. Die Richtung von $\vec{F}$ ist der Verzögerung des Wagens entgegen gerichtet. Im angeführten Bezugssystem befindet sich die Flüssigkeit in Ruhe, und wir können gemäß der Grundgleichung der Hydrostatik wie folgt schreiben:

$$\varrho U + p = \text{const.}$$

Da an jeder Stelle der Flüssigkeitsoberfläche der Druck p den gleichen Wert hat, kann man für die Flüssigkeitsoberfläche ebenfalls schreiben

$$U = \text{const},$$

wobei U das Potential der Kräfte darstellt, die auf die Flüssigkeit wirken, d. h. die Summe des aus der Gewichtskraft G und der Trägheitskraft F zusammengesetzten Potentials. Wenn wir Gewicht und Trägheitskraft auf den Ursprung des gewählten Koordinatensystems beziehen, dann ist das Gesamtpotential im Punkt A durch die Beziehung

$$U = gy - ax = \text{const}$$

gegeben. Für $x = 0$ und $y = 0$ ist auch const $= 0$. Wir erhalten also

$$gy - ax = 0, \quad \text{d. h.,} \quad y = \frac{a}{g}\,x. \tag{1}$$

Der Flüssigkeitsspiegel stabilisiert sich in einer Ebene, deren Schnittlinie mit der senkrechten Ebene, die in die Bewegungsrichtung des Wagens fällt, eine Gerade mit de- Gl. (1) darstellt. Ihre Richtung wird durch den Winkel φ bestimmt, um den der Flüssigkeitsspiegel bei dieser Bremsung von der Horizontalen abweicht:

$$\tan\varphi = \frac{a}{g} = \frac{5\ \text{m s}^{-2}}{9{,}81\ \text{m s}^{-2}} = 0{,}5097, \quad \text{d. h.,} \quad \underline{\varphi = 27°}.$$

85. In einem zylindrischen Gefäß mit dem Radius r befindet sich eine Flüssigkeit. Das Gefäß dreht sich um seine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω (Bild 64). Ermitteln Sie, in welcher Form sich die Flüssigkeitsoberfläche im rotierenden Gefäß stabilisiert und um welchen Betrag der Flüssigkeitsspiegel in der Gefäßmitte gegenüber seiner Ruhelage abgesenkt wird.

Lösung

Wenn wir uns auf den Standpunkt eines nichtinertialen Bezugssystems stellen, das mit dem Gefäß verbunden ist, dann befindet sich gegenüber diesem Bezugssystem auch während der Drehbewegung die Flüssigkeit in Ruhe. Aus der Grundgleichung der Hydrostatik erfahren wir

$$\varrho U + p = \text{const}.$$

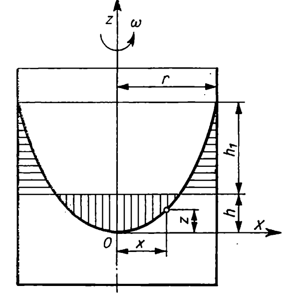


Bild 64

Da an allen Stellen der Flüssigkeitsoberfläche der gleiche, z. B. der atmosphärische Druck besteht, ergibt sich p =const, und deshalb muß für die Flüssigkeitsoberfläche in jedem Punkt das Gesamtpotential der auf sie wirkenden Kräfte konstant sein gemäß

$$U = k,$$

wobei k eine Konstante darstellt.

Das Gesamtpotential ist in diesem Falle durch die Summe der Potentiale des Gewichts und der Zentrifugalkraft gegeben. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen in Bild 64 kann deshalb geschrieben werden

$$gz - \frac{\omega^2 x^2}{2} = k,$$

denn das Potential der Zentrifugalkraft, bezogen auf den Ursprung des gewählten Koordinatensystems, ist

$$U_0 = -\int_0^x \omega^2 x \, dx = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2,$$

woraus wir für z erhalten

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 x^2}{g} + \frac{k}{g}.$$

Die Flüssigkeitsoberfläche im rotierenden Zylinder wird die Form eines Rotations-Paraboloids annehmen. Wenn wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt des Paraboloids legen, dann ist für $x = 0$ auch $z = 0$ und damit $k = 0$, und die Gleichung der Parabel, die sich als Schnitt einer senkrechten, durch den Ursprung verlaufenden Ebene mit dem Paraboloid ergibt, nimmt die Form

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} x^2$$

an. Das Maß, um das der Flüssigkeitsspiegel durch Rotation in der Gefäßmitte absinkt, erhalten wir aus der Bedingung, daß die Flüssigkeitsmenge im senkrecht schraffierten Teilvolumen gleich der im waagerecht schraffierten ist. Für das senkrecht schraffierte Teilvolumen gilt

$$V_1 = \int_0^h \pi x^2 \, dz = \int_0^{\sqrt{2\frac{g}{\omega^2}h}} \pi \frac{\omega^2}{g} x^3 \, dx = \pi \frac{\omega^2}{g}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2\frac{g}{\omega^2}h}} = \pi \frac{g}{\omega^2} h^2.$$

Für das waagerecht schraffierte Teilvolumen ergibt sich

$$V_2 = \int_0^{h_1} (\pi r^2 - \pi x^2)\, dz = \int_{\sqrt{2\frac{g}{\omega^2}h}}^{r} \left(\pi r^2 \frac{\omega^2}{g} x - \pi \frac{\omega^2}{g} x^3\right) dx =$$

$$= \left[\pi r^2 \frac{\omega^2}{g}\frac{x^2}{2} - \pi \frac{\omega^2}{g}\frac{x^4}{4}\right]_{\sqrt{2\frac{g}{\omega^2}h}}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \pi r^2 h + \pi \frac{g}{\omega^2} h^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \pi r^2 h + \pi \frac{g}{\omega^2} h^2.$$

Da die Teilvolumina gleich groß sind, ergibt sich $V_1 = V_2$, d. h.,

$$\pi r^2 h = \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4$$

oder

$$h = \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{g} r^2.$$

86. Mit welcher Kraft wirkt der Wasserinhalt auf die rechteckige Seitenwand eines Gefäßes (Breite $a = 0{,}2$ m, Höhe $b = 0{,}15$ m), wenn das Gefäß vollständig mit Wasser gefüllt ist?

Lösung

Auf ein Flächenelement $\mathrm{d}A = a\,\mathrm{d}x$ in einer Tiefe x unter dem Flüssigkeitsspiegel (Bild 65) wirkt die Kraft

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}A = \varrho g x a\,\mathrm{d}x,$$

wobei ϱ die Wasserdichte bedeutet. Für die Gesamtkraft, die auf die Seitenfläche wirkt, ergibt sich

$$F = \varrho g a \int_0^b x\,\mathrm{d}x = \varrho g a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2} \varrho g a b^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, 1\ \mathrm{g\,cm^{-3}} \cdot 981\ \mathrm{cm\,s^{-2}} \cdot 20\ \mathrm{cm} \cdot 225\ \mathrm{cm^2} = 22{,}1 \cdot 10^5\ \mathrm{dyn} = 22{,}1\ \mathrm{N}.$$

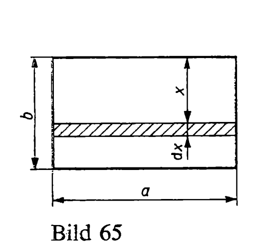


Bild 65

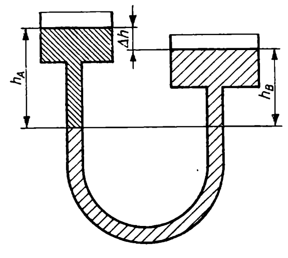


Bild 66

87. Zwei Gefäße sind miteinander verbunden (Bild 66), beide sind oben offen und mit nichtmischbaren Flüssigkeiten der Dichten $\varrho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ und $\varrho_2 = 1 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ gefüllt. Wie groß ist der Abstand der beiden Flüssigkeitsspiegel in den einzelnen Schenkeln von der gemeinsamen Trennungslinie, wenn die Spiegelhöhendifferenz in beiden kommunizierenden Gefäßen $\Delta h = 0{,}1$ m beträgt?

Lösung

Für den Gleichgewichtszustand gilt nach der Grundgleichung der Hydrostatik

$$\varrho U + p = \text{const.}$$

In unserem Fall bedeutet U das Gewichtspotential. Wenn wir es auf die waagerechte Ebene beziehen, die durch die gemeinsame Trennungslinie der beiden Flüssigkeiten verläuft, dann gilt für jede Flüssigkeit in jedem der beiden Schenkel $U = 0$, und demnach müssen die Drücke gleich sein. Mit den in Bild 66 gewählten Bezeichnungen muß demnach gelten

$$b + h_A \varrho_1 g = b + h_B \varrho_2 g,$$

worin b den atmosphärischen Druck bedeutet. Aus Bild 66 ist gleichfalls ersichtlich, daß

$$h_A = h_B + \Delta h,$$

so daß sich ergibt

$$(h_B + \Delta h)\, \varrho_1 g = h_B \varrho_2 g,$$

d. h.,

$$h_B(\varrho_2 - \varrho_1) = \Delta h \varrho_1.$$

Es ist also

$$h_B = \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \Delta h = \frac{0{,}9}{0{,}1}\, 0{,}1\ \mathrm{m} = \underline{0{,}9\ \mathrm{m}}; \quad h_A = \underline{1{,}0\ \mathrm{m}}.$$

88. In einem gasgefüllten Gefäß (Bild 67) soll der Druck mit einem Quecksilbervakuummeter ermittelt werden. Wie groß ist der Gasdruck im Gefäß, wenn die Höhendifferenz des Quecksilbers in den beiden Rohren des Vakuummeters den Wert $h = 0{,}45$ m hat und der atmosphärische Druck $b = 1$ atm beträgt?

Lösung

Analog zum vorangehenden Beispiel müssen in der waagerechten Ebene der Trennlinie von Quecksilber und Luft die Drücke in beiden Schenkeln des Vakuummeters gleich sein. Es gilt also

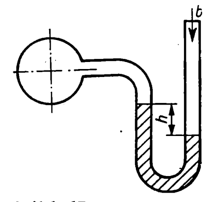


Bild 67

$$p + \varrho g h = b,$$

worin ϱ die Dichte des Quecksilbers bedeutet. Demnach ergibt sich

$$p = b - \varrho g h = 1 \text{ atm} - \frac{45}{76} \text{ atm} = \underline{0{,}41 \text{ atm.}}$$

89. Bestimmen Sie die Abhängigkeit des atmosphärischen Drucks als Funktion der Höhe über der Erdoberfläche unter der Voraussetzung konstanter Temperatur, und berechnen Sie den Druck in einer Höhe $h = 10000$ m über NN, wenn der Druck bei NN $b = 1$ atm beträgt und wenn die Luftdichte unter Normaldruck den Wert $\varrho_0 = 1{,}29 \text{ kg m}^{-3}$ hat.

Lösung

Wir gehen wieder von der Gleichung

$$\varrho U + p = \text{const}$$

aus. Wenn wir das Potential auf die Erdoberfläche beziehen, dann ist in einer Höhe z über der Erdoberfläche $U = gz$, so daß wir finden

$$\varrho g z + p = \text{const.}$$

Durch Ableiten nach z erhalten wir

$$-\varrho g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}.$$

Bei unterschiedlichen Drücken p und p_0 und gleicher Temperatur erfüllen die Gasdichten ϱ und ϱ_0 die Bedingung

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{p}{p_0} \varrho_0,$$

woraus sich ergibt

$$-\frac{p}{p_0} \varrho_0 g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z},$$

und nach Trennung der Variablen folgt

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g \,\mathrm{d}z.$$

Durch Integration der Gleichung

$$\int\limits_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g \int\limits_{0}^{h} \mathrm{d}z$$

erhalten wir

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\varrho_0}{p_0} gh, \quad \text{d. h.,} \quad p = p_0 \exp\left[-\frac{\varrho_0}{p_0} gh\right].$$

Für die in der Aufgabe vorgegebenen Zahlenwerte ergibt sich

$$p = 1\ \text{atm} \cdot \exp\left[-\frac{1{,}29}{0{,}76 \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}\, 9{,}81 \cdot 10^4\right] = \underline{0{,}287\ \text{atm.}}$$

90. Ein Aräometer (Bild 68) taucht in Wasser bis in eine Tiefe h_0 und in Flüssigkeit der Dichte ϱ_1 bis in eine Tiefe h_1 ein. Wie tief taucht es in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ ein?

Lösung

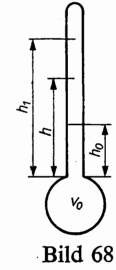


Bild 68

Wenn wir das Archimedische Gesetz anwenden, können wir folgende Beziehungen aufschreiben:

$$mg = (V_0 + Ah_0)\,\varrho_0 g,$$

$$mg = (V_0 + Ah_1)\,\varrho_1 g,$$

$$mg = (V_0 + Ah)\,\varrho g$$

(ϱ_0 Wasserdichte, A Rohrquerschnitt des Aräometers, V_0 Volumen des kugelförmigen Teils des Aräometers). Für V_0 ergibt sich aus den angeführten Gleichungen

$$V_0 = \frac{m}{\varrho_0} - Ah_0; \quad V_0 = \frac{m}{\varrho_1} - Ah_1; \quad V_0 = \frac{m}{\varrho} - Ah.$$

Deshalb gelten auch die Gleichungen

$$\frac{m}{\varrho_0} - Ah_0 = \frac{m}{\varrho_1} - Ah_1 \quad \text{und} \quad \frac{m}{\varrho} - Ah = \frac{m}{\varrho_0} - Ah_0.$$

Durch Auflösen beider Gleichungen nach A erhalten wir

$$A = \frac{m}{h_0 - h_1}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \quad \text{und} \quad A = \frac{m}{h_0 - h}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten vorstehender Gleichungen bekommen wir

$$\frac{m}{h_0 - h_1}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = \frac{m}{h_0 - h}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Es ergibt sich also

$$h_0 - h = (h_0 - h_1)\,\frac{\dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{\varrho}}{\dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{\varrho_1}} = (h_0 - h_1)\,\frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_0)}{\varrho(\varrho_1 - \varrho_0)}$$

und schließlich

$$\underline{h = h_0 + (h_1 - h_0)\,\frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_0)}{\varrho(\varrho_1 - \varrho_0)}.}$$

91. In einem Gefäß (Bild 69) befindet sich Wasser mit einer Höhe $h = 0{,}3$ m. In welcher Höhe über dem Boden des Gefäßes muß man eine Öffnung anbringen, damit das aus ihr ausströmende Wasser möglichst weit entfernt auf die Unterlage auftrifft, auf der das Gefäß steht?

Lösung

Wenn wir die Höhe der Ausflußöffnung über dem Gefäßboden mit y bezeichnen, dann gilt für die Ausströmgeschwindigkeit aus der waagerecht angelegten Öffnung

$$v = \sqrt{2\,g(h - y)}.$$

Die Bewegung des ausströmenden Wassers stellt im Prinzip einen horizontalen Wurf dar, so daß wir schreiben können

$$y = \frac{1}{2}\,gt^2; \quad x = vt$$

und weiter

$$x = \sqrt{2g(h - y)} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\,\sqrt{(h - y)\,y}.$$

Damit die Wurfweite x einen maximalen Wert annimmt, muß der Ausdruck

$$z = (h - y)\,y$$

ein Maximum sein. Das erhalten wir, wenn

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = h - 2y = 0, \quad \text{d. h.,} \quad y = \frac{h}{2} = \underline{0{,}15 \text{ m}}.$$

Es ist offenkundig, daß für $y = h/2$ die Größe x einen Maximalwert annimmt. Minimalwerte von x ergeben sich für $y = 0$ bzw. $y = h$, was aus dem Ausdruck für x ermittelt werden kann.

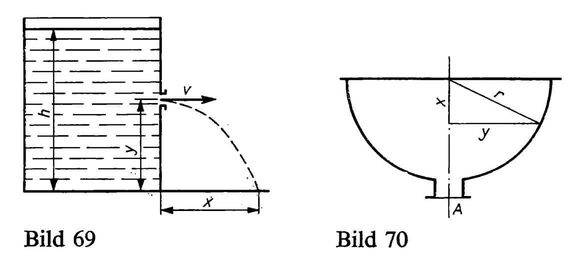


Bild 69 Bild 70

92. Ein halbkugelförmiges Gefäß (Bild 70) hat einen Radius $r = 0{,}1$ m und ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. An seinem Boden ist eine Öffnung mit der Querschnittsfläche $A = 4 \cdot 10^{-6}$ m². In welcher Zeit nach Freigabe der Öffnung sinkt der Flüssigkeitsspiegel im Gefäß auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes, wenn der Verengungskoeffizient des ausströmenden Flüssigkeitsstrahls $\mu = 0{,}6$ beträgt?

Lösung

Die Ausströmgeschwindigkeit der Flüssigkeit durch die Öffnung vom Querschnitt A hat zum beliebig gewählten Zeitpunkt, an dem der Flüssigkeitsspiegel um den Betrag x abgesunken ist, den Wert

$$v = \sqrt{2g(r - x)}.$$

Für die in diesem Zustand während des Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ austretende Flüssigkeitsmenge gilt

$$\mathrm{d}V = \mu A v \,\mathrm{d}t.$$

Gleichzeitig ergibt sich aber auch $\mathrm{d}V = \pi y^2 \,\mathrm{d}x$ und daher

$$\mu A \sqrt{2g(r - x)} \,\mathrm{d}t = \pi y^2 \,\mathrm{d}x.$$

Da weiter

$$y^2 = r^2 - x^2$$

ist, erhalten wir nach entsprechender Umstellung

$$\mu A \sqrt{2g} \sqrt{r - x} \,\mathrm{d}t = \pi (r^2 - x^2) \,\mathrm{d}x,$$

woraus wir finden

$$\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\mu A \sqrt{2g}} \left(\frac{r^2}{\sqrt{r - x}} - \frac{x^2}{\sqrt{r - x}} \right) \mathrm{d}x.$$

Die gesuchte Zeit t_0 wird durch Integration wie folgt berechnet:

$$t_0 = \frac{\pi}{\mu A \sqrt{2g}} \int\limits_0^{\frac{r}{2}} [r^2(r - x)^{-\frac{1}{2}} - x^2(r - x)^{-\frac{1}{2}}] \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{\mu A \sqrt{2g}} \left[- 2r^2 \sqrt{r - x} + 2r^2 \sqrt{r - x} - \frac{4}{3} r \sqrt{(r - x)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5} \sqrt{(r - x)^5} \right]_0^{\frac{r}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{\mu A \sqrt{2g}} \left[\frac{2}{5} \sqrt{\frac{r^5}{2^5}} - \frac{4}{3} r \sqrt{\frac{r^3}{2^3}} - \frac{2}{5} \sqrt{r^5} + \frac{4}{3} r \sqrt{r^3} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\mu A \sqrt{g}} r^2 \sqrt{r} \, \frac{28\sqrt{2} - 17}{30} = 493{,}3 \text{ s} = \underline{8{,}22 \text{ min.}}$$

93. In ein Gefäß strömt mit gleichmäßigem Strahl eine Wassermenge von $Q = 150 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ Am Boden des Gefäßes ist eine Öffnung von $A = 0{,}5 \text{ cm}^2$ Querschnittsfläche vorhanden

In welcher Höhe stellt sich ein konstanter Wasserstand im Gefäß ein, wenn wir die Verengung des ausströmenden Strahls vernachlässigen?

Lösung

Der stationäre Zustand ist dann erreicht, wenn in der Zeiteinheit durch die Öffnung am Boden des Gefäßes die gleiche Menge ausfließt, die von oben zugeführt wird. Für die in der Zeiteinheit aus der Bodenöffnung ausströmende Wassermenge gilt

$$Q^* = Av = A\sqrt{2gh}.$$

Da die Bedingung $Q^* = Q$ vorgegeben ist, ergibt sich für die endgültige Flüssigkeitshöhe

$$h = \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{225 \cdot 10^2 \text{ cm}^6 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 981 \text{ cm s}^{-2} \cdot 25 \cdot 10^2 \text{ cm}^4} = \underline{0{,}458 \text{ m}}.$$

94. Durch ein horizontal verlegtes Rohr mit ungleichen Querschnitten strömt Wasser (Bild 71). Es ist zu ermitteln, welche Wassermenge Q während einer Sekunde durch jeden Rohrquerschnitt fließt, wenn an den Stellen mit den Querschnitten $A_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ m² bzw. $A_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ m² die beiden Schenkel eines hier angesetzten Flüssigkeitsmanometers eine Höhendifferenz der Wasserspiegel von $\Delta h = 0{,}2$ m aufweisen.

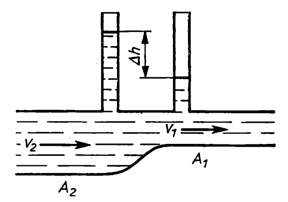


Bild 71

Lösung

Zur Lösung dieser Aufgabe wenden wir die BERNOULLIsche Gleichung an, die wir für das horizontale Rohr in folgender Form schreiben können:

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2$$

oder aber

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\varrho(v_1^2 - v_2^2).$$

Jedoch ist auch

$$p_2 - p_1 = \Delta h \varrho g,$$

wobei ϱ die Dichte des Wassers ist. Damit wird

$$\Delta h \varrho g = \frac{1}{2}\varrho(v_1^2 - v_2^2). \qquad (1)$$

Für die Unbekannten $v_{1,2}$ bietet sich in der Kontinuitätsgleichung eine weitere Bestimmung an:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2,$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1.$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (1) erhalten wir

$$\Delta h g = \frac{1}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right),$$

so daß wir schließlich finden

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta h g}{1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{1 - \frac{1}{4}}} = 2{,}29\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Die Wassermenge, die während einer Sekunde durch jeden Rohrquerschnitt strömt, hat somit den Wert

$$Q = v_1 A_1 = 2{,}29\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2} = 2{,}29 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3\,s^{-1}} = \underline{2{,}29\ \mathrm{l\,s^{-1}}}.$$

95. In Bild 72 wird ein rechtwinklig gebogenes Rohr in eine strömende Flüssigkeit gelegt. Wie hoch steigt die Flüssigkeit in diesem gekrümmten Rohr auf, wenn sie in einem an gleicher Stelle eingetauchten geraden Rohr eine Steighöhe h_1 erreicht und wenn die Strömungsgeschwindigkeit an der gegebenen Stelle gleich v_1 ist?

Lösung

Gemäß der BERNOULLIschen Gleichung kann man im Falle des gekrümmten Rohres schreiben

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p$$

oder

$$p - p_1 = \frac{1}{2} \varrho v_1^2$$

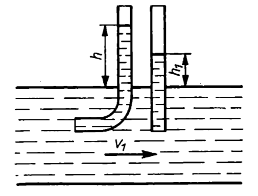


Bild 72

(p_1 Druck in der strömenden Flüssigkeit, p Druck in gleicher Tiefe im gekrümmten Rohr). In Bild 72 ist erkennbar, daß $p - p_1 = (h - h_1)\,\varrho g$ ist. Dann ergibt sich

$$(h - h_1)\,\varrho g = \frac{1}{2} \varrho v_1^2$$

und demnach also

$$\underline{h = h_1 + \frac{v_1^2}{2g}}.$$

96. Auf einem Wagen steht ein zylindrisches Gefäß, das bis zu einer Höhe $h = 1$ m mit Wasser gefüllt ist (Bild 73). Im Gefäß sind an gegenüberliegenden Seiten zwei gleiche Ventile mit Öffnungen von je $1 \cdot 10^{-3}$ m² Querschnittsfläche angebracht. Ein Ventil befindet sich in der Höhe $h_1 = 0{,}25$ m, das andere in der Höhe $h_2 = 0{,}5$ m. In welcher Größe und Richtung muß eine Kraft F auf den Wagen ausgeübt werden, damit sich dieser bei geöffneten Ventilen nicht von der Stelle bewegt?

Lösung

Für die Lösung wenden wir das Gesetz von der Erhaltung des Impulses eines abgeschlossenen Systems an, das aus Wagen, Gefäß und Wasserfüllung gebildet wird. Nach Öffnung der Ventile beträgt die zeitliche Änderung des Impulses des Wassers

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \varrho A v_1 \vec{v}_1 + \varrho A v_2 \vec{v}_2,$$

Bild 73

denn die Wassermenge, die in der Zeiteinheit durch jede der beiden Öffnungen austritt, ist $\varrho A v_1$ bzw. $\varrho A v_2$. Jedoch ist $\vec{v}_1 = v_1 \vec{\varrho}$, $\vec{v}_2 = -v_2 \vec{\varrho}$, wobei $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor in Geschwindigkeitsrichtung v_1 ist. Dann finden wir

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \varrho A (v_1^2 - v_2^2)\, \vec{\varrho}.$$

Da $v_1^2 = 2g(h - h_1)$ und $v_2^2 = 2g(h - h_2)$ ist, erhalten wir für die zeitliche Änderung des Impulses des Wassers

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \varrho A\, 2g(h - h_1 - h + h_2)\, \vec{\varrho} = \varrho A\, 2g(h_2 - h_1)\, \vec{\varrho},$$

d. h.,

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0{,}25 \text{ m} = 4{,}9 \text{ N}.$$

Da sich vor dem Öffnen der beiden Ventile das gesamte System in Ruhe befand, resultiert aus dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses, daß die zeitliche Änderung des Impulses von Wagen und Gefäß ebenso groß sein wird wie die zeitliche Änderung des Impulses des Wassers, jedoch von entgegengesetzter Richtung. Um die Bewegung des Wagens zu verhindern, muß man in der Richtung des Einheitsvektors $\vec{\varrho}$ mit einer Kraft vom Betrag

$$F = \left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = \varrho A\, 2g(h_2 - h_1) = \underline{4{,}9 \text{ N}}$$

wirken.

97. Eine Kugel aus einem Material der Dichte ϱ_1 hat einen Durchmesser $d = 2r$. Wir lassen diese Kugel in einer Flüssigkeit mit der Viskosität η und der Dichte ϱ_2 frei fallen. Wie groß wird die Geschwindigkeit der Kugel nach der Zeit t, vom Beginn der Bewegung an gemessen, und welchen Weg legt sie in dieser Zeit zurück?

Lösung

Während der Bewegung der Kugel in einer viskosen Flüssigkeit wirken auf sie die Kräfte Eigengewicht, Auftrieb gemäß dem Archimedischen Gesetz sowie Widerstand nach dem STOKESschen Gesetz. Dementsprechend nimmt die Bewegungsgleichung der Kugel die Form an

$$ma = mg - \varrho_2 Vg - 6\pi\eta rv$$

(V Volumen, v Geschwindigkeit, a Beschleunigung der Kugel). Mit $m = V\varrho_1$ für die Masse der Kugel folgt nach Umformung

$$a = g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) - \frac{6\pi\eta r}{m} v.$$

Wenn wir zur Abkürzung einführen

$$g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{6\pi\eta r}{m} = \beta$$

und

$$a = \frac{dv}{dt}$$

berücksichtigen, finden wir

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - \beta v. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung kann durch die Substitution $\alpha - \beta v = u$ gelöst werden, so daß $-dv = (1/\beta)\, du$ ist. Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$-\frac{1}{\beta}\frac{du}{dt} = u, \quad \text{d. h.,} \quad -\frac{du}{u} = \beta\, dt.$$

Die Integration ergibt

$$-\ln u = \beta t + k; \quad \frac{1}{u} = e^{\beta t + k}; \quad u = \frac{1}{e^{\beta t + k}},$$

so daß folgt

$$\alpha - \beta v = \frac{1}{e^{\beta t + k}}.$$

Für die Geschwindigkeit v zur Zeit t erhalten wir

$$v = \frac{\alpha - e^{-(\beta t+k)}}{\beta}.$$

Den Wert der Integrationskonstante k bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen. Zur Zeit $t = 0$ war auch $v = 0$, so daß sich ergibt

$$0 = \alpha - \frac{1}{e^k}, \quad \text{d. h.,} \quad e^{-k} = \alpha \quad \text{und} \quad v = \frac{\alpha(1 - e^{-\beta t})}{\beta}.$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Größen für α und β erhalten wir schließlich als Geschwindigkeit

$$v = \frac{mg\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{6\pi\eta r}\left(1 - \exp\left[-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right]\right).$$

Für die zurückgelegte Wegstrecke x gilt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

und damit

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\int_0^t (1 - e^{-\beta t})\,dt = \frac{\alpha}{\beta}t + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta t} - \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Und nach Einsetzen der entsprechenden Größen für α und β erhalten wir für die zurückgelegte Wegstrecke

$$x = \frac{mg\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{6\pi\eta r}t + \frac{m^2 g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{36\pi^2\eta^2 r^2}\left(\exp\left[-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right] - 1\right).$$

98. Ermitteln Sie die Endgeschwindigkeit eines fallenden Regentropfens in Luft, wenn der Tropfen als Kugel mit dem Radius $r = 1 \cdot 10^{-3}$ m und die Viskosität der Luft mit $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ g cm^{-1} s^{-1} angenommen wird.

Lösung

Die Bewegungsgleichung des Regentropfens hat die Form

$$ma = \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_1 - \varrho_2)g - 6\pi\eta r v$$

(ϱ_1 Wasserdichte, ϱ_2 Luftdichte). Wenn der geschwindigkeitsabhängige Luftwiderstand einen solchen Wert erreicht hat ($6\pi\eta r v$), daß die rechte Seite der Gleichung gleich Null

ist, bewegt sich von diesem Moment an der Tropfen gleichförmig geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit, die der Beziehung

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_1 - \varrho_2)\,g - 6\pi\eta r v = 0$$

genügt, d. h. mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2gr^2(\varrho_1 - \varrho_2)}{9\eta} \approx \frac{2gr^2\varrho_1}{9\eta} = \underline{121{,}1\ \mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

99. Welche Kapillardepression des in einem Glasrohr vom Radius $r = 1 \cdot 10^{-3}$ m enthaltenen Quecksilbers tritt ein, wenn die Oberflächenspannung des Quecksilbers den Wert $\sigma = 433$ erg cm^{-2} (= 0,433 Nm m^{-2}) hat und wenn der Grenzwinkel φ zwischen Quecksilber und Glaswandung 120° ist?

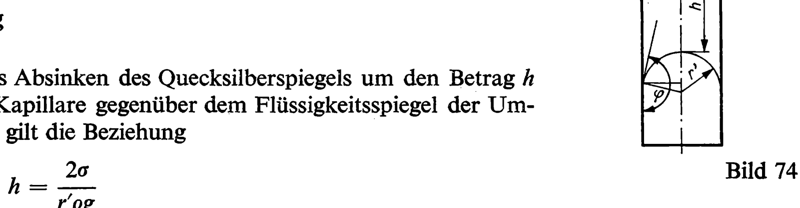


Bild 74

Lösung

Für das Absinken des Quecksilberspiegels um den Betrag h in der Kapillare gegenüber dem Flüssigkeitsspiegel der Umgebung gilt die Beziehung

$$h = \frac{2\sigma}{r'\varrho g}$$

(ϱ Dichte, σ Oberflächenspannung des Quecksilbers, r' Krümmungsradius des Quecksilbermeniskus). Aus Bild 74 folgt für r und r' die Beziehung

$$r' \cos(180^0 - \varphi) = r,$$

so daß wir finden

$$h = \frac{2\sigma\cos(180^0 - \varphi)}{\varrho g r} = \frac{2 \cdot 433 \cdot 0{,}5}{0{,}1 \cdot 13{,}6 \cdot 981}\ \mathrm{cm} \approx \underline{3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}.$$

A Aufgaben

100. In einem zylindrischen Gefäß vom Radius r befindet sich eine Flüssigkeit der Dichte ϱ. Das Gefäß dreht sich um seine Längsachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Die Flüssigkeitsoberfläche stabilisiert sich demnach in Form eines Paraboloids. Ermitteln Sie den Flüssigkeitsdruck in einer Tiefe h, auf der Symmetrieachse vom Scheitelpunkt des Paraboloids aus nach unten gemessen, und in der Entfernung x von der Symmetrieachse unter der Voraussetzung, daß auf die Flüssigkeitsoberfläche der barometrische Druck wirkt.

101. In der Seitenwand eines geschlossenen Gefäßes A (Bild 75), das mit Wasser gefüllt ist, befindet sich ein Steigrohranschluß B. Welcher Druck wirkt auf die freie Wasseroberfläche im Gefäß A, wenn durch die Wirkung dieses Drucks

die Wassersäule in B um 1,5 m über der in A steht und wenn der barometrische Außendruck 1 atm beträgt?

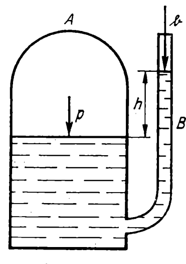


Bild 75

102. In einer bestimmten Höhe h über der Erdoberfläche wurde ein Luftdruck der Stärke $p = 0{,}5$ atm gemessen. Bestimmen Sie die Höhe h, wenn bei der Messung folgende Bedingungen galten: Luftdruck an der Erdoberfläche $p_0 = 1$ atm, Luftdichte an der Erdoberfläche $\varrho_0 = 1{,}29\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, Lufttemperatur überall gleich.
103. In einem Gefäß steht Wasser bis zur Höhe $h = 1$ m. In einer senkrechten Seitenwand ist eine Öffnung vom Radius $r = 0{,}2$ m angebracht, deren Mittelpunkt in der Höhe $h_1 = 0{,}5$ m über dem Boden des Gefäßes liegt. Sie ist mit einem Deckel verschlossen. Bestimmen Sie die Gesamtkraft, die auf den Deckel wirkt.

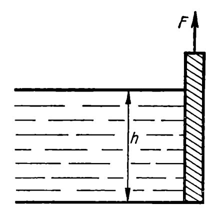


Bild 76

104. Wie groß muß eine Kraft F sein, die zum Hochstellen einer Faschine notwendig ist, die unter der Einwirkung des Wassers steht (Bild 76)? Das Gewicht der Faschine sei $G = 250$ kp, ihre Breite $b = 3$ m, die Wassertiefe $h = 1{,}5$ m, der Reibungskoeffizient der Faschine gegen ihre Lager sei $\mu = 0{,}3$.
105. Ein Stückchen Glas hat ein Gewicht von $G = 0{,}14$ kp. In Wasser getaucht beträgt sein scheinbares Gewicht nur noch $G' = 0{,}084$ kp. Wie groß ist die Dichte des Glases?
106. Welche Kraft muß zum Heben eines unter Wasser liegenden Steines aufgewendet werden, dessen Dichte $\varrho = 3 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ beträgt und der in Luft ein Gewicht von $G_1 = 15$ kp hat?
107. Eine Hohlkugel aus Messing mit der Dichte $\varrho = 8{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, dem Außendurchmesser $d_1 = 0{,}1$ m und der Wanddicke $s = 3 \cdot 10^{-3}$ m wird ins Wasser gelegt. Ermitteln Sie, ob die Kugel schwimmt oder ob sie auf den Boden sinkt.
108. Eine Messinghohlkugel vom Gewicht $G = 0{,}3$ kp taucht zur Hälfte ihres Volumens in Wasser ein. Bestimmen Sie Außendurchmesser und Wanddicke der Kugel, wenn die Dichte des Messings $\varrho = 8{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ beträgt.

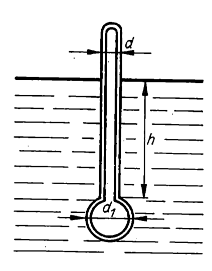


Bild 77

109. Ein Aräometer (Bild 77) hat die Gestalt einer Glasröhre, die in ihrem unteren Ende in eine mit schwerer Substanz gefüllte Kugel übergeht. Der Außendurchmesser des Rohres beträgt $d =$

$= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m, der der Kugel $d_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ m, die Gesamtmasse des Aräometers ist $m = 50 \cdot 10^{-3}$ kg. Wie groß ist die Dichte der Flüssigkeit, in die das Gerät bis in die Tiefe $h = 0{,}1$ m, von unten aus gemessen, eindringt?

110. Ein zylindrisches Gefäß hat, vom Boden aus gemessen, in den Höhen h_1 und h_2 zwei übereinanderliegende Öffnungen. In welcher Höhe über dem Gefäßboden muß ein Flüssigkeitsspiegel liegen, damit die ausströmende Flüssigkeit aus beiden Öffnungen gleich weit auf eine waagerechte Ebene auftrifft, die mit dem Boden des Gefäßes zusammenfällt?

111. Mit welcher Geschwindigkeit strömt Wasser aus der Öffnung eines Behälters, die in einer Höhe $h = 0{,}15$ m über dessen Boden liegt, wenn es in waagerechter Entfernung $d = 0{,}2$ m auf eine Ebene trifft, die mit dem Behälterboden zusammenfällt?

112. In welcher Zeit fließt die Hälfte der in einem zylindrischen Gefäß mit dem Querschnitt A enthaltenen Flüssigkeitsmenge durch eine kleine kreisförmige Öffnung am Boden des Gefäßes vom Querschnitt A_1, wenn der Verengungskoeffizient des ausströmenden Flüssigkeitsstrahls den Wert μ und wenn der anfängliche Flüssigkeitsspiegel im Gefäß die Höhe h_0 hat?

113. Eine Injektionsspritze hat eine Kolbenfläche der Größe $A_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m^2, ihre Öffnung eine Fläche $A_2 = 1 \cdot 10^{-6}$ m^2. Wie lange fließt aus der waagerecht gehaltenen Spritze Wasser aus, wenn auf den Kolben eine Kraft $F = 0{,}5$ kp ausgeübt und der Kolben dabei um einen Weg $l = 4 \cdot 10^{-2}$ m verschoben wird? Die innere Reibung der Flüssigkeit wird vernachlässigt.

114. Aus einer Öffnung mit der Querschnittsfläche A fließt ein Wasserstrahl der Dichte mit der Geschwindigkeit v in waagerechter Richtung aus und prallt auf eine Wand, die sich mit der Geschwindigkeit $u < v$ in gleicher Richtung fortbewegt. Mit welcher Kraft wirkt das Wasser auf die senkrechte Wand, wenn wir annehmen, daß der Wasserstrahl sich nach dem Aufprall auf die Wand nach allen Seiten gleichmäßig verteilt (Bild 78)? Bei welcher Geschwindigkeit u ist die an die Wand übertragene Leistung des Wasserstrahls ein Maximum?

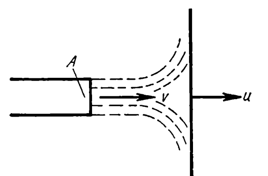


Bild 78

115. Eine Stahlkugel mit dem Radius $r = 2 \cdot 10^{-3}$ m und der Dichte $\varrho_1 = 7{,}7 \cdot 10^3$ kg m^{-3} fällt frei in Öl der Dichte $\varrho_2 = 0{,}9 \cdot 10^3$ kg m^{-3} und der Viskosität $\eta = 22$ g cm^{-1} s^{-1}. Bestimmen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit der fallenden Kugel.

116. Bestimmen Sie die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit der Dichte $\varrho = 0{,}9 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, die in einer Kapillare vom Durchmesser $d = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m um den Betrag $h = 15 \cdot 10^{-3}$ m über die umgebende Flüssigkeit aufsteigt unter der Voraussetzung völliger Benetzung.

117. Zwei Glaskapillaren mit den Radien $r_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ m und $r_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m sind in Wasser getaucht. Berechnen Sie die Oberflächenspannung des Wassers, wenn die Höhendifferenz der Wassersäulen in beiden Kapillaren $\Delta h = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ m beträgt und wenn völlige Benetzung vorausgesetzt wird.

1.6. Schwingungen und Wellen. Akustik

Als **ungedämpfte harmonische Bewegung** wird die Bewegung eines Massenpunktes bezeichnet, die unter der Wirkung einer Kraft erfolgt, die der Auslenkung des Massenpunktes aus seiner Gleichgewichtslage proportional und zur Gleichgewichtslage, dem sog. Mittelpunkt der harmonischen Bewegung, hin gerichtet ist. Im allgemeinen Fall ist die Bahn der harmonischen Bewegung eines Massenpunktes elliptisch. Im Sonderfall kann sie eine Kreisbahn oder auch eine Gerade sein. Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Masse m, der eine einfache harmonische ungedämpfte Bewegung auf einer Geraden ausführt, hat die Form

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx,$$

wobei x die Auslenkung des Massenpunktes aus der Gleichgewichtslage und c eine Konstante darstellt, die jene elastischen Eigenschaften der Vorrichtung charakterisiert, durch die der Massenpunkt gezwungen wird, die harmonische Bewegung auszuführen. Die Zeitfunktion der Auslenkung als Lösung der angegebenen Bewegungsgleichung hat die Form

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$\left(\omega = \sqrt{c/m}\right.$, x_0 Amplitude, φ *Phasenkonstante*, $\omega t + \varphi$ Schwingungsphase$\left.\right)$. Für die Periodendauer einer ungedämpften harmonischen Bewegung gilt die Beziehung

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Der Ausdruck $\nu = 1/T$ wird als *Schwingungsfrequenz* bezeichnet.
Wenn außer der Kraft $F = -cx$ auf den Massenpunkt eine zur Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers proportionale und der Geschwindigkeitsrichtung entgegengesetzt gerichtete Kraft (Widerstand des Mediums) wirkt, dann führt der Massenpunkt eine **gedämpfte harmonische Bewegung** aus, und seine Bewegungsgleichung nimmt die Form an

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \varrho \frac{dx}{dt},$$

wobei ϱ der Widerstandskoeffizient des betreffenden Mediums ist. Für eine periodische Bewegung lautet die Lösung der Bewegungsgleichung ($\omega_0^2 > b^2$)

$$x = x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

in der $b = \varrho/2m$ und $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ mit $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ ist. Wie aus der Gl. (1) ersichtlich, nimmt die Amplitude der Schwingung exponentiell mit der Zeit ab. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender maximaler Ausschläge nach der gleichen Seite wird als *Dämpfung* bezeichnet und ist durch die Beziehung

$$\lambda = \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi)}{x_0 e^{-b(t+T)} \cos[\omega(t+T) + \varphi]} = e^{bT}$$

gegeben, wobei $T = 2\pi/\omega$ die Periode der gedämpften harmonischen Schwingung darstellt. Der natürliche Logarithmus der Dämpfung ist das sog. *logarithmische Dekrement* δ, das durch die Beziehung gegeben ist

$$\delta = \ln \lambda = bT.$$

Wenn außer den obengenannten Kräften auf den Massenpunkt noch eine periodisch veränderliche äußere Kraft der Form $F = F_0 \sin \omega_2 t$ einwirkt, nimmt die Bewegungsgleichung des Massenpunktes die Form an

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \varrho\frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega_2 t.$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir für den stationären Zustand

$$x = x_0 \sin(\omega_2 t - \varphi),$$

in der x_0 und φ Konstanten darstellen, die durch die Beziehungen

$$x_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4b^2\omega_2^2}}; \quad \tan \varphi = \frac{2\omega_2 b}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

bestimmt werden, wobei $\omega_1 = \sqrt{c/m}$ und $b = \varrho/2m$ ist.

Wir sprechen davon, daß ein Massenpunkt unter der Wirkung einer äußeren Kraft **erzwungene Schwingungen** ausführt, und zwar mit der Kreisfrequenz dieser äußeren Kraft. Wie ersichtlich, ist die Amplitude solcher erzwungener Schwingungen von ω_2 abhängig. Wenn ω_2 so groß ist, daß x_0 einen maximalen Wert annimmt, dann tritt **Resonanz** ein.

Wenn ein Massenpunkt gleichzeitig zwei verschiedene Schwingungsbewegungen ausführen soll, dann ist in jedem Augenblick seiner resultierenden Bewegung die Auslenkung aus seiner Gleichgewichtslage durch die Vektorsumme der Auslenkungen gegeben, durch die der Massenpunkt im gegebenen Augenblick ausgezeichnet wäre, wenn er nur die eine bzw. die andere Schwingungsbewegung ausführen würde. Wir sprechen dann von einer **Überlagerung von Schwingungen.** Wenn es sich um die Über-

lagerung von parallelen Schwingungen handelt, geht die angegebene Vektorsumme der Auslenkungen in eine algebraische Summe über.
Wenn sich eine Schwingungsbewegung von einem Massenelement eines Mediums auf andere ausbreitet, sprechen wir davon, daß durch das Medium eine **Welle** läuft. Das Medium befindet sich in wellenförmiger Bewegung. Wenn die Auslenkungen der einzelnen Massenelemente des Mediums bei seiner wellenförmigen Bewegung überall und stets parallel zur Fortpflanzungsrichtung der Welle verlaufen, sprechen wir davon, daß die Welle eine Längswelle, eine **Longitudinalwelle**, ist. Wenn im Gegensatz hierzu die Auslenkungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle verlaufen, sprechen wir von einer Querwelle, einer **Transversalwelle.** Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen v_1 bzw. für die der Transversalwellen v_2 in einem bestimmten Medium gelten die Beziehungen

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad \text{bzw.} \quad v_2 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$$

[ϱ Dichte des Mediums, E Zugelastizitätsmodul, G Schubmodul (Torsionsmodul) des Mediums].
Da in flüssigen Medien (Gase und Flüssigkeiten) $G = 0$ ist, können sich in ihnen nur Longitudinalwellen ausbreiten. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in einem gasförmigen Medium gilt

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$$

(p Druck im Gas, ϱ Dichte, $\varkappa$ POISSONsche Konstante, vgl. 2.3.).
Unter **Wellenlänge** verstehen wir die Strecke, die eine Welle innerhalb eines gegebenen Mediums während der Periodendauer T zurücklegt. Hierfür gilt

$$\lambda = vT,$$

wobei v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der entsprechenden Welle in dem betreffenden Medium ist.
Die **Vibration** ist ein Sonderfall der wellenförmigen Bewegung. Sie stellt eine *stehende Welle* dar. Alle Elemente z. B. eines linearen Massengebildes führen bei Vibration gleichzeitig eine Schwingungsbewegung aus. Die Amplitude der Schwingungen der einzelnen Elemente ist jedoch nicht gleich, sie ist von der Lage des jeweiligen Elements abhängig. Diejenigen Elemente des Gebildes, die bei der Vibration eine Nullamplitude haben, befinden sich während der Vibration ständig in Ruhe. Man nennt die Punkte, an denen sie sich befinden, *Knoten.* Diejenigen Punkte, an denen maximale Amplituden auftreten, werden dagegen *Bäuche* genannt. Sie liegen immer zwischen zwei

Knoten. Der Abstand zwischen jeweils zwei benachbarten Knoten entspricht einer halben Wellenlänge, so daß der Abstand zwischen einem Knoten und dem ihm nächstliegenden Bauch $\lambda/4$ beträgt. Die Punkte, die auf zwei verschiedenen Seiten eines Knotens gleichauf liegen, haben eine Phasendifferenz vom Betrag π. Man sagt, sie schwingen mit entgegengesetzter Phase.
Auch für die Wellenlänge einer stehenden Welle gilt die Beziehung $\lambda = vT$, in der v die Geschwindigkeit der fortschreitenden Welle in einem Medium bedeutet, das sich im Zustand einer stehenden Welle befindet. Für eine Saite, deren Längeneinheit eine Masse vom Betrag μ hat und die durch eine Kraft F gespannt wird, gilt

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,.$$

Wenn eine Welle auf die ebene Trennfläche zweier verschiedener Medien auftrifft, wird die Welle einmal in das ursprüngliche Medium hinein reflektiert, zum anderen aber tritt sie in das angrenzende Medium über. Wir sprechen dann von einer **Wellenbrechung.** Es ändert sich jedoch für den übertretenden Teil der Welle der Winkel zwischen Fortpflanzungsrichtung und der auf der Trennfläche stehenden Normalen.
Dabei ist der Reflexionswinkel der Welle φ_1 ihrem Einfallswinkel gleich. Einfallswinkel φ_1 und Brechungswinkel φ_2 erfüllen die Bedingung

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}\,,$$

in der v_1 bzw. v_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im ersten bzw. zweiten Medium bedeutet. Im Falle, daß $v_2 > v_1$ ist, wird $\varphi_2 > \varphi_1$. In diesem Falle beträgt bei einem bestimmten Winkel $\varphi_1 = \varphi_0$ und $\varphi_2 = 90°$. Wenn $\varphi_1 > \varphi_0$ ist, dann tritt die Welle nicht mehr in das andere Medium über, und es entsteht **Totalreflexion.** Der Winkel φ_0 wird Grenzwinkel genannt.
Als **Schall** bezeichnen wir denjenigen Sonderfall einer Welle, die wir mit dem Gehör wahrnehmen können. Wenn die Quelle der Schallwellen und der Beobachter, der diese wahrnimmt, zueinander relativ bewegt sind, dann äußert sich die Schallfrequenz für den Beobachter anders als in dem Fall, da sich beide relativ zueinander in Ruhe befinden. Wenn sich der Beobachter – bezogen auf das Medium (Luft, von der wir voraussetzen, daß sie sich in Ruhe befindet) – mit einer Geschwindigkeit v und die Schallquelle mit einer Geschwindigkeit u in gleicher Richtung bewegen, dann ist nach dem **Dopplerschen Prinzip** der Zusammenhang zwischen der Schallfrequenz ν', die der Beobachter wahrnimmt, und der Frequenz ν, die er wahrnehmen würde, wenn er sich relativ zur Schallquelle in Ruhe befände, durch die Beziehung

$$\nu' = \frac{c - v}{c - u}\,\nu$$

gegeben, in der c die Schallgeschwindigkeit in Luft darstellt. Wenn $v < u$ ist, dann ist $\nu' > \nu$. Für den Fall, wo v und u einander entgegengerichtet sind, nähern sich Beobachter und Schallquelle einander, und es gilt die Beziehung

$$\nu' = \frac{c + v}{c - u}\nu.$$

Unter dem **Lautstärkepegel** eines beliebigen Schalls verstehen wir die durch die Beziehung

$$L = \lg \frac{J}{J_0}$$

definierte Größe, in der J die physikalische Intensität des entsprechenden Schalls ist und $J_0 = 10^{-16}$ Wcm^{-2} die sog. **Schallschwelle**, d. h. die physikalische Intensität des Normaltons mit einer Frequenz von 1000 Hz, die von einem durchschnittlichen menschlichen Ohr gerade schon nicht mehr wahrgenommen wird, bedeutet. Unter der *Wellenintensität* verstehen wir eine Größe, die zahlenmäßig der Energiemenge gleichkommt, die in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle gelegene Flächeneinheit hindurchtritt.

B Beispiele

100. Ermitteln Sie Amplitude und Phasenkonstante der ungedämpften harmonischen Bewegung eines Massenpunktes auf einer Geraden, wenn der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ durch die Auslenkung vom Betrag $X_0 = 5$ cm und die Geschwindigkeit $v_0 = 20$ cm s^{-1} ausgezeichnet war und seine Bewegungsfrequenz $\nu = 1$ s^{-1} betrug.

Lösung

Für die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage gilt bei einer ungedämpften harmonischen Bewegung die Beziehung

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

in der die Amplitude x_0 und die Phasenkonstante φ aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Wegen

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

kann man entsprechend der Aufgabenstellung für den Zustand zur Zeit $t = 0$ wie folgt schreiben:

$$X_0 = x_0 \cos\varphi,$$
$$v_0 = -x_0\omega \sin\varphi,$$

woraus resultiert

$$x_0 = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{4\pi^2\nu^2}} = \underline{5{,}92\ \text{cm}}$$

und weiterhin

$$\tan\varphi = -\frac{v_0}{X_0\omega} = -\frac{v_0}{X_0 2\pi\nu} = -0{,}63693$$

oder

$$\underline{\varphi = -32°\ 30'.}$$

101. Untersuchen Sie die Bewegung einer Kugel, die sich in einem geraden, durch den Erdmittelpunkt gehenden Kanal befindet, wenn vorausgesetzt wird, daß die im Erdinnern auf die Kugel wirkende Kraft gerade proportional zum jeweiligen Abstand Massenpunkt - Erdmittelpunkt ist. Die Kugel werde mit der Anfangsgeschwindigkeit Null in den Kanal hinab losgelassen. Es ist die Zeit zu ermitteln, in der die Kugel von der Erdoberfläche bis zum Erdmittelpunkt gelangt, sowie die Geschwindigkeit, mit der sie ihn passiert. Der Erdradius beträgt $r = 6370$ km.

Lösung

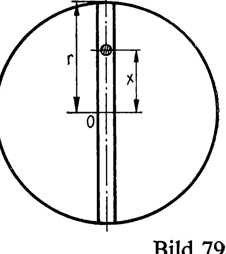


Bild 79

In Bild 79 gilt für die Kraft, die gemäß der Aufgabenstellung auf die Kugel wirkt,

$$F = -cx,$$

so daß sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c}{m}x$$

ergibt. Auf der Erdoberfläche ist die angegebene Kraft gleich dem Gewicht der Kugel, so daß man findet

$$cr = mg, \quad \text{d. h.,} \quad c = \frac{mg}{r}.$$

Man kann also weiter schreiben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{mr}x = -\frac{g}{r}x$$

und somit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

wenn wir die Bezeichnung $g/r = \omega^2$ einführen.
Als Lösung dieser Gleichung finden wir den Ausdruck

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $x = r$, d. h., $x_0 = r$ und $\varphi = 0$, somit

$$x = r \cos \sqrt{\frac{g}{r}}\, t.$$

Für die Zeit, welche die Kugel für den Weg bis zum Erdmittelpunkt benötigt, gilt

$$r \cos \sqrt{\frac{g}{r}}\, t_1 = 0, \quad \text{also} \quad \sqrt{\frac{g}{r}}\, t_1 = \frac{\pi}{2},$$

und damit finden wir

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} = \underline{20{,}8 \text{ min.}}$$

Für die Geschwindigkeit der Kugel gilt

$$v = \frac{dx}{dt} = -r \sqrt{\frac{g}{r}} \sin \sqrt{\frac{g}{r}}\, t.$$

Den Erdmittelpunkt passiert die Kugel demnach mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = r \sqrt{\frac{g}{r}} \sin \sqrt{\frac{g}{r}}\, t_1 = \underline{7{,}9 \text{ km s}^{-1}}.$$

102. Eine horizontal angeordnete kreisförmige Platte A (Bild 80) führt in senkrechter Richtung Schwingungen mit der Amplitude $x_0 = 0{,}75$ m aus. Wie groß darf die Schwingungsfrequenz der Platte im Höchstfall sein, damit sich der Körper B, der frei auf ihr liegt, nicht von seiner Unterlage ablöst?

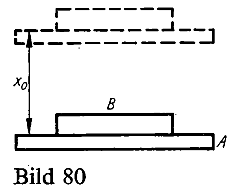


Bild 80

Lösung

Die in der Aufgabe gestellte Bedingung wird dann erfüllt, wenn im Punkt mit der maximalen Beschleunigung der Platte in abwärtiger Richtung diese maximale Beschleunigung den Wert der Erdbeschleunigung erreicht. Für die Auslenkung der Platte aus ihrer Gleichgewichtslage gilt

$$x = x_0 \cos \omega t,$$

und für die Beschleunigung der Platte erhalten wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\, x_0 \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Die Beschleunigung hat also jeweils maximale Werte in den Punkten maximaler Auslenkung. Die in der Aufgabe gestellte Bedingung wird also bei einem solchen maximalen

Wert für ω erfüllt sein, für den gilt

$$\omega^2 x_0 = g, \quad \text{d. h.,} \quad \omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{x_0}},$$

woraus wir finden

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{0{,}75\ \mathrm{m}}} = \underline{0{,}575\ \mathrm{s^{-1}}}.$$

103. Auf eine Waagschale der Masse M, die an einer Schraubenfeder mit dem Elastizitätskoeffizienten c aufgehängt ist (Bild 81), fällt aus der Höhe h ein Körper der Masse m und bleibt nach dem Aufschlag darauf liegen. Die Waagschale beginnt nunmehr, eine Schwingbewegung auszuführen. Es ist die Amplitude der Schwingung zu bestimmen.

Lösung

Der Körper trifft auf die Waagschale mit einer Geschwindigkeit v_1, deren Wert aus der Beziehung

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh, \quad \text{d. h.,} \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

resultiert.

Aus dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses in einem abgeschlossenen System erhalten wir die Beziehung

$$m v_1 = (m + M)\, v,$$

in der v die Geschwindigkeit darstellt, mit der sich Waagschale und Körper zusammen in Bewegung setzen. Für die Geschwindigkeit gilt

$$v = \frac{m v_1}{m + M} = \frac{m}{m + M}\sqrt{2gh}.$$

In der Anfangsstellung ist die Schraubenfeder aus der Gleichgewichtslage ausgezogen, in der sie sich im unbelasteten Zustand befinden würde. Für den Betrag der Auslenkung l gilt

$$Mg = cl, \quad \text{d. h.,} \quad l = \frac{Mg}{c}.$$

Bild 81

Aus dem Satz von der Erhaltung der Energie, der besagt, daß die Arbeit, die Kräfte längs eines bestimmten Weges an einem Körper verrichten, gleich der Zunahme seiner kinetischen Energie ist, ergibt sich

$$W = -\int_l^{x_0} cx\,\mathrm{d}x + (m + M)\, g(x_0 - l) = -\frac{1}{2}(m + M)\, v^2,$$

$$\frac{1}{2} c(x_0^2 - l^2) = \frac{1}{2}(m + M)\frac{m^2}{(m + M)^2}\, 2gh + (m + M)\, g(x_0 - l),$$

wobei x_0 zur maximalen Auslenkung der unbelasteten Feder aus ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage gehört. Wenn wir in diese Gleichung $l = Mg/c$ einsetzen, erhalten wir nach der Umformung

$$x_0^2 - \frac{2(M+m)g}{c} x_0 - \frac{2m^2gh}{(M+m)c} + \frac{M(M+2m)}{c^2} g^2 = 0,$$

woraus folgt

$$x_0 = \frac{M+m}{c} g \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{c^2} + \frac{2m^2gh}{(M+m)c}}\ .$$

Zusammen mit dem daraufgefallenen Gewicht wird die Waagschale eine Schwingung um eine Gleichgewichtslage ausführen, die von der Gleichgewichtslage der unbelasteten Schraubenfeder um den Betrag l' entfernt ist, für den gilt

$$(m+M)g = cl'.$$

Die Amplitude der Schwingung ist dann

$$A = x_0 - l' = \sqrt{\frac{m^2g^2}{c^2} + \frac{2m^2gh}{(M+m)c}}\ .$$

104. Die Bewegung eines Massenpunktes wird durch die beiden Gleichungen $x = a\cos^2 kt$ und $y = a\sin^2 kt$ bestimmt, wobei a und k Konstanten sind. Es ist die Bewegungsbahn des Massenpunktes und das dieser Bahn entsprechende Bewegungsgesetz zu ermitteln.

Lösung

Um die Bewegungsbahn zu ermitteln, streichen wir in den angeführten Gleichungen die Zeit und erhalten

$$x + y = a.$$

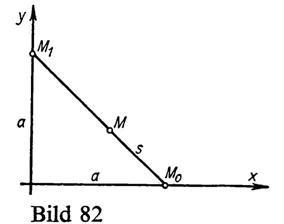


Bild 82

Es ist dies die Gleichung einer Geraden (Bild 82). Zur Zeit $t = 0$ ist $x_0 = a$ und $y_0 = 0$, so daß sich der Massenpunkt zu diesem Augenblick im Punkt M_0 befindet. Zur Zeit $t_1 = \pi/2k$ ist $x_1 = 0$ und $y_1 = a$, so daß sich der Massenpunkt in M_1 befindet. Zur Zeit $t_2 = 2t_1 = \pi/k$ erhalten wir $x_2 = a$ und $y_2 = 0$, so daß sich der Massenpunkt wieder in M_0 befindet, von wo aus sich die ganze Bewegung wiederholt. Der Massenpunkt vollführt also auf der Strecke M_0M_1 eine Schwingungsbewegung, deren Periodendauer durch

$$T = \frac{\pi}{k}$$

gegeben ist. Für die Geschwindigkeitskoordinaten des Massenpunktes gilt

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2ak \cos kt \sin kt = -ak \sin 2kt,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2ak \sin kt \cos kt = ak \sin 2kt.$$

Für den Wert der Geschwindigkeit ergibt sich somit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2}\, ak \sin 2kt.$$

Wenn wir die Entfernung des Massenpunktes vom Punkt M_0 (wo sich der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ befand) mit dem Symbol s bezeichnen, dann gilt offenbar

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2}\, ak \sin 2\, kt,$$

so daß wir finden

$$s = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos 2kt + C.$$

Der Wert der Konstanten C resultiert aus den Anfangsbedingungen, die besagen, daß zur Zeit $t = 0$ auch $s = 0$ ist.
Es ist

$$C = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

und damit nimmt das Bewegungsgesetz die Form an:

$$s = \frac{a\sqrt{2}}{2} (1 - \cos 2kt) = \underline{a\sqrt{2} \sin^2 kt.}$$

105. Wie groß ist die Frequenz der ungedämpften harmonischen Bewegung eines Massenpunktes der Masse $m = 0{,}002$ kg, wenn die Amplitude seiner Schwingung $x_0 = 0{,}1$ m und seine Gesamtenergie bei dieser Bewegung gleich 1 Joule ist?

Lösung

Die Gesamtenergie eines Massenpunktes, der eine ungedämpfte harmonische Schwingung ausführt, ist durch die Summe von kinetischer und potentieller Energie gegeben:

$$W = W_k + W_p.$$

Da $x = x_0 \cos (\omega t + \varphi)$ ist, ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0\omega \sin (\omega t + \varphi),$$

so daß wir finden

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 \sin^2 (\omega t + \varphi).$$

Für die potentielle Energie eines Massenpunktes, der sich in einem Abstand x von seiner Gleichgewichtslage befindet, gilt

$$W_p = \int_0^x cx\,dx = \frac{1}{2} cx^2 = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 \cos^2 (\omega t + \varphi),$$

da $\omega^2 = c/m$ ist. Die Gesamtenergie ist dann

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 = \frac{1}{2} mx_0^2\, 4\pi^2\nu^2 = 2\pi^2 mx_0^2\nu^2.$$

Für die gesuchte Frequenz erhalten wir somit

$$\nu = \sqrt{\frac{W}{2\pi^2 mx_0^2}} = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{J}}{2\cdot 9{,}86\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\,10^{-2}\,\mathrm{m}^2}} = \underline{50{,}35\ \mathrm{s}^{-1}}.$$

106. Wie groß ist das logarithmische Dekrement bei der harmonischen gedämpften Schwingung eines Massenpunktes, wenn dieser nach 10 s Bewegungsdauer 50 % seiner mechanischen Energie verliert und wenn die Periodendauer der gedämpften Schwingung den Wert $T = 2$ s hat?

Lösung

Die Gesamtenergie eines Massenpunktes, der eine harmonische Bewegung ausführt, ist in einem bestimmten Augenblick t durch die Beziehung

$$W_t = \frac{1}{2} cx_{0t}^2$$

gegeben, in der die Größe x_{0t} seine momentane Schwingungsamplitude darstellt. Es gilt also

$$\frac{W_t}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} cx_{0t}^2}{\frac{1}{2} cx_0^2} = \frac{x_{0t}^2}{x_0^2} = \frac{1}{2},$$

d. h.,

$$\frac{x_{0t}}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es ergibt sich weiterhin

$$\frac{x_{0t}}{x_0} = \frac{x_0 e^{-\delta \frac{t}{T}}}{x_0} = e^{-\delta \frac{t}{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

so daß wir finden

$$-\delta \frac{t}{T} = -\frac{1}{2} \ln 2, \quad \text{d. h.,} \quad \delta = \frac{T}{2t} \ln 2 = \frac{2\,\text{s}}{2 \cdot 10\,\text{s}}\, 0{,}693 = \underline{0{,}0693}.$$

107. Bei der Beobachtung einer gedämpften Schwingung wurde festgestellt, daß sich die Schwingungsamplitude nach zwei aufeinanderfolgenden Auslenkungen auf die gleiche Seite um 60% verringerte und daß die Periodendauer $T = 0{,}5$ s betrug.
Ermitteln Sie die Dämpfungskonstante sowie die Frequenz der ungedämpften Schwingung, die unter sonst gleichen Bedingungen vorliegen würde.

Lösung

Für das logarithmische Dekrement der gedämpften Schwingung gilt

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = bT.$$

Gemäß der Beobachtung finden wir $x_2 = {}^4/_{10}\, x_1$, so daß wir für den Dämpfungskoeffizienten bekommen

$$b = \frac{\ln \frac{10}{4}}{0{,}5\,\text{s}} = \underline{1{,}83\,\text{s}^{-1}}.$$

Für die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung gilt

$$\omega_0^2 = \omega^2 + b^2$$

und für die Frequenz

$$\nu_0^2 = \nu^2 + \frac{b^2}{4\pi^2} = \frac{1}{T^2} + \frac{b^2}{4\pi^2} = \frac{1}{0{,}5^2\,\text{s}^2} + \frac{(1{,}83\,\text{s}^{-1})^2}{4\pi^2} = 4{,}0848\,\text{s}^{-2},$$

also

$$\underline{\nu_0 = 2{,}02\,\text{s}^{-1}}.$$

108. Die Resonanzamplitude eines Massenpunktes, der eine erzwungene harmonische Schwingung ausführt, ist zu berechnen, wenn seine Masse $m = 0{,}1$ kg, die Kreisfrequenz seiner Eigenschwingung $\omega_0 = 20\,\text{s}^{-1}$, der Dämpfungskoeffizient $b = 3\,\text{s}^{-1}$ sowie die angreifende Kraft $F = 10$ N ist.

Für die Amplitude eines Massenpunktes, der eine erzwungene Schwingung vollführt, gilt die Beziehung

$$x_0 = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} .$$

Sie wird für einen solchen Wert der Kreisfrequenz ω_{Res} maximal sein, für den

$$\frac{dx_0}{d\omega} = 0$$

ist, d. h. für den der Nenner des oben angegebenen Ausdrucks ein Minimum aufweist. Dies ist demnach dann der Fall, wenn

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2)\,2\omega + 8b^2\omega = 0$$

ist. Für die gesuchte Resonanzkreisfrequenz ergibt sich aus dieser Gleichung

$$\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} = 19{,}54\ \text{s}^{-1},$$

und für die Resonanzamplitude erhalten wir nach Einsetzen von ω_{Res} in den Ausdruck für x_0 den Wert

$$x_{0\text{Res}} = \frac{\frac{F}{m}}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = 84{,}3\ \text{cm} = \underline{0{,}843\ \text{m}.}$$

109. Ermitteln Sie Amplitude und Phasenkonstante einer resultierenden harmonischen Schwingung, die durch Überlagerung zweier zueinander parallel verlaufender Schwingungsbewegungen

$$x_1 = x_{01}\cos(\omega t + \varphi_1); \quad x_2 = x_{02}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

entsteht, wenn $x_1 = x_{02} = 0{,}05$ m, $\varphi_1 = 30°$, $\varphi_2 = 60°$ beträgt.

Lösung

Für die resultierende Bewegung wird gelten:

$$x = x_1 + x_2 = x_{01}\cos(\omega t + \varphi_1) + x_{02}\cos(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= x_{01}(\cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1) + x_{02}(\cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos\omega t(x_{01}\cos\varphi_1 + x_{02}\cos\varphi_2) - \sin\omega t(x_{01}\sin\varphi_1 + x_{02}\sin\varphi_2).$$

Mit den Bezeichnungen

$$x_{01}\cos\varphi_1 + x_{02}\cos\varphi_2 = x_0\cos\varphi;$$
$$x_{01}\sin\varphi_1 + x_{02}\sin\varphi_2 = x_0\sin\varphi \qquad (1)$$

erhalten wir

$$x = x_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = x_0 \cos (\omega t + \varphi).$$

Das bedeutet: Die resultierende Bewegung ist ebenfalls eine harmonische mit der gleichen Frequenz, mit der Amplitude x_0 und der Phasenkonstanten φ, für die sich aus Gl. (1) ergibt

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02} \cos (\varphi_2 - \varphi_1)} = \underline{0{,}0965 \text{ m}};$$

$$\tan \varphi = \frac{x_{01} \sin \varphi_1 + x_{02} \sin \varphi_2}{x_{01} \cos \varphi_1 + x_{02} \cos \varphi_2} = 1, \quad \text{also} \quad \underline{\varphi = 45°}.$$

110. Zwei parallele Schwingungsbewegungen von gleicher Amplitude und gleicher Phasenkonstante mit einer Periodendauer nur geringen Unterschiedes ($T_1 = 3$ s und $T_2 = 3{,}1$ s) überlagern sich zu einer resultierenden Bewegung. Ermitteln Sie die Periodendauer der resultierenden Schwingung und die der Schwebung.

Lösung

Für die einzelnen Schwingungsbewegungen kann geschrieben werden:

$$x_1 = x_0 \sin (\omega_1 t + \varphi); \quad x_2 = x_0 \sin (\omega_2 t + \varphi).$$

Für die resultierende Schwingung wird dann gelten:

$$x = x_1 + x_2 = x_0 \sin (\omega_1 t + \varphi) + x_0 \sin (\omega_2 t + \varphi) =$$

$$= 2x_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right).$$

Demnach können wir für die Periodendauer der resultierenden Schwingung schreiben

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2}{\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} =$$

$$= \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = \underline{3{,}05 \text{ s}}.$$

Da sich die Amplitude der resultierenden Schwingung mit der Zeit periodisch ändert, können wir für die Periodendauer der Amplitudenänderung schreiben

$$T' = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Während einer Periode der Amplitudenänderung entstehen zwei Verstärkungen und zwei Abschwächungen der Amplitude, d. h. zwei Schwebungen, deshalb können wir für

die Periodendauer der Schwebung schreiben:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = \underline{93 \text{ s.}}$$

111. Ermitteln Sie die Bahn der resultierenden Bewegung, die bei der Überlagerung zweier senkrecht zueinander gerichteter harmonischer Schwingungsbewegungen mit gleichen Amplituden der Größe $A = x_0 = y_0 = 0{,}05$ m und gleicher Periodendauer, wenn die Phasendifferenz beider Bewegungen gleich $\pi/2$ ist.

Lösung

Für die resultierende harmonische Bewegung, die durch Überlagerung der beiden angegebenen harmonischen Bewegungen auf zwei senkrecht zueinander orientierten Geraden entsteht, gilt allgemein

$$\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t = (a_x \cos \omega t + b_x \sin \omega t)\, \vec{i} + (a_y \cos \omega t + b_y \sin \omega t)\, \vec{j}.$$

Wenn wir festhalten:

$$a_x = x_0 \sin \varphi_x, \quad a_y = y_0 \sin \varphi_y,$$

$$b_x = x_0 \cos \varphi_x, \quad b_y = y_0 \cos \varphi_y,$$

dann gilt

$$x_0 = +\sqrt{a_x^2 + b_x^2}, \quad y_0 = +\sqrt{a_y^2 + b_y^2},$$

$$\tan \varphi_x = \frac{a_x}{b_x}, \quad \tan \varphi_y = \frac{a_y}{b_y}.$$

Beide vorstehend angeführten Wurzeln sind mit positivem Vorzeichen versehen, weil die Größen x_0 bzw. y_0 die Bedeutung von Amplituden harmonischer Bewegungen haben; sie können daher nur positiv sein. Danach ergibt sich

$$a_x \cos \omega t + b_x \sin \omega t = x_0 \sin (\omega t + \varphi_x),$$

$$a_y \cos \omega t + b_y \sin \omega t = y_0 \sin (\omega t + \varphi_y)$$

und $\vec{r} = x_0 \sin (\omega t + \varphi_x)\, \vec{i} + y_0 \sin (\omega t + \varphi_y)\, \vec{j}.$

Die in Richtung der x-Achse stattfindende Bewegung ist gegenüber der in Richtung der y-Achse verlaufenden durch ein Vorauseilen der Phase gekennzeichnet: $\varphi_x - \varphi_y$. Durch geeignete Wahl des Anfangszeitpunkts aber können wir erreichen, daß $\varphi_y = 0$ ist. Wenn wir dann schreiben $\varphi_x = \varphi$ und $\varphi_y = 0$, erhalten wir

$$\vec{r} = x_0 \sin (\omega t + \varphi)\, \vec{i} + y_0 \sin \omega t\, \vec{j}.$$

In unserem Fall ist $\varphi = \pi/2$ und $x_0 = y_0 = A = 0{,}05$ m. Damit ergibt sich

$$\vec{r} = A \cos \omega t \cdot \vec{i} + A \sin \omega t \cdot \vec{j},$$

da

$$A \cos \omega t = x, \quad A \sin \omega t = y$$

und

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

wobei $r = A = 0{,}05$ m ist. Demnach ist die Bahn der resultierenden harmonischen Bewegung eine Kreislinie vom Radius $\underline{r = 0{,}05\ \text{m}}$.

112. Longitudinalwellen in Stahl sollen sich mit einer Geschwindigkeit $v_l = 5100\ \text{m s}^{-1}$ ausbreiten. Wie groß ist demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen, wenn die POISSON-Zahl $\mu = 3{,}1$ ist?

Lösung

Für die Fortpflanzung der Longitudinalwellen mit der Geschwindigkeit v_l und die der Transversalwellen mit v_2 gelten in einem bestimmten Medium die Beziehungen

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$$

(E Zugelastizitätsmodul, G Schubmodul, ϱ Dichte des entsprechenden Stoffes). Aber es ist auch

$$G = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)} = \frac{\mu}{2(\mu + 1)} \varrho v_l^2,$$

so daß wir erhalten

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu \varrho v_l^2}{2(\mu + 1) \varrho}} = v_l \sqrt{\frac{\mu}{2(\mu + 1)}} = 5100\ \text{m s}^{-1} \cdot 0{,}61 = \underline{3111\ \text{m s}^{-1}}.$$

113. In einer KUNDTschen Röhre erzeugen wir mittels eines Stahlstabs der Länge $l = 1{,}20$ m eine stehende Welle. Die Röhre ist mit Wasserstoff gefüllt; der Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten der stehenden Welle wurde durch Messung zu 0,288 m bestimmt. Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit im Wasserstoff, wenn diejenige im verwendeten Stahl mit $v_S = 5300\ \text{m s}^{-1}$ angegeben wurde?

Lösung

Für die im Stab entstehende Wellenlänge gilt

$$\lambda_S = v_S T$$

und für die Wellenlänge im Wasserstoff entsprechend

$$\lambda = vT.$$

Durch Dividieren beider Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\lambda_S}{\lambda} = \frac{v_S}{v},$$

so daß wir für die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Wasserstoff erhalten

$$v = \frac{\lambda}{\lambda_S} v_S.$$

Da $\lambda_S = 2l = 2{,}40$ m und $\lambda = 2 \cdot 0{,}288$ m $= 0{,}576$ m ist, ergibt sich die Geschwindigkeit im Wasserstoff zu

$$v = \frac{0{,}576\text{ m}}{2{,}40\text{ m}} \cdot 5300\text{ m s}^{-1} = \underline{1272\text{ m s}^{-1}}.$$

114. Die Schallgeschwindigkeit in Sauerstoff beträgt unter Normalbedingungen 317,2 m s^{-1}. Wie groß ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten (POISSONsche Konstante) $\varkappa = c_p/c_v$ für den Sauerstoff?

Lösung

Als Normalbedingungen bezeichnen wir die, bei denen die Gastemperatur $t = 0$ °C und der Gasdruck $p = 1$ atm beträgt. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls gilt im Gas die Beziehung

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$$

(ϱ Gasdichte, p Gasdruck).
Hieraus folgt

$$\varkappa = \frac{\varrho v^2}{p}.$$

Die Sauerstoffdichte unter Normalbedingungen bestimmen wir unter Zuhilfenahme der Kenntnis, daß bei diesen ein Grammolekül Sauerstoff (und darüber hinaus jedes anderen Gases überhaupt) ein Volumen von $V_0 = 22{,}4$ l beansprucht. Es ist also

$$\varrho = \frac{\mu}{V_0} = \frac{32\text{ g}}{22{,}4\text{ l}} = \frac{32\text{ g}}{22{,}4 \cdot 10^3\text{ cm}^3} = 1{,}428 \cdot 10^{-3}\text{ g cm}^{-3},$$

wobei $m = 32$ g die Masse eines Grammoleküls Sauerstoff bedeutet. Für den Druck p kann dann geschrieben werden

$$p = 1\text{ atm} = 760\text{ Torr} = 76 \cdot 13{,}5 \cdot 981\text{ dyn cm}^{-2} = 1{,}007 \cdot 10^6\text{ dyn cm}^{-2};$$

da wir den hydrostatischen Druck der Quecksilbersäule nach der Beziehung $p = h\varrho' g$ berechnen, erhalten wir schließlich

$$\varkappa = \frac{1{,}428 \cdot 10^{-3}\text{ g cm}^{-3}\,(3{,}172)^2 \cdot 10^8\text{ cm}^2\text{ s}^{-2}}{1{,}007 \cdot 10^6\,\dfrac{\text{g cm s}^{-2}}{\text{cm}^2}} = \underline{1{,}42}.$$

115. Die Grundfrequenz einer Saite der Länge $l = 2$ m mit einer Masse je Längeneinheit von $\mu = 1{,}5$ g cm^{-1} habe den Wert $\nu = 2$ s^{-1}. Durch welche Kraft wird die Saite gespannt?

Lösung

Für die Grundwellenfrequenz einer Saite gilt die Beziehung

$$\nu = \frac{v}{2l},$$

in der v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Transversalwelle in der Saite bedeutet. Weiter gilt

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

wobei F die Kraft darstellt, mit der die Saite gespannt wird. μ ist die Masse der Längeneinheit. Nach Einsetzen des Wertes für v erhalten wir

$$\nu = \frac{\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}}{2l},$$

so daß sich ergibt

$$F = 4l^2\nu^2\mu = 4 \cdot 4 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \cdot 4 \text{ s}^{-2} \cdot 1{,}5 \text{ g cm}^{-1} = 96 \cdot 10^4 \text{ dyn} = 0{,}97 \text{ kp} =$$

$$= \underline{9{,}6 \text{ N}}.$$

116. Bis zu welchem maximalen Einfallswinkel darf eine Schallwelle auf die Trennfläche zwischen den beiden Medien Luft und Wasser auftreffen, damit sie noch ins Wasser übertritt? Die Schallgeschwindigkeit im Wasser sei $v_2 = 1450$ m s^{-1}, in Luft bei gegebener Temperatur $v_1 = 340$ m s^{-1}.

Lösung

Der Schall wird bei allen jenen Einfallswinkeln ins Wasser übertreten, die kleiner sind als der Grenzwinkel φ_0, für den gilt

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \dfrac{\pi}{2}} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \text{d. h.,} \quad \sin \varphi_0 = \frac{v_1}{v_2} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{1450 \text{ m s}^{-1}} =$$

$$= 0{,}23448, \quad \text{also } \underline{\varphi_0 = 13°33'}.$$

Damit die Schallwelle ins Wasser übertritt, muß also ihr Einfallswinkel kleiner als der berechnete Wert von 13° 33′ sein.

117. Ein Beobachter bewegt sich auf der geraden Verbindungslinie mit einer Geschwindigkeit $v = 10 \text{ m s}^{-1}$ auf eine Schallquelle zu, die sich ihrerseits mit der Geschwindigkeit $u = 5 \text{ m s}^{-1}$ in Richtung auf den Beobachter zu bewegt. Beide Geschwindigkeitsangaben beziehen sich auf das ruhende Medium Luft, in dem sich der Schall ausbreitet. Welche Schallfrequenz nimmt der Beobachter wahr, wenn die Schallquelle einen Ton von der Frequenz $\nu = 500 \text{ s}^{-1}$ erzeugt und wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls bei der gegebenen Temperatur $c = 340 \text{ m s}^{-1}$ beträgt?

Lösung

Nach dem DOPPLERschen Prinzip gilt für die Frequenz, die vom Beobachter wahrgenommen wird, im vorliegenden Fall

$$\nu' = \frac{c + v}{c - u}\,\nu = \frac{(340 + 10) \text{ m s}^{-1}}{(340 - 5) \text{ m s}^{-1}} \cdot 500 \text{ s}^{-1} = \underline{522 \text{ s}^{-1}}.$$

118. Um welchen Betrag steigt der Schallpegel, wenn sich die physikalische Intensität eines Schalls auf das 5fache erhöht?

Lösung

Für den Lautstärkepegel eines beliebigen Schalls, der in der Einheit Dezibel ausgedrückt wird, gilt die Beziehung

$$L = 10 \lg \frac{J}{J_0},$$

in der $J_0 = 10^{-16} \text{ W cm}^{-2}$ die Intensität der Schallquelle eines Normaltons von 1000 Hz darstellt, die gerade schon nicht mehr wahrgenommen werden kann. Wenn die Intensität eines beliebigen Schalls zunächst den Wert J_1 hat und dann auf $J_2 = 5\,J_1$ ansteigt, dann gilt für die Lautstärkepegel dieser Schallerscheinungen

$$L_1 = 10 \lg \frac{J_1}{J_0},$$

$$L_2 = 10 \lg \frac{J_2}{J_0} = 10 \lg \frac{5J_1}{J_0}.$$

Es ergibt sich also

$$L_2 - L_1 = 10 \left(\lg \frac{5J_1}{J_0} - \lg \frac{J_1}{J_0}\right) = 10 \lg 5 \approx \underline{7 \text{ dB}}.$$

Der Lautstärkepegel erhöht sich also annähernd um 7 Dezibel.

A Aufgaben

118. Berechnen Sie die Periodendauer der harmonischen Bewegung eines Massenpunktes der Masse $m = 0{,}010$ kg, wenn die Kraft, welche die Schwingung dieses Massenpunktes verursacht, bei der Auslenkung $x = 0{,}03$ m den Wert $F = 0{,}05$ N aufweist.
119. Eine horizontale Platte führt in waagerechter Richtung eine harmonische Bewegung mit der Periodendauer $T = 5$ s aus. Ein Körper, der auf der Platte liegt, beginnt auf ihr zu gleiten, wenn die Amplitude der Schwingungen den Wert $x_0 = 0{,}5$ m erreicht. Wie groß ist der Reibungskoeffizient zwischen der Platte und dem auf ihr aufliegenden Körper?
120. Auf einer Platte liegt ein Körper mit dem Gewicht $G = 2$ kp. Die Platte führt eine harmonische Bewegung mit der Periodendauer $T = 0{,}5$ s und der Amplitude $x_0 = 0{,}03$ m in vertikaler Richtung aus. Definieren Sie die Kraft F_{max}, mit welcher der Körper auf die Platte wirkt, und berechnen Sie die Amplitude dieser Kraft.
121. Das logarithmische Dekrement gedämpfter harmonischer Schwingungen habe den Wert $\delta = 0{,}02$. Berechnen Sie, um welchen Betrag sich die Schwingungsamplitude nach 100 Schwingungen des Massenpunktes verringert.
122. Wie groß ist der Dämpfungskoeffizient der gedämpften harmonischen Schwingungen eines Massenpunktes, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender maximaler Auslenkungen des Massenpunktes zur gleichen Seite hin gleich 2 ist und wenn die Periodendauer der gedämpften Schwingung den Wert $T = 0{,}5$ s hat? Wie groß wäre die Periodendauer der ungedämpften Schwingung unter sonst gleichen Bedingungen?
123. Ein Eisenbahnwaggon hat einschließlich Last ein Gewicht $G = 50000$ kp. Es wurde festgestellt, daß der Waggon, der vier Federn hat, bei einer Geschwindigkeit $v = 12\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ heftig zu schwanken beginnt, was durch das Überfahren der Schienenstöße verursacht wird. Die Schienenlänge beträgt $l = 12{,}8$ m. Wie groß ist der Elastizitätskoeffizient der Federn, wenn wir eine Dämpfung vernachlässigen?
124. Ermitteln Sie die Amplitude der resultierenden harmonischen Bewegung, die durch Überlagerung zweier gleich gerichteter harmonischer Schwingungen von gleicher Periodendauer und den Amplituden 0,03 m und 0,05 m entsteht, deren Phasendifferenz 60° beträgt.
125. Zwei harmonische Schwingungen mit annähernd gleichen Frequenzen überlagern sich zu einer resultierenden Schwingung, die fünf Schwebungen in der Sekunde aufweist. Eine der Frequenzen hat den Wert $f_1 = 40\ \mathrm{s^{-1}}$. Wie groß ist die andere Frequenz?
126. Ermitteln Sie die Bahn der resultierenden Bewegung, die bei Überlagerung zweier senkrecht zueinander gerichteter harmonischer Schwingungen mit den Amplituden 0,03 m und 0,05 m gleicher Periodendauer und gleicher Phasen entsteht.
127. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Schallwelle beträgt unter bestimmten Bedingungen in Luft $v_1 = 330\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und in Wasser $v_2 = 1450\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Die Normalenrichtung der Luftwelle schließt mit dem Wasserspiegel den Winkel $\varphi = 80°$ ein. Welcher Winkel entsteht beim Eintritt ins Wasser?
128. Eine stehende Welle entstand durch Überlagerung zweier Wellen mit der Frequenz $\nu = 475\ \mathrm{s^{-1}}$. Der Abstand zweier benachbarter Knoten beträgt 1,5 m. Wie groß ist die Ausbreitungs-

geschwindigkeit der Welle in dem Medium?

129. Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinal- und Transversalwellen in Stahl der Dichte $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, wenn der Zugelastizitätsmodul des betreffenden Stahls den Wert $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2} und der Schubmodul den Wert $G = 0{,}8 \times \times 10^6$ kp cm^{-2} hat?
130. Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Luft der Temperatur $t_1 = 10$ °C, wenn sie bei einer Temperatur $t_2 = 20$ °C den Wert $v_2 = 340$ m s^{-1} hat?
131. Ermitteln Sie das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten (POISSONsche Zahl) $\varkappa = c_p/c_v$ für Helium, wenn bekannt ist, daß die Schallgeschwindigkeit im Helium bei Normalbedingungen $v = 940$ m s^{-1} beträgt.
132. Mit Hilfe der KUNDTschen Röhre soll die Schallgeschwindigkeit in Holz ermittelt werden. Ein Holzstab, mit dem in der KUNDTschen Röhre eine stehende Welle erzeugt wird, hat die Länge $l = 1{,}35$ m. Durch Messung wurde der Abstand benachbarter Knoten der stehenden Welle im Rohr zu 0,1 m bestimmt. Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Holz, wenn sie bei gleicher Temperatur in Luft den Wert $v_L = = 340$ m s^{-1} hat?
133. Eine Lokomotive nähert sich einem Beobachter mit der Geschwindigkeit $v = 20$ m s^{-1}. Wie hoch ist der Grundton des Pfeifsignals der Lokomotive, den der in Ruhe befindliche Beobachter wahrnimmt, wenn ihn der Lokführer mit einer Frequenz $\nu = 300$ s^{-1} hört und wenn die Schallgeschwindigkeit in Luft unter den gegebenen Umständen den Wert $v_0 = 340$ m s^{-1} hat?
134. Ein Auto nähert sich einem Radfahrer. Beide bewegen sich relativ zur Straße mit den Geschwindigkeiten $u = 72$ km h^{-1} bzw. $v = 5$ m s^{-1} aufeinander zu. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des von der Autohupe ausgehenden Schalls hat bei gegebener Temperatur den Wert $c = 340$ m s^{-1}. Ermitteln Sie, auf das Wievielfache erhöht der Radfahrer den Ton des Hupsignals wahrnimmt.
135. Wenn wir eine Saite um 10 cm kürzen, erhöht sich ihre Grundfrequenz auf das 1,5fache. Berechnen Sie die ursprüngliche Länge der Saite, wenn in beiden Fällen ihre Spannung gleich groß ist.
136. Wie groß ist die physikalische Schallintensität, wenn der Lautstärkepegel des Schalls den Wert $L = 50$ dB annimmt?

2. *Wärmelehre und Molekularphysik*

2.1. Thermometrie und Kalorimetrie

Als **Wärme** bezeichnen wir das objektive Maß einer Eigenschaft von Körpern, die bei einer Berührung des Körpers in uns Wärmeempfindungen hervorruft. Es ist dies eine Zustandsgröße, und wir messen sie in der Weise, daß wir den einzelnen Wärmezuständen der Körper entsprechend einer bestimmten Vorschrift Zahlenwerte zuordnen. Auf diese Weise schaffen wir uns eine Temperaturskale.
In der Praxis messen wir Temperaturen gewöhnlich mit Hilfe des Wärmeausdehnungsvermögens von Flüssigkeiten oder der Wärmeausdehnung von Gasen.
Wenn das Volumen einer beliebigen Flüssigkeit, das sich unter dem Einfluß von Wärme vergrößert, bei der Gefriertemperatur des Wassers den Wert V_0, bei der Siedetemperatur des Wassers den Wert V_{100} und bei der gemessenen Temperatur den Wert V aufweist, dann wird die Temperatur wie folgt festgelegt:

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} 100\ °\mathrm{C}. \tag{1}$$

Wenn wir die Temperatur mit Hilfe von Gasdruckänderungen bei konstantem Volumen messen, wird die Temperatur – die sog. Gastemperatur – durch

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} 100\ °\mathrm{C} \tag{2}$$

bestimmt (p_0 Gasdruck bei der Gefriertemperatur des Wassers, p_{100} Gasdruck bei der Siedetemperatur, p Gasdruck bei der gemessenen Temperatur).
Oft erweist es sich als zweckmäßig, die Temperatur in der sog. absoluten oder KELVIN-Temperaturskale anzugeben. Der Zusammenhang zwischen der in der CELSIUS-Skale ausgedrückten Temperatur (t) und der in der KELVIN-Skale angegebe-

nen (T) wird durch die Beziehung definiert:

$$T = T_0 + t, \text{ wobei } T_0 = 273{,}15 \text{ °K ist.}$$

Mit der Änderung der Temperatur eines Körpers ändern sich auch dessen Abmessungen. Wir wollen hier die Längen-, Flächen- und Volumenausdehnung der Körper betrachten.
Bei der Temperatur 0 °C sei die Länge eines festen Stabes gleich l_0, dann wird – nach flüchtiger Betrachtung – bei einer Temperatur t seine Länge l durch die Beziehung

$$l = l_0(1 + \alpha t)$$

angegeben (α **Koeffizient der thermischen Längenausdehnung**). Er ist durch die Beziehung

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt}$$

festgelegt.
Die Abhängigkeit des Volumens fester Körper V von ihrer jeweiligen Temperatur wird – ebenfalls annähernd – durch die Beziehung

$$V = V_0(1 + \beta t)$$

angegeben (V_0 Körpervolumen bei 0 °C, t in CELSIUS-Skale gemessene Körpertemperatur und β **Koeffizient der thermischen Volumenausdehnung**);

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt}.$$

Bei Körpern, die aus isotropen Substanzen bestehen, hängt β mit dem Koeffizienten der thermischen Längenausdehnung durch die Beziehung zusammen:

$$\beta = 3\alpha.$$

Bei Flüssigkeiten ist nur die thermische Volumenausdehnung bedeutsam. Wenn V_0 das Flüssigkeitsvolumen in einem Gefäß bei der Temperatur t_0 und V das Volumen bedeutet, das von der Flüssigkeit bei der Temperatur t eingenommen wird, dann gibt der Ausdruck

$$\beta_S = \frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{t - t_0}$$

nur den Durchschnittswert des scheinbaren Koeffizienten der Volumenänderung an, denn bei der Temperaturänderung ändert sich natürlich auch das Volumen des Gefäßes. Wenn β_G den Koeffizienten der Volumenausdehnung des Gefäßes bedeutet,

dann ist der tatsächliche Wert des durchschnittlichen Koeffizienten der Volumenausdehnung der Flüssigkeit bestimmt durch

$$\beta = \beta_S + \beta_G.$$

Bei gegenseitiger Berührung zweier oder mehrerer Körper von ungleicher Temperatur tritt nach einer bestimmten Zeit Temperaturausgleich ein. In genauer Übereinstimmung mit unserer Beobachtung erklären wir uns diesen Sachverhalt mit der Vorstellung, daß Körper mit höherer Temperatur *Wärme* an solche mit geringerer Temperatur abgeben, und zwar so lange, bis ihre Temperaturen sich ausgeglichen haben.
Wenn ein System von Körpern von seiner Umgebung thermisch vollkommen isoliert ist und wenn die einzelnen Körper des Systems Energie untereinander nur durch Wärme austauschen können, dann ist die Summe der jeweils abgegebenen gleich der Summe der aufgenommenen Wärme (*Gesetz von der Erhaltung der Wärme*).
Über die physikalische Natur der Wärme vgl. 2.3.
Wenn wir unter der **Wärmekapazität** eines Stoffes C die zu seiner Erwärmung um 1 grd notwendige Wärme und unter der **spezifischen Wärmekapazität** c die Wärmekapazität einer Masseeinheit des betreffenden Stoffes verstehen, dann gilt

$$c = \frac{C}{m},$$

und die Wärmemenge, die ein Körper bei Änderung seiner Temperatur von t_1 auf t_2 aufnimmt, ist durch die Beziehung

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} mc \, \mathrm{d}t$$

gegeben, in der m die Masse des Stoffes bedeutet.
Wenn die spezifische Wärmekapazität konstant ist, so ergibt sich

$$Q = mc\,(t_2 - t_1).$$

Die Wärmemenge, die ein Stoff bei Änderung seiner Temperatur von t_1 auf t_2 abgibt, ist durch die Beziehung

$$Q' = -Q = mc\,(t_1 - t_2)$$

gegeben. Wärmemengen werden in Kalorimetern gemessen. Als den *Wasserwert* eines Kalorimeters bezeichnen wir die Wärmekapazität des gesamten inneren Teils des Kalorimeters, dessen Temperatur sich beim Meßvorgang verändert. Wenn die Wassermasse im Kalorimeter mit m_0 angegeben wird, ihre spezifische Wärmekapa-

zität c_0 ist und die Massen, die sich bei der Messung erwärmen, m_1, m_2, m_3, ... sind, deren spezifische Wärmekapazitäten jeweils c_1, c_2, c_3, ... betragen, dann ist der Wasserwert des Kalorimeters durch die Beziehung

$$C_W = m_0 c_0 + m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots$$

gegeben.

B Beispiele

119. Ein bestimmtes Volumen des Gases Wasserstoff ist in einem Gefäß eingeschlossen, dessen Eigenvolumen konstant ist. Der Wasserstoff habe in tauendem Eis einen Druck von $p_0 = 1000$ Torr. Wenn wir das Gefäß in ein Warmbad tauchen, so steigt der Druck des in ihm eingeschlossenen Wasserstoffs um den Betrag $\Delta p = 217$ Torr an. Berechnen Sie die Temperatur des Warmbades.

Lösung

Mit Hilfe der beschriebenen Vorrichtung kann man die Temperatur auf Grund der Druckänderung des bei konstantem Volumen gehaltenen Wasserstoffs bestimmen. Wenn der Wasserstoff im Dampf von siedendem Wasser bei einem Druck $b_0 = 760$ Torr den Druck p_{100} aufweist, dann wird die Temperatur – angegeben in °C – errechnet aus

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0}\, 100\ °\mathrm{C} = \frac{\Delta p}{p_0}\, \frac{100\ °\mathrm{C} \cdot p_0}{p_{100} - p_0}\,.$$

Durch Messen wurde ermittelt, daß der Ausdruck

$$\frac{100\ °\mathrm{C} \cdot p_0}{p_{100} - p_0}$$

für alle ausreichend verdünnten Gase den gleichen Wert $1/\gamma = 273{,}15$ °C ergibt. Daher findet man

$$t = \frac{\Delta p}{p_0}\, \frac{1}{\gamma}\,;$$

$$t = \frac{217\ \mathrm{Torr} \cdot 273{,}15\ °\mathrm{C}}{1000\ \mathrm{Torr}} = \underline{59{,}3\ °\mathrm{C}.}$$

120. Ein in schmelzendes Eis getauchtes Thermometer zeigt eine Temperatur von $t_1 = 0{,}3$ °C an, in den Dampf siedenden Wassers gehalten jedoch eine Temperatur von $t_2 =$ $= 101{,}5$ °C. Wenn wir es in den Dampf von siedendem Äthylalkohol halten, weist es eine Temperatur $t_n = 79{,}7$ °C aus. Berechnen Sie, wie groß die tatsächliche Siedetemperatur des Äthylalkohols ist (Angabe in °C), wenn bei jeder Temperaturablesung ein Druck $b_0 = 760$ Torr herrscht.

Lösung

Die Differenz $t_2 - t_1$, die am Thermometer abgelesen wurde, entspricht einer tatsächlichen Temperaturänderung um 100 grd. Wenn das Thermometer in ein Medium von der Temperatur t gebracht wird, dann ändert sich die Anzeige t_1 auf dem Thermometer um den Wert

$$\frac{t_2 - t_1}{100\ °C}\, t,$$

und wir lesen auf ihm eine Temperatur vom Betrag

$$t_n = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{100\ °C}\, t$$

ab, woraus wir die gesuchte tatsächliche Temperatur des siedenden Äthylalkohols wie folgt bestimmen:

$$t = 100\ °C\, \frac{t_n - t_1}{t_2 - t_1} = 100\ °C\, \frac{79{,}7\ °C - 0{,}3\ °C}{101{,}5\ °C - 0{,}3\ °C} = \underline{78{,}5\ °C}.$$

121. Ein Thermometer wurde mit Wasser gefüllt. Ermitteln Sie, für welche Temperaturen in der CELSIUS-Skale im Bereich zwischen 0 und 10 °C das Thermometer gleiche Werte anzeigen wird. Die Abhängigkeit des Wasservolumens von der Temperatur kann in diesem Bereich durch die Beziehung

$$V = V_0(1 + at + bt^2) \tag{1}$$

ausgedrückt werden ($a = 6{,}105 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{grd}^{-1}$, $b = -7{,}733 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{grd}^{-2}$, V_0 Wasservolumen bei 0 °C).

Lösung

Bei gleichen Wasservolumina wird das Thermometer die gleichen Werte anzeigen. Da die Abhängigkeit des Volumens von der Temperatur $[V(t)]$ quadratisch ist, existieren zwei Temperaturwerte t_1 und t_2, bei denen das Wasser im Temperaturbereich zwischen 0 °C und 10 °C ein gleiches Volumen hat.
Durch Umformen von Gl. (1) erhalten wir die quadratische Gleichung

$$t^2 + \frac{a}{b}\, t + \frac{1 - \frac{V}{V_0}}{b} = 0.$$

Die Wurzeln t_1 und t_2 entsprechen der Beziehung

$$t_1 + t_2 = -\frac{a}{b} = \underline{7{,}9\ \mathrm{grd}}.$$

Zu jeder Temperatur t_1 gibt es im Temperaturbereich zwischen 0 und 7,9 °C einen Temperaturwert t_2, der durch die Beziehung $t_2 = 7{,}9\ °C - t_1$ bestimmt wird. Bei dieser Temperatur zeigt das Wasserthermometer den gleichen Wert an.

122. Bei einem Messingpendel beträgt bei einer Temperatur $t_1 = 10$ °C die Zeit für eine Schwingung $\tau_1 = 1$ s. Um welchen Betrag ändert sich diese Zeit, wenn die Temperatur auf $t_2 = 25$ °C ansteigt? Um wieviel würde eine Uhr im Laufe eines Tages nachgehen, die mit einem derartigen Pendel angetrieben würde?

Lösung

Die Zeit für eine Schwingung (eine halbe Periodendauer) eines physikalischen Pendels ist durch die Beziehung

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

bestimmt, in der J das Trägheitsmoment des Pendels bezüglich seiner Schwingungsachse, mg das Gewicht des Pendels und a den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse darstellt.
Wenn wir voraussetzen, daß in unserem Beispiel das angeführte Pendel die Form eines homogenen Stabes mit überall gleichem Querschnitt hat, daß seine Länge l beträgt und daß es um die durch den Endpunkt des Stabes senkrecht zu seiner Länge gerichtete Achse schwingt, dann beträgt das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse

$$J = \frac{ml^2}{3}\,; \quad a = \frac{l}{2}\,.$$

Für die Zeit einer Schwingung kann man dann schreiben

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Wenn das Pendel bei einer Temperatur t_1 die Länge l_1 und bei einer anderen Temperatur t_2 die Länge l_2 hat, dann ergibt sich für den Quotienten der Schwingungszeiten

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\,. \tag{1}$$

Für nicht allzu hohe Temperaturen gelten weiter die Beziehungen

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1),$$

$$l_2 = l_0(1 + \alpha t_2),$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} \approx 1 + \alpha(t_2 - t_1).$$

Nach Einsetzen in die Gl. (1) erhalten wir als Zeit für eine Schwingung

$$\tau_2 = \tau_1 \sqrt{1 + \alpha(t_2 - t_1)} = 1\,\text{s} \sqrt{1 + 19 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}\, 15\,\text{grd}} = \underline{1{,}00014\,\text{s}.}$$

Ein Sekundenpendel vollführt bei $t_1 = 10\,°\text{C}$ während eines Tages $n = 86400$ Schwingungen, dagegen bei einer Temperatur von $t_2 = 25\,°\text{C}$ nur

$$n' = \frac{86400}{1{,}00014} = 86388$$

Schwingungen. Demzufolge wird die Uhr täglich um eine Differenz $\underline{n - n' = 12\,\text{s}}$ zurückbleiben.

123. Zwei gleiche Metallbänder der Dicke $d = 0{,}2$ cm sind miteinander so verschweißt, daß sie ein ebenes Plättchen bilden, wenn ihre Temperatur gerade $t_0 = 0\,°\text{C}$ beträgt. Wenn wir das aus einem Kupfer- und einem Eisenband bestehende Plättchen aber erwärmen, so deformiert es sich zur Gestalt eines Kreisbogens (Bild 83). Berechnen Sie den Radius seiner Krümmung, wenn das Plättchen auf eine Temperatur von $t = 400\,°\text{C}$ erhitzt worden ist.

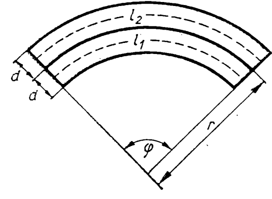


Bild 83

Lösung

Wenn bei der Temperatur $t_0 = 0\,°\text{C}$ die Länge der Bänder den Wert l_0 hat, dann wird das Kupferband nach dem Erhitzen auf die Temperatur t die Länge

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 t)$$

und das Eisenband

$$l_2 = l_0(1 + \alpha_2 t)$$

mit

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \alpha_2 t}{1 + \alpha_1 t} = 1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\, t$$

haben. Wie aus Bild 83 hervorgeht, stellen die Strecken l_1 und l_2 Kreisbögen mit den Radien $r - d/2$ und $r + d/2$ dar. Daher messen wir, wenn der Zentriwinkel mit φ angegeben wird, im Bogenmaß

$$l_2 = \left(r + \frac{d}{2}\right)\varphi; \quad l_1 = \left(r - \frac{d}{2}\right)\varphi$$

und

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{r + \dfrac{d}{2}}{r - \dfrac{d}{2}} \approx 1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\, t,$$

woraus wir nach Umformung für den Radius die Beziehung

$$r = \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \frac{d}{2}$$

erhalten. Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$r = \frac{0{,}2\,\text{cm}}{(17 - 12)\,10^{-6}\,\text{grd}^{-1}\,400\,\text{grd}} + \frac{0{,}2\,\text{cm}}{2} = \underline{1{,}001\,\text{m}}.$$

124. Ein Stahlstab mit dem Querschnitt $A = 2\,\text{cm}^2$ soll von der Temperatur $t_0 = 0\,°\text{C}$ auf eine Temperatur $t = 50\,°\text{C}$ erhitzt und danach wieder auf seine ursprüngliche Temperatur abgeschreckt werden. Berechnen Sie, mit welcher in Achsrichtung angreifenden minimalen Kraft man auf den Stab einwirken muß, damit er sich bei der Abkühlung nicht verkürzt ($E = 2{,}1 \cdot 10^6\,\text{kp cm}^{-2}$). Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß sich der Elastizitätsmodul mit veränderter Temperatur nicht ändert.

Lösung

Wenn sich die Temperatur um den Betrag Δt ändert, dann erfährt der Stab eine Längenänderung der Größe

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t. \tag{1}$$

Um den gleichen Betrag würde er sich bei der nachfolgenden Abschreckung wieder zusammenziehen. Um beim Abschrecken diese Verkürzung zu unterbinden, muß man in Richtung seiner Achse mit einer Kraft einwirken, die ihrerseits allein die gleiche Längenänderung Δl hervorrufen würde.
Nach dem HOOKEschen Gesetz ist

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{A},$$

wobei E der Zugelastizitätsmodul des Stabes ist. Daraus finden wir

$$F = \frac{EA}{l_0}\Delta l,$$

und wenn wir für Δl die rechte Seite der Gl. (1) einsetzen, folgt

$$F = EA\Delta t\alpha = 2{,}1 \cdot 10^6\,\text{kp cm}^{-2} \cdot 2\,\text{cm}^2 \cdot 50\,\text{grd} \cdot 12 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1} = \underline{2520\,\text{kp}}.$$

125. Berechnen Sie, wie groß die Dichte des Quecksilbers bei 0 °C und bei 100 °C ist, wenn es bei 10 °C die Dichte $\varrho_{10} = 13{,}57\,\text{g cm}^{-3}$ hat.

Lösung

Das Volumen einer bestimmten Quecksilbermenge der Masse m sei bei 0 °C gleich V_0 gesetzt, und bei einer Temperatur t sei es V_t. Dann können wir schreiben

$$m = V_t\,\varrho_t; \quad m = V_0\,\varrho_0.$$

Aus dem Vergleich beider Ausdrücke resultiert

$$\varrho_t = \frac{V_0}{V_t} \varrho_0 . \tag{1}$$

Bei nicht allzu hohen Temperaturen wird die Abhängigkeit des Volumens von der Temperatur annähernd durch die Beziehung

$$V_t = V_0(1 + \beta t)$$

ausgedrückt.
Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$\varrho_t = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t} .$$

Daraus ermittelt man

$$\varrho_0 = \varrho_t(1 + \beta t),$$

und es ergibt sich

$$\varrho_0 = 13{,}57 \text{ g cm}^{-3} (1 + 182 \cdot 10^{-5} \text{ grd}^{-1}) = \underline{13{,}59 \text{ g cm}^{-3}}$$

und daher

$$\varrho_{100} = \frac{13{,}59 \text{ g cm}^{-3}}{1 + 18{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \text{ grd}} = \underline{13{,}34 \text{ g cm}^{-3}} .$$

126. Ein Glasgefäß hat leer das Gewicht $G_0 = 0{,}1$ kp. Mit Quecksilber gefüllt, hat es bei einer Temperatur von 0 °C das Gewicht $G_1 = 1{,}431$ kp. Wenn wir das Gefäß auf die Temperatur $t = 40$ °C erwärmen, fließt ein Teil des darin enthaltenen Quecksilbers aus, so daß das Gefäß mit dem darin verbleibenden Quecksilber ein Gewicht von $G_2 = 1{,}423$ kp annimmt. Berechnen Sie, wie groß der tatsächliche Koeffizient der Volumenausdehnung des Quecksilbers ist, wenn der Längenausdehnungskoeffizient des Glases mit α_G angegeben wird.

Lösung

Der Zusammenhang zwischen dem tatsächlichen Wert β und dem scheinbaren Wert β_S des Volumenausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers ist durch die Gleichung

$$\beta = \beta_S + \beta_G \tag{1}$$

gegeben, in der β_G den Volumenausdehnungskoeffizienten des Glases bedeutet.
Wenn V bzw. V_0 die Volumina angeben, die das Quecksilber bei den Temperaturen t bzw. t_0 annimmt, dann ist die Beziehung

$$\beta_S = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{\Delta V}{V_0 t} \tag{2}$$

erfüllt. Bei der Temperatur t_0 nimmt das Quecksilber ein Volumen

$$V_0 = \frac{m}{\varrho_0} = \frac{G_1 - G_0}{g \varrho_0} \tag{3}$$

ein. Bei einer Temperaturänderung von t_0 auf t wird die Volumenänderung des Quecksilbers

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{\Delta m}{\varrho}$$

sein, wobei Δm die aus dem Gefäß ausgeflossene Quecksilbermasse bedeutet. Unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Dichte des Quecksilbers (siehe auch vorhergehendes Beispiel!) finden wir

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t}$$

und

$$\Delta V = \frac{G_1 - G_2}{\varrho_0 g} (1 + \beta t). \tag{4}$$

Wenn wir die Gln. (3) u. (4) in die Gln. (2) und (1) einsetzen, erhalten wir

$$\beta = \frac{\dfrac{G_1 - G_2}{\varrho_0 g} (1 + \beta t)}{\dfrac{G_1 - G_0}{\varrho_0 g} t},$$

woraus nach einer einfachen Umformung für den gesuchten Koeffizienten folgende Beziehung gefunden wird:

$$\beta = \frac{G_1 - G_2 + \beta_G t (G_1 - G_0)}{(G_2 - G_0) t}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $\beta_G = 3\alpha_G$, ergibt die Heranziehung der gegebenen Werte

$$\beta = \frac{1{,}431\ \text{kp} - 1{,}423\ \text{kp} + 30 \cdot 10^{-6}\ \text{grd}^{-1}\ 40\ \text{grd}\ (1{,}431\ \text{kp} - 0{,}1\ \text{kp})}{(1{,}423\ \text{kp} - 0{,}1\ \text{kp})\ 40\ \text{grd}},$$

$$\underline{\beta = 18{,}1 \cdot 10^{-5}\ \text{grd}^{-1}}.$$

127. Bei einer Temperatur von $t_1 = 20$ °C wird mittels eines Barometers, das eine Meßvorrichtung aus Messing enthält, ein Luftdruck von $b_1 = 750$ Torr gemessen. Die Meßvorrichtung zeigt bei 0 °C genau an. Berechnen Sie, welchen Luftdruck das benutzte Instrument bei 0 °C anzeigen würde.

Lösung

Bei einer Temperaturänderung ändert sich die Dichte des Quecksilbers und damit auch die Höhe der Quecksilbersäule, die sich mit dem herrschenden Luftdruck im Gleichgewicht befindet. Es ändert sich aber auch die Länge der verwendeten Anzeigeskale. Deshalb reduzieren wir gewöhnlich den am Barometer abgelesenen Wert auf die Bezugstemperatur 0 °C.

Wenn die tatsächliche Höhe der Quecksilbersäule bei der Temperatur t den Wert b_1^* und bei 0 °C den Wert b_0 hat, dann ist die Beziehung

$$b_0 \varrho_0 g = b_1^* \varrho g$$

erfüllt, worin die Bedingung enthalten ist, daß die Drücke bei beiden Temperaturen gleich sein müssen. Die Temperaturabhängigkeit der Quecksilberdichte ist durch die Formel

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t}$$

gegeben. Deshalb finden wir

$$b_0 \varrho_0 g = b_1^* \frac{\varrho_0}{1 + \beta t} g. \tag{1}$$

Unter Berücksichtigung des Umstands, daß die Meßvorrichtung des Barometers in ihrer Länge temperaturabhängig ist und nur bei der Temperatur 0 °C genau stimmt, gehört zum abgelesenen Wert b_1 bei der Temperatur t_1 der richtige Wert b_1^* entsprechend der Beziehung

$$b_1^* = b_1 + b_1 \alpha t_1 .$$

Nach Einsetzen des gefundenen Wertes anstelle b_1^* in Gl. (1) erhalten wir für den reduzierten Druckwert

$$b_0 = b_1 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \beta t_1} \approx b_1[1 + (\alpha - \beta) t_1].$$

Damit wir die reduzierte Druckangabe b_0 erhalten, müssen wir an dem gemessenen Wert b_1 eine Korrektur vornehmen, die besagt:

$$\Delta b = b_1(\alpha - \beta) t_1 .$$

Diese Korrektur hat in Zahlen ausgedrückt den Wert

$$\Delta b = 750 \text{ Torr } (19 \cdot 10^{-6} - 182 \cdot 10^{-6}) \text{ grd}^{-1}\, 20 \text{ grd} = -2{,}41 \text{ Torr},$$

so daß wir dann weiter finden

$$b_0 = b_1 + \Delta b = \underline{747{,}6 \text{ Torr}}.$$

128. In ein Wasserbad der Masse $m = 6{,}7$ g wird ein Thermometer eingetaucht, das nach einem Temperaturanstieg von $\Delta t = 14{,}6$ grd eine endgültige Temperatur von $t_1 = 32{,}4$ °C anzeigt. Der Wasserwert des Thermometers hat die Größe $C_W = 0{,}46$ cal grd^{-1}. Berechnen Sie die Temperatur, die das Wasser vor Beginn der Messung hatte.

Lösung

Das Thermometer mit dem Wasserwert C_W erwärmte sich nach dem Eintauchen um die Temperatur Δt und nahm dabei die Wärmemenge

$$Q = C_W \Delta t$$

auf. Dabei kühlte sich das Wasser von der ursprünglichen Temperatur t auf die gemessene Temperatur t_1 ab. t_1 ist die nach Temperaturausgleich vom Thermometer angezeigte gleiche Temperatur von Wasser und Thermometer. Zur Erwärmung des Thermometers gab das Wasser die Wärmemenge

$$Q' = mc\,(t - t_1)$$

ab. Unter Voraussetzung einer idealen Wärmeisolation gilt nach dem Gesetz über die Erhaltung der Wärme

$$Q = Q'$$

oder

$$mc\,(t - t_1) = C_w \Delta t,$$

woraus wir finden

$$t = \frac{C_W \Delta t + mct_1}{mc},$$

d. h.,

$$t = \frac{0{,}46 \text{ cal grd}^{-1} \cdot 14{,}6 \text{ grd} + 6{,}7 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1} \cdot 32{,}4 \text{ grd}}{6{,}7 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1}} = \underline{33{,}4\ °\text{C}}.$$

129. Es soll die spezifische Wärmekapazität von Silber bestimmt werden. Dazu wird ein Silberstück ($m_1 = 100$ g) auf $t_1 = 100$ °C erhitzt und in das Wasserbad eines Messingkalorimeters gelegt. Zusammen mit dem Mischer hat der Innenteil des Kalorimeters eine Masse $m_2 = 124$ g, die darin enthaltene Wassermenge hat die Masse $m_3 = 1000$ g; die Anfangstemperatur des Wassers betrage $t_3 = 17$ °C. Nach Einbringen des Silbers stabilisiert sich die Gesamttemperatur auf den Wert $t_0 = 17{,}5$ °C. Wie groß ist demnach die spezifische Wärmekapazität des Silbers?

Lösung

Die Temperatur des Silbers nimmt nach Einbringen ins Kalorimeter vom Wert t_1 auf t_0 ab, wobei das Silber die Wärme abgibt

$$Q' = m_1 c_1 (t_1 - t_0).$$

Wir nehmen die spezifische Wärmekapazität des Silbers hierbei als konstant an. Kalorimeter und Zubehörteile sowie das darin enthaltene Wasser nehmen Wärme auf, wobei die Temperatur von t_3 auf t_0 ansteigt. Wenn C_W der Wasserwert des Kalorimeters ist, dann mußte es bei Erwärmung von t_3 auf t_0 die Wärmemenge aufnehmen

$$Q = C_W (t_0 - t_3).$$

Wenn wir unser System als von der Umwelt thermisch isoliert betrachten, gilt entsprechend dem Gesetz von der Erhaltung der Wärme

$$Q = Q',$$

was nach Einsetzen der entsprechenden Größen ergibt

$$m_1 c_1 (t_1 - t_0) = C_W (t_0 - t_3).$$

Daraus wiederum entnehmen wir

$$c_1 = \frac{C_W(t_0 - t_3)}{m_1(t_1 - t_0)}.$$

Da der Wasserwert des Kalorimeters, der die Wärmekapazität von Kalorimeterinnengefäß plus Mischer plus Wasser darstellt, die Größe $C_W = m_2c_2 + m_3c_3$ hat, wobei c_2 und c_3 die spezifischen Wärmekapazitäten von Messing und Wasser bedeuten, können wir auch schreiben

$$c_1 = \frac{(m_2c_2 + m_3c_3)(t_0 - t_3)}{m_1(t_1 - t_0)}.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir somit

$$c_1 = \frac{(124 \cdot 0{,}093 + 1000 \cdot 1)\,\text{g cal g}^{-1}\,\text{grd}^{-1}\,(17{,}5 - 17{,}0)\,\text{grd}}{100\,\text{g}\,(100 - 17{,}5)\,\text{grd}} =$$

$$= \underline{0{,}0613\,\text{cal g}^{-1}\,\text{grd}^{-1}}.$$

130. In einem wärmeisolierten Gefäß bringen wir Wasserdampf der Masse m_1 und der Temperatur $t_1 = 100\,°\text{C}$ mit Wasser der Masse m_0 und der Temperatur t_0 und mit Eis der Masse m und der Temperatur $t_2 = 0\,°\text{C}$ in unmittelbare Berührung. Nach Ablauf einer bestimmten Zeit gehen alle drei Komponenten in die flüssige Phase über. Wie groß ist die sich einstellende Endtemperatur? Die Verdampfungswärme des Wassers sei mit r, die Schmelzwärme des Eises mit q gegeben. Es sei vorausgesetzt, daß die Wärmekapazität des Gefäßes vernachlässigt werden kann.

Lösung

Beim Entstehen einer einzigen Phase, der Flüssigkeitsphase, kommt es im Gefäß zu folgenden Umwandlungen:

a) Der Wasserdampf mit der Temperatur t_1 kondensiert zu Wasser gleicher Temperatur, wobei die Wärme $Q'_{1,0} = m_1 r$ frei wird. Das so gebildete Wasser der Temperatur t_1 kühlt sich auf die Endtemperatur t ab und gibt dabei eine Wärme vom Betrag $Q'_{1,1} = m_1 c\,(t_1 - t)$ ab.

b) Das Eis der Temperatur t_2 schmilzt zu Wasser gleicher Temperatur, wozu ein von außen zuzuführender Wärmebetrag der Größe $Q_{2,0} = m_2 q$ benötigt wird. Das so gebildete Wasser erwärmt sich von der Temperatur t_2 auf die Endtemperatur t, wozu abermals Wärme vom Betrag $Q_{2,1} = m_2 c\,(t - t_2)$ benötigt wird.

c) Das Wasser der Temperatur t_0 verändert seine Temperatur auf t, wozu eine Wärmemenge $Q_3 = m_0 c\,(t - t_0)$ aufgebracht werden muß.

Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Wärme ist

$$Q'_{1,0} + Q'_{1,1} = Q_{2,0} + Q_{2,1} + Q_3$$

oder

$$m_1 r + m_1 c\,(t_1 - t) = m_2 q + m_2 c\,(t - t_2) + m_0 c\,(t - t_0).$$

Daraus erhalten wir nach kurzer Umformung

$$t = \frac{m_1ct_1 + m_2ct_2 + m_0ct_0 + m_1r - m_2q}{m_1c + m_2c + m_0c}.$$

A

Aufgaben

137. Ein Quecksilberthermometer ist mit einer Millimeterskale versehen. In schmelzendes Eis getaucht, liegt der Meniskus der Quecksilbersäule bei einer Höhe von 20 mm. In dem aus siedendem Wasser bei atmosphärischem Normaldruck aufsteigenden Dampf liegt er bei 60 mm. Wie hoch ist die in Grad Celsius ausgedrückte Temperatur, wenn der Meniskus bei a) 26 mm, b) 76 mm und c) 0 mm Höhe liegt?
138. Ein Messing- und ein Aluminiumstab haben bei der Temperatur von 20 °C die gleiche Länge von einem Meter. Wie groß ist ihre Längendifferenz, wenn wir beide auf 100 °C erwärmt haben?
139. Eine Messingkugel hat bei $t_1 = 15$ °C einen Durchmesser $d = 4$ cm. Berechnen Sie den Durchmesser einer Öffnung, durch welche die auf eine Temperatur $t = 555$ °C erhitzte Kugel gerade noch passen würde.
140. Die Entfernung zweier Punkte wurde mittels Stahlmeßbands bei $t_1 = 30$ °C zu $l_1 = 186$ m bestimmt. Wie groß ist ihr tatsächlicher Abstand, wenn das Meßband für eine Temperatur $t_0 = 18$ °C geeicht wurde?
141. Das Rad einer Lokomotive hat bei der Temperatur 0 °C einen Radius der Größe $r_0 = 1$ m. Wie groß ist die Differenz der auf einer Strecke $l = 100$ km vollführten Raddrehungen, wenn die Strecke einmal im Sommer bei der Temperatur $t_1 = 25$ °C und einmal im Winter bei der Temperatur $t_2 = -25$ °C durchfahren wird? Der Längenausdehnungskoeffizient des Radwerkstoffs habe die Größe $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}.
142. Eine homogene Eisenstange der Masse $m = 3$ kg ist bei 8 °C genau einen Meter lang. Berechnen Sie, um welchen Betrag sich das Trägheitsmoment dieser Stange bezüglich einer senkrecht zur Stange durch den Endpunkt gehenden Drehachse ändert, wenn die Stange auf 100 °C erwärmt wird.
143. Um welchen Betrag müßte der auf einem Quecksilbervolumen lastende Außendruck erhöht werden, damit sich das Quecksilbervolumen bei einer Erwärmung von 0 °C auf 10 °C nicht verändert? Der Kompressibilitätskoeffizient des Quecksilbers beträgt $\varkappa = 39 \cdot 10^{-6}$ atm^{-1}.
144. Eine an beiden Enden befestigte Stahlsaite vom Durchmesser $d = 1$ mm übt bei einer Temperatur $t_1 = 28$ °C auf ihre Befestigungen eine Kraft $F_1 = 10$ kp aus. Berechnen Sie, mit welcher Kraft sich die Saite spannt, wenn sie bei konstant gehaltener Länge auf eine Temperatur $t_2 = -12$ °C abgekühlt wird.
145. Ein Eisenstab berührt mit seinen beiden Enden feste Wände. Berechnen Sie, um welchen Betrag sich seine Temperatur erhöhen muß, damit er auf die Wände einen Druck der Größe $\sigma = 50$ kp cm^{-2} ausübt.
146. Zwei gleichartige Thermometer sind bei einer Temperatur von 0 °C mit jeweils gleichen Quecksilber- und Spiritusmengen gefüllt worden. Bestimmen Sie den Zusammenhang der beiden Flüssigkeitssäulen, die jeweils einem Grad Celsius auf der Quecksilber- und der Spiritusskale entsprechen, wenn die zugehörigen Volumenausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers, des Spiritus

sowie der Längenausdehnungskoeffizient des Glases bekannt sind.

147. Ein Glaspyknometer mit dem Volumen $V_0 = 15\ \mathrm{cm}^3$ wird bei einer Temperatur $t_0 = 0\ °\mathrm{C}$ mit Quecksilber gefüllt. Wenn die Temperatur des Systems auf $t_1 = 100\ °\mathrm{C}$ erhöht wird, fließt aus dem Pyknometer Quecksilber vom Volumen $\Delta V = 234\ \mathrm{mm}^3$ aus. Berechnen Sie den Raumausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers.

148. Ein Eisenquader schwimmt bei 0 °C so in Quecksilber, daß er zu $^5/_8$ seiner Höhe eingetaucht ist. Bestimmen Sie, um welchen Betrag sich die Eintauchtiefe verändert, wenn die Temperatur auf 100 °C erhöht wird.

149. Ein Behälter enthält 35 kg Härteöl der Temperatur 30 °C. Es wird ein Stahlgegenstand eingetaucht, der vorher auf eine Temperatur von 800 °C erhitzt worden war, worauf sich eine Endtemperatur von 58 °C einstellt. Berechnen Sie die Masse des zu härtenden Gegenstandes.

150. Aus einem Schmelzofen entnehmen wir eine Platinkugel von 100 g Masse und legen sie sofort in ein Messingkalorimeter von 200 g Masse, in dem 1 kg Wasser mit einer Temperatur von 10 °C enthalten ist. Bestimmen Sie die Hochofentemperatur, wenn sich nach Einbringen der Kugel ins Kalorimeter eine Endtemperatur von 14 °C einstellte.

151. In ein Messingkalorimeter von 100 g Masse, das 250 g Wasser mit einer Temperatur von 10 °C enthält, legen wir gleichzeitig einen Eisenzylinder von 50 g Masse und der Temperatur 150 °C, einen Aluminiumzylinder von 30 g Masse und der Temperatur 90 °C sowie einen Bleizylinder von 30 g Masse und der Temperatur 75 °C. Wie hoch wird die sich einstellende endgültige Mischtemperatur im Kalorimeter sein?

152. Welche Menge Eis mit einer Temperatur von 0 °C muß man mit 6 g Wasser von 90 °C mischen, damit die resultierende Temperatur in einem Kalorimeter, dessen Wärmekapazität vernachlässigt wird, genau 5 °C beträgt?

153. Ein großes Thermometer, das auf 100 °C erhitzt worden ist, wird in eine größere Menge schmelzenden Eises getaucht. Während des Wärmeausgleichs auf eine Temperatur von 0 °C schmilzt eine Eismenge der Masse $m_0 = 125$ g. Danach wird das solcherart abgekühlte Thermometer in ein wärmeisoliertes Gefäß gebracht, in dem sich Quecksilber der Masse $m_1 = 5$ kg bei der Temperatur $t_1 = 15\ °\mathrm{C}$ befindet. Welche Temperatur zeigt das Thermometer nach dem im Quecksilber erfolgenden Wärmeausgleich an? Die Wärmekapazität des Gefäßes kann vernachlässigt werden.

154. In 1 kg Wasser von 35 °C sind 20 kg Quecksilber der Temperatur 110 °C sowie eine unbekannte Menge Eis von −3 °C gegeben worden. Nach völligem Schmelzen des Eises stellt sich eine Endtemperatur von 60 °C ein. Die Wärmekapazität des Gefäßes sei vernachlässigt. Welche Menge Eis wurde zugefügt?

155. Ein Kupferkalorimeter der Masse $m_0 = 120$ g enthält die Masse $m_1 = 200$ g Wasser der Temperatur $t_1 = 18\ °\mathrm{C}$. Nach Einlassen von Wasserdampf der Masse $m_2 = 20$ g und der Temperatur $t_2 = 100\ °\mathrm{C}$ stellt sich eine Endtemperatur $t = 71{,}6\ °\mathrm{C}$ ein. Wie groß ist die Kondensationswärme des Wassers?

156. In einem Kupferkalorimeter von 200 g Masse befinden sich bei 0 °C, also gleicher Temperatur, 300 g Wasser und 20 g Eis. Berechnen Sie, wieviel Wasserdampf von 150 °C man dem Kalorimeter zuführen muß, damit sich darin nach gründlichem Mischen eine Endtemperatur von 40 °C einstellt! Die spezifische Wärmekapazität des Wasserdampfes beträgt bei konstantem Druck $c_p = 0{,}48\ \mathrm{cal\ g^{-1}\ grd^{-1}}$.

2.2. Ideale Gase – Kinetische Gastheorie

Der momentane Zustand, in dem sich eine bestimmte Menge eines Gases befindet, ist durch drei miteinander zusammenhängende **Zustandsgrößen** bestimmt: den *Druck* p, das *Gasvolumen* V und die *Temperatur* T.
Wenn man voraussetzt, daß von den genannten drei Zustandsgrößen eine konstant bleibt, dann hängen die beiden jeweils anderen gemäß dem BOYLE-MARIOTTEschen und dem GAY-LUSSACschen Gesetz wechselseitig voneinander ab. Das BOYLE-MARIOTTEsche Gesetz besagt:
Bei konstanter Gastemperatur ist das Produkt aus dem Druck p und dem Volumen V einer bestimmten Gasmenge praktisch konstant, also

$$pV = p_0 V_0 = \text{const.}$$

Dabei ist p_0 der Druck und V_0 das Volumen beispielsweise für einen Anfangszustand.
Entsprechend dem Gesetz von GAY-LUSSAC wird die Abhängigkeit des Volumens einer bestimmten Gasmenge von seiner Temperatur bei konstant gehaltenem Druck durch die Gleichung

$$V = \frac{V_0 T}{T_0}$$

und die Abhängigkeit des Druckes von der Temperatur – diesmal bei konstant gehaltenem Volumen – durch die Gleichung

$$p = \frac{p_0 T}{T_0}$$

ausgedrückt (V_0 Volumen, p_0 Druck, T_0 Temperatur). Die Temperatur wird in Graden der KELVIN-Skale angegeben.

Die gegenseitige Abhängigkeit aller drei Zustandsgrößen wird durch die **Zustandsgleichung** ausgedrückt. Entsprechend dieser Gleichung gilt:

Das Produkt aus Druck und Volumen, geteilt durch die absolute Temperatur, hat für eine bestimmte Gasmenge einen konstanten Wert, und zwar

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \text{const.}$$

p_0, V_0 und T_0 sind die Werte für Druck, Volumen und absolute Temperatur beispielsweise für den Anfangszustand.

Die Konstante $\frac{p_0 V_0}{T_0}$ hat – bezogen auf ein Grammolekül[1]) Gas – für alle Gase den gleichen Wert, der mit dem Symbol R angegeben und als **Gaskonstante** bezeichnet wird. Für ein Grammolekül Gas hat die Zustandsgleichung die folgende Form:

$$pV = RT.$$

Für n Grammoleküle Gas gilt entsprechend

$$pV = nRT.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß eine beliebig gewählte Gasmenge der Masse m, von der ein Grammolekül die Masse M hat, die Zahl $n = m/M$ Grammoleküle enthält, kann für diese Gasmenge die Zustandsgleichung in folgender Form geschrieben werden:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

In ihrem Verhalten entsprechen nur die **idealen Gase** dieser Zustandsgleichung. Dagegen erfüllen die realen Gase die angegebene Zustandsgleichung nur annähernd, und zwar jeweils um so besser, je kleiner der Druck ist, unter dem sie stehen, und je höher die Temperatur ist, die in ihnen herrscht.

In einem Gemisch von solchen Gasen, die chemisch nicht miteinander reagieren, verhält sich jedes Gas so, als ob ihm allein der gesamte Raum des Gasvolumens zur Verfügung stünde, so daß es auf die Wände einen Druck ausübt, der vom Vorhandensein der anderen Gaskomponenten nicht beeinflußt wird.

Nach dem Gesetz von DALTON ist der resultierende Druck eines Gemischs von Gasen gleich der Summe der Partialdrücke aller am Gasgemisch beteiligten Komponenten, d. h.,

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots.$$

Gemäß den Darstellungen der kinetischen Gastheorie bewegen sich die Gasmoleküle mit verschiedenen Geschwindigkeiten in alle Richtungen, wobei sich ihre Geschwindigkeiten bei Zusammenstößen mit einem festen Hindernis oder untereinander plötzlich ändern.

Der Gasdruck auf die das Gas einschließenden Gefäßwandungen wird nach den Aussagen der kinetischen Gastheorie durch die elastischen Stöße der Moleküle gegen die Gefäßwandungen hervorgerufen. Aus entsprechenden Berechnungen ergibt sich für

[1]) Unter einem Grammolekül verstehen wir so viel Substanz eines chemischen Elements oder einer Verbindung, gemessen in Gramm, wie die relative Molekülmasse angibt

diesen Druck die Beziehung

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{v^2}$$

(n Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Gasmoleküle, m Masse eines Moleküls). $\overline{v^2}$ ist als das arithmetische Mittel der Quadrate der Bewegungsgeschwindigkeiten aller Gasmoleküle definiert:

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{n},$$

wobei $n_1, n_2, \ldots$ die Zahl der mit der jeweiligen Geschwindigkeit $v_1, v_2, \ldots$ sich bewegenden Moleküle darstellen. Aus ausführlicheren Berechnungen findet man für die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

(k BOLTZMANN-Konstante, T absolute Temperatur). Wenn wir ersetzen $k = R/N_A$, dann erhalten wir für die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

wobei M die Masse eines Grammoleküls des Gases bedeutet.
In einer Volumeneinheit des Gases befinden sich bei einem Druck p und einer Temperatur T

$$n = \frac{p}{kT}$$

Gasmoleküle.

Das **Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung** der Moleküle besagt:

Von allen in einer Volumeneinheit enthaltenen n Molekülen bewegen sich dn *mit Geschwindigkeiten, die in dem zwischen v und v +* dv *liegenden Geschwindigkeitsintervall liegen entsprechend der Beziehung*

$$\mathrm{d}n = nf(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\, nv^2\, \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,\mathrm{d}v.$$

Neben der mittleren Geschwindigkeit ist es in der Thermodynamik auch noch üblich, die **wahrscheinlichste** sowie die **Durchschnittsgeschwindigkeit** einzuführen. Die wahr-

scheinlichste Bewegungsgeschwindigkeit der Gasmoleküle v_m ist diejenige, mit der sich bei gegebener Temperatur eine maximal große Zahl von Molekülen bewegt. Man kann sie aus der Beziehung

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \bar{v}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

errechnen.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Molekülbewegung wird durch das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten aller Gasmoleküle definiert:

$$v_d = \frac{\int_0^\infty nv(fv)\,dv}{n} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi n}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,\bar{v}.$$

Der Mittelwert der kinetischen Energie der Moleküle eines Gases, in dem nur Moleküle gleicher Art enthalten sind, wobei jedes einzelne Molekül jeweils i Freiheitsgrade hat, kann durch die Beziehung bestimmt werden:

$$\varepsilon = \frac{i}{2}kT.$$

Ein einatomiges Molekül hat drei, ein zweiatomiges fünf und ein aus drei oder mehr Atomen bestehendes Molekül hat sechs Freiheitsgrade der Bewegung.

Die **durchschnittliche Zahl** der in der Zeiteinheit erfolgenden **Zusammenstöße** eines Moleküls mit anderen errechnet man aus

$$Z = \frac{4}{3}\pi n D^2 v_d,$$

wobei D den Durchmesser eines Gasmoleküls darstellt.

Die durchschnittliche Weglänge, die ein Gasmolekül zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen zurücklegen kann, bezeichnen wir als die **mittlere freie Weglänge** l der Gasmoleküle. Sie wird ermittelt aus

$$l = \frac{v_d}{Z} = \frac{3}{4\pi n D^2}.$$

Der Koeffizient der inneren Reibung eines Gases η wird aus der Beziehung errechnet

$$\eta = \frac{Mv_d}{4\pi N_A D^2}$$

(M Masse eines Grammoleküls Gas, N_A AVOGADROsche Zahl).

B Beispiele

131. In einer an einem Ende zugeschmolzenen Glaskapillare von überall gleichem Querschnitt A ist durch einen Quecksilberfaden der Länge $l_0 = 15$ cm ein Luftvolumen abgeschlossen. Wenn das abgeschmolzene Ende des vertikal gehaltenen Röhrchens nach oben zeigt, hat die eingeschlossene Luftsäule die Länge $l_1 = 37{,}5$ cm, wenn das abgeschmolzene Ende nach unten weist, ist die Luftsäule $l_2 = 25$ cm lang. Wie groß ist der atmosphärische Druck? Wie lang wird die Luftsäule sein, wenn das Röhrchen unter einem Winkel $\varphi = 60°$ gegen die Vertikale geneigt ist?

Lösung

Wir bezeichnen den atmosphärischen Druck mit b und die zugehörigen Drücke der eingeschlossenen Luftsäule in der ersten bzw. zweiten Stellung mit p_1 und p_2 (Bild 84a, b). Dann sind im Gleichgewichtszustand die Beziehungen

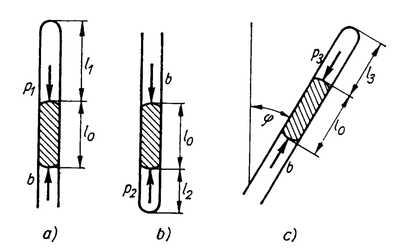


Bild 84

$$p_1 + l_0 \varrho g = b$$

$$p_2 = b + l_0 \varrho g$$

erfüllt. Unter der Voraussetzung, daß sich während des Experiments die Temperatur der Luft nicht verändert, gilt entsprechend dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

oder

$$(b - l_0 \varrho g) A l_1 = (b + l_0 \varrho g) A l_2,$$

woraus sich ergibt

$$b = l_0 \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \varrho g.$$

Wenn wir den barometrischen Druck durch die Länge der Quecksilbersäule ausdrücken, finden wir

$$b' = l_0 \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} = 150 \text{ mm} \frac{625 \text{ mm}}{125 \text{ mm}} = \underline{750 \text{ Torr.}}$$

Wenn wir die Kapillare um den Winkel φ neigen (Bild 84c), dann ist der Druck der eingeschlossenen Luftsäule p_3 durch die Differenz des barometrischen und des hydrostatischen Drucks der Quecksilbersäule $l_0 \varrho g \cos \varphi$ gegeben. Nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE gilt hier

$$p_3 V_3 = p_1 V_1$$

oder

$$(b - l_0 \varrho g \cos \varphi) A l_3 = (b - l_0 \varrho g) A l_1.$$

Da $b = b'\varrho g$ ist, erhalten wir nach Umformung

$$l_3 = l_1 \frac{b' - l_0}{b' - l_0 \cos \varphi} = \underline{33{,}3 \text{ cm}}.$$

132. Der Zylinder einer Kolbenluftpumpe hat ein Volumen der Größe $V_1 = 2 \text{ dm}^3$, der zugehörige Rezipient ein solches von $V_0 = 3 \text{ dm}^3$. Berechnen Sie Luftdruck und Luftdichte unter dem Rezipienten nach dem vierten Kolbenhub unter der Voraussetzung, daß der Pumpvorgang so langsam erfolgt, daß die Temperatur als konstant angesehen werden kann. Wieviel Kolbenhübe müssen ausgeführt werden, damit der Luftdruck im Rezipienten auf $^1/_{10}$ seines ursprünglichen Wertes sinkt? (Bild 85)

Lösung

Nach dem ersten Kolbenhub vergrößert sich das Volumen der Luft von V_0 auf $V_0 + V_1$, und ihr Druck sinkt von p_0 auf p_1. Da der Prozeß bei konstanter Temperatur ablaufen soll, gilt nach BOYLE-MARIOTTE

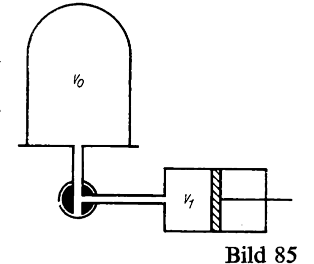


Bild 85

$$p_0 V_0 = p_1(V_0 + V_1).$$

Nach dem zweiten Kolbenhub wird gelten

$$p_1 V_0 = p_2(V_0 + V_1)$$

und also nach dem n-ten

$$p_{n-1} V_0 = p_n(V_0 + V_1).$$

Wenn wir diese Gleichungen multiplizieren, dann erhalten wir nach Umformung für den Druck nach Ausführung des n-ten Kolbenhubes

$$p_n = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1}\right)^n.$$

Nach dem 4. Kolbenhub finden wir für den Druck

$$p_4 = p_0 \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \underline{0{,}13\, p_0}.$$

Wenn die Anfangsdichte der Luft durch die Größe ϱ_0 angegeben wurde, dann nimmt die Luft nach dem 1. Kolbenhub ein größeres Volumen ein, und ihre Dichte wird sich vermindern. Aus der Massengleichheit vor und nach dem Kolbenhub ergibt sich

$$\varrho_0 V_0 = \varrho_1(V_0 + V_1).$$

Nach dem 2. Kolbenhub finden wir

$$\varrho_1 V_0 = \varrho_2(V_0 + V_1)$$

und nach dem n-ten

$$\varrho_{n-1} V_0 = \varrho_n(V_0 + V_1).$$

Nach Umformung finden wir

$$\varrho_n = \varrho_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n .$$

Also nimmt die Dichte nach dem 4. Kolbenhub den Wert an

$$\varrho_4 = \underline{0{,}13\, \varrho_0}.$$

Wenn nach einer Anzahl von k Kolbenhüben der ursprüngliche Druck p_0 auf ein n-tel seines ursprünglichen Wertes gefallen ist, finden wir

$$p_k = \frac{p_0}{n} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^k ,$$

woraus wir nach Umformung erhalten

$$k = \frac{\lg n}{\lg \dfrac{V_0 + V_1}{V_0}} ,$$

d. h. für den vorgegebenen Fall

$$k = \frac{\lg 10}{\lg \dfrac{5}{3}} \approx \underline{5}.$$

133. Die Dichte der Luft hat bei einem Druck $p_1 = 2$ atm und einer Temperatur $t_1 = 27$ °C den Wert $\varrho_1 = 2{,}354$ g l^{-1}. Wie groß ist die Luftdichte unter Normalbedingungen ($p_0 = 1$ atm, $t_0 = 0$ °C)?

Lösung

Aus der Zustandsgleichung

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

folgt für die Dichte

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} .$$

Für die sich unter verschiedenen Bedingungen einstellenden Dichten kann man schreiben

$$\varrho_0 = \frac{Mp_0}{RT_0} ; \quad \varrho = \frac{Mp_1}{RT_1} .$$

Durch Dividieren beider Gleichungen und nach Umformung erhalten wir

$$\varrho_0 = \varrho \frac{p_0}{p_1} \frac{T_1}{T_0} ,$$

d. h.,

$$\varrho_0 = 2{,}354 \text{ g l}^{-1} \frac{1 \text{ atm}}{2 \text{ atm}} \frac{300 \text{ grd}}{273 \text{ grd}} = 1{,}293 \text{ g l}^{-1} = \underline{1{,}293 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}}.$$

134. Eine Druckflasche enthält komprimiertes Gas unter einem Druck $p_1 = 40$ atm und der Temperatur $t_1 = 27$ °C. Wie verändert sich der Druck, wenn bei Ablassen der Hälfte des eingeschlossenen Gases die Temperatur um 15 °C abnimmt?

Lösung

Zur Berechnung dieser Aufgabe wenden wir die Zustandsgleichung an. Für den Anfangszustand ergibt sich

$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1. \tag{1}$$

Nach Ablassen eines Teils des Gases bleibt in der Flasche eine Gasmenge der Masse $m' = m/2$ bei gleichbleibendem Volumen. Druck und Temperatur des zurückbleibenden Gases verändern sich auf die Werte p_2 bzw. T_2, und es ergibt sich jetzt die Zustandsgleichung

$$p_2 V = \frac{m}{2M} R T_2. \tag{2}$$

Durch Dividieren der Gln. (1) u. (2) und Umstellung erhalten wir

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{2T_1} = 40 \text{ atm} \frac{285 \text{ grd}}{600 \text{ grd}} = \underline{19 \text{ atm}}.$$

135. Es ist auszurechnen, in welcher Tiefe unter der Wasseroberfläche eines Sees die Dichte eines Luftbläschens den Wert von einem Prozent der Wasserdichte erreicht. Die Temperatur des Luftbläschens betrage 4 °C, der Außendruck über dem Wasser sei p_0, die Luftdichte unter Normalbedingungen ist $\varrho_0 = 1{,}293 \cdot 10^{-3}$ g cm^{-3}.

Lösung

Wenn der Druck des Luftbläschens in der Tiefe h mit dem Wert p angegeben ist, dann resultiert für seine Dichte gemäß der Zustandsgleichung die Beziehung

$$\varrho = \frac{pM}{RT}.$$

Die Luftdichte ist unter Normalbedingungen ϱ_0. Für sie gilt

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}.$$

Nach Dividieren und Umformen der beiden vorstehenden Gleichungen erhalten wir für die Dichte

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}.$$

Im Gleichgewichtszustand ist der Innendruck des Bläschens genausogroß wie der darauf einwirkende Außendruck, welcher sich als Summe des atmosphärischen Drucks und des Drucks der über dem Bläschen stehenden Wassersäule ergibt. Es gilt also

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p_0 + h\varrho_1 g}{p_0} \frac{T_0}{T}, \tag{1}$$

wobei ϱ_1 die Wasserdichte bei der Temperatur T darstellt. In Übereinstimmung mit der Aufgabenstellung wird sich ergeben

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{100},$$

so daß nach erfolgter Umformung aus Gl. (1) für die gesuchte Tiefe die Beziehung

$$h = \frac{\varrho_1 T - 100\varrho_0 T_0}{100\varrho_0\varrho_1 g T_0} p_0$$

resultiert. Wenn wir die gegebenen Werte einsetzen, erhalten wir

$$h = \frac{1\,\text{g}\,\text{cm}^{-3} \cdot 277\,\text{grd} - 100 \cdot 1{,}293 \cdot 10^{-3}\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}\,273\,\text{grd}}{100 \cdot 1{,}293 \cdot 10^{-3}\,\text{g}\,\text{cm}^{-3} \cdot 1\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}\,981\,\text{cm}\,\text{s}^{-2} \cdot 273\,\text{grd}} \times$$

$$\times\, 1{,}013 \cdot 10^{6}\,\text{g}\,\text{cm}\,\text{s}^{-2}\,\text{cm}^{-2} = 7070\,\text{cm} = \underline{70{,}7\,\text{m}}.$$

136. Ein Ballon hat das Volumen $V = 3000\,\text{m}^3$ und fliegt bei einer Temperatur $t = 0\,°\text{C}$ in einer Höhe $h = 6000$ m, wo der äußere Luftdruck den Wert $p = 0{,}5$ atm hat. Berechnen Sie, wie groß die resultierende Kraft ist, die auf den Ballon wirkt, wenn er im Fall a) mit Wasserstoff und im Fall b) mit Helium gefüllt ist. Die Luftdichte beträgt unter Normalbedingungen $\varrho_0 = 1{,}293\,\text{g}\,\text{l}^{-1}$.

Lösung

Der Ballon erfährt in der Luft einen Auftrieb, d. h. eine Kraft, die nach dem Archimedischen Prinzip dem Gewicht der von ihm verdrängten Luftmasse $G_1 = V\varrho_1 g$ entspricht, wobei mit ϱ_1 die Luftdichte bei gegebener Temperatur bezeichnet sei. Wenn diese Kraft größer ist als das Eigengewicht des Ballons, dann wird er durch die resultierende Kraft zum Steigen veranlaßt. Die Steigkraft F ist durch die Differenz zwischen Auftrieb G_1 und Eigengewicht $G_2 = V\varrho_2 g$ gegeben, d. h. durch die Kraft

$$F = G_1 - G_2 = V\varrho_1 g - V\varrho_2 g, \tag{1}$$

wobei ϱ_2 die Gasdichte darstellt, das ist die Dichte desjenigen Gases, mit dem der Ballon gefüllt ist.

Aus der Zustandsgleichung erhalten wir für die Gasdichte beim Druck p und der Temperatur T

$$\varrho = \frac{pM}{RT}.$$

Das bedeutet für Wasserstoff

$$\varrho_2 = \frac{0{,}5 \text{ atm} \cdot 2 \text{ g mol}^{-1}}{0{,}082 \text{ l atm grd}^{-1} \text{ mol}^{-1}\, 273 \text{ grd}} = 0{,}0447 \text{ g l}^{-1},$$

und für Helium

$$\varrho_2' = \frac{0{,}5 \cdot 4 \text{ g l}^{-1}}{0{,}082 \cdot 273} = 0{,}0894 \text{ g l}^{-1}.$$

Die Luftdichte beträgt unter Normalbedingungen

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}$$

und beim Druck p und der Temperatur T_0

$$\varrho_1 = \frac{pM}{RT_0}.$$

Durch Dividieren beider Gleichungen erhalten wir für die Luftdichte

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{p}{p_0} = 1{,}293 \text{ g l}^{-1} \frac{0{,}5 \text{ atm}}{1 \text{ atm}} = 0{,}6465 \text{ g l}^{-1}.$$

Die gemäß Gl. (1) resultierende Steigkraft hat für den Fall
a) der Wasserstoff-Füllung den Wert

$$F_a = 3000 \text{ m}^3 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} (0{,}6465 \text{ kg m}^{-3} - 0{,}0447 \text{ kg m}^{-3}) = \underline{17710 \text{ N}}$$

und im Fall
b) der Heliumfüllung den Wert

$$F_b = 3000 \cdot 9{,}81 \,(0{,}6465 - 0{,}0894) \text{ N} = \underline{16400 \text{ N}}.$$

137. Ein Gasgemisch setzt sich aus den Gasen Wasserstoff (H_2), Methan (CH_4) und Kohlenmonoxid (CO) zusammen. In welchen Mengen sind die einzelnen vorgenannten Komponenten im Gemisch enthalten, wenn ihre jeweiligen Partialdrücke wie folgt bestimmt sind:

$$p_1 = 0{,}7 \text{ atm}; \quad p_2 = 2 \text{ atm}; \quad p_3 = 1{,}3 \text{ atm}?$$

Lösung

Wenn m_1, m_2, m_3 die Massen der einzelnen, in einer Masseneinheit des Gemischs vertretenen Komponenten sind und M_1, M_2, M_3 die Massen ihrer Grammoleküle, dann

gilt entsprechend der Zustandsgleichung für jede Komponente

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT, \qquad (1)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT, \qquad (2)$$

$$p_3 V = \frac{m_3}{M_3} RT, \qquad (3)$$

wobei V das Volumen des vom Gasgemisch eingenommenen Raumes darstellt. Wenn wir die Gln. (1) u. (2) bzw. (1) u. (3) teilen, dann erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{M_2}{M_1},$$

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{m_1}{m_3} \frac{M_3}{M_1},$$

die zusammen mit der Gleichung

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1 \text{ g}$$

die Lösung für m_1, m_2, m_3 in der Gestalt liefern

$$m_1 = \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}\frac{M_2}{M_1} + \frac{p_3}{p_1}\frac{M_3}{M_1} + 1}; \qquad m_2 = \frac{p_2 M_2 m_1}{p_1 M_1}; \quad m_3 = \frac{p_3 M_3 m_1}{p_1 M_1}$$

($M_1 = 2 \text{ g mol}^{-1}$, $M_2 = 16 \text{ g mol}^{-1}$ und $M_3 = 28 \text{ g mol}^{-1}$).
Nach Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich

$$\underline{m_1 = 0{,}02 \text{ g}}; \quad \underline{m_2 = 0{,}46 \text{ g}}; \quad \underline{m_3 = 0{,}52 \text{ g}}.$$

Im Gemisch sind also prozentual enthalten

2% He, 46% CH_4 und 52% CO.

138. Bei welcher Temperatur ist die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle des Kohlendioxids gleich der mittleren Geschwindigkeit, welche die Moleküle des Stickstoffs bei 0 °C aufweisen?

Lösung

Die Bedingung, daß die mittleren Geschwindigkeiten der Moleküle zweier verschiedener Gase bei unterschiedlichen Temperaturen gleich sein sollen, drücken wir durch die Beziehung aus:

$$\sqrt{\frac{3RT_1}{M_1}} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M_2}},$$

woraus für die gesuchte Temperatur des Kohlendioxids resultiert:

$$T_2 = \frac{M_2}{M_1} T_1 .$$

Die Masse eines Grammoleküls N_2 ist $M_1 = 28 \text{ g mol}^{-1}$, die eines Grammoleküls CO_2 ist $M_2 = (12 + 32) \text{ g mol}^{-1} = 44 \text{ g mol}^{-1}$. Nach Einsetzen erhalten wir

$$T_2 = \frac{44 \text{ g mol}^{-1}}{28 \text{ g mol}^{-1}} 273 \text{ grd} = 429 \text{ °K},$$

$$\underline{t_2 = 156 \text{ °C}.}$$

139. Berechnen Sie, welche Veränderung der Mittelwert der kinetischen Energie von Molekülen des Gases Argon erfährt, wenn von der Substanz $m = 200$ g vorliegen und unter Konstanthaltung des Volumens eine Wärmemenge $Q = 840$ cal zugeführt wird.

Lösung

Wenn das Gas sein Volumen nicht verändert, kann es Energie von außen nur als Wärme, nicht als mechanische Arbeit erhalten. Die von außen zugeführte Wärme Q vergrößert die innere Energie des Gases um den Betrag ΔU, und es wird die Beziehung

$$Q = \Delta U \tag{1}$$

erfüllt.

Wenn ε der mittlere Wert der kinetischen Energie der Moleküle eines idealen Gases ist, dann hat die innere Energie eines Grammoleküls dieses Gases den Wert $U_m = N_A \varepsilon$ (N_A ist die Avogadrosche Zahl), und das Gas der Masse m ist durch die innere Energie

$$U = n N_A \varepsilon$$

charakterisiert, wobei $n = m/M$ die Zahl der darin enthaltenen Gasmoleküle darstellt. Wenn wir berücksichtigen, daß Argon ein einatomiges Gas ist, für das demnach $\varepsilon = {}^3/_2\, kT$ gilt, finden wir seine innere Energie zu

$$U = \frac{m}{M} N_A \frac{3}{2} kT.$$

In Übereinstimmung mit Gl. (1) können wir also schreiben

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} N \frac{3}{2} k \Delta T.$$

Wir berücksichtigen weiter, daß $\Delta\varepsilon = {}^3/_2\, k\Delta T$ die Änderung der mittleren kinetischen Energie eines Moleküls bedeutet, und erhalten für diesen Wert

$$\Delta\varepsilon = \frac{MQ}{m N_A} = \frac{39{,}9 \text{ g mol}^{-1} \cdot 840 \text{ cal}}{200 \text{ g} \cdot 6{,}03 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 27{,}8 \cdot 10^{-23} \text{ cal}$$

und in Energieeinheiten ausgedrückt (1 cal = 4,18 Joule)

$$\underline{\Delta\varepsilon = 116{,}4 \cdot 10^{-23} \text{ J}.}$$

140. Ermitteln Sie unter Berücksichtigung der Aussagen der kinetischen Gastheorie die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen für die Gase a) Argon und b) Stickstoff. Die Ergebnisse vergleichen Sie mit den in Tabelle 7 angegebenen Werten.

Lösung

Wenn wir voraussetzen, daß das Gas aus Molekülen gleicher Art besteht und daß jedes seiner Moleküle i Freiheitsgrade hat, dann ist der Mittelwert der kinetischen Energie seiner Moleküle durch die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{i}{2} kT$$

gegeben, und für die gesamte innere Energie eines Grammoleküls des betreffenden Gases gilt dann

$$U_m = N_A \frac{i}{2} kT,$$

wobei N_A die Zahl der Moleküle in einem Grammolekül ($N_A = 6{,}03 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$) darstellt. Damit enthält eine beliebige Gasmenge der Masse m die Zahl $n = m/M$ Grammmoleküle. Wenn wir berücksichtigen, daß die BOLTZMANN-Konstante $k = R/N_A$ ist, dann gilt für die innere Energie des Gases

$$U = \frac{m}{M} N_A \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT.$$

Wenn wir das Gas unter Konstanthaltung seines Volumens erwärmen, dann wird die gesamte zugeführte Wärme Q für die Erhöhung der inneren Energie benötigt, und die Temperatur wächst um den Betrag ΔT an. Demnach gilt

$$Q_V = \Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R(T + \Delta T) - \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R\Delta T. \tag{1}$$

Gemäß der Definition der spezifischen Wärmekapazität ist

$$c_v = \frac{Q_V}{m\Delta T},$$

und nach Einsetzen für Q_V erhalten wir aus Gl. (1)

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte ergibt sich:
a) Argon ist ein einatomiges Gas, für das $i = 3$ gilt, so daß wir finden

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M} = \frac{3 \cdot 8{,}31\ \mathrm{J\ grd^{-1}\ mol^{-1}}}{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\ mol^{-1}}} = 311\ \mathrm{J\ kg^{-1}\ grd^{-1}}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß 1 J = 0,239 cal ist, ergibt sich

$$\underline{c_v = 0{,}0743\ \mathrm{cal\ g^{-1}\ grd^{-1}}.}$$

Die Tabellen geben einen Wert von 0,0762 cal g^{-1} grd^{-1} an.
b) Stickstoff ist ein zweiatomiges Gas, für das $i = 5$ ist, so daß wir finden

$$c_v = \frac{5}{2}\frac{R}{M} = \frac{5 \cdot 8{,}31}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,grd^{-1}} = 742\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,grd^{-1}},$$

d. h.,

$$\underline{c_v = 0{,}177\ \mathrm{cal\,g^{-1}\,grd^{-1}}},$$

was mit dem Wert der Tabelle von 0,177 cal g^{-1} grd^{-1} übereinstimmt.

141. Berechnen Sie für Argongas den Prozentsatz derjenigen Moleküle, die sich bei $t_0 = 120$ °C mit Geschwindigkeiten im Intervall zwischen $v_1 = 2000$ km h^{-1} und $v_2 = 2330$ km h^{-1} bewegen.

Lösung

Gemäß dem MAXWELLschen Gesetz gilt für die Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle

$$\frac{dn}{n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\left(\frac{m}{kT}\right)^3} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv. \tag{1}$$

Diese Beziehung können wir vereinfachen, indem wir die sog. relative Geschwindigkeit als den Quotienten der Momentangeschwindigkeit v und der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit der Moleküle v_m einführen:

$$u = \frac{v}{v_m} = \frac{v}{\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}}.$$

Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,e^{-u^2}u^2\,du.$$

$\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{dn}{n}$ gibt die relative Molekülzahl an; die relativen Geschwindigkeiten der Moleküle liegen im Geschwindigkeitsintervall zwischen den Grenzen u_1 und u_2. Der Ausdruck

$$\frac{n_{u0}}{n} = \int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,e^{-u^2}u^2\,du$$

wiederum gibt die relative Anzahl derjenigen Moleküle an, deren Relativgeschwindigkeiten größer sind als u_0. Dieses Integral wurde berechnet, und in Bild 86 kann man die Werte dieser relativen Molekülzahlen für die verschiedenen Relativgeschwindigkeiten direkt ablesen. Nach den in der Aufgabe angegebenen Bedingungen finden wir

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT_0}{m}} = \sqrt{\frac{2RT_0}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}3 \text{ J grd}^{-1} \text{ mol}^{-1}\ 393 \text{ grd}}{40 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}} =$$

$$= 404 \text{ m s}^{-1} = 1454 \text{ km h}^{-1}$$

und die Relativgeschwindigkeiten

$$u_1 = \frac{v_1}{v_m} = \frac{2000}{1454} = 1{,}375,$$

$$u_2 = \frac{v_2}{v_m} = \frac{2330}{1454} = 1{,}6.$$

Gemäß Bild 86 finden wir

$$\frac{n_{u1}}{n} = 0{,}30; \quad \frac{n_{u2}}{n} = 0{,}18.$$

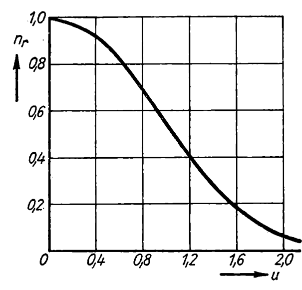


Bild 86

Es haben also 30 % der Moleküle eine größere Geschwindigkeit als 2000 km h^{-1} und 18 % eine größere als 2330 km h^{-1}. Im vorgegebenen Geschwindigkeitsintervall bewegen sich 12 % aller Moleküle.

142. Ermitteln Sie unter Hinzuziehung des MAXWELLschen Gesetzes der Geschwindigkeitsverteilung die Beziehung für die wahrscheinlichste und die Durchschnittsgeschwindigkeit der Gasmoleküle.

Lösung

Nach dem MAXWELLschen Gesetz gilt für die relative Anzahl der Moleküle, deren absoluter Geschwindigkeitsbetrag im Intervall zwischen v und $v + \mathrm{d}v$ liegt, die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = f(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\, v^2 \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,\mathrm{d}v. \tag{1}$$

a) Wie aus der grafischen Darstellung und der Berechnung ersichtlich ist, nimmt die Funktion $f(v)$ Nullwerte für $v = 0$ und für $v = \infty$ an. Irgendwo zwischen diesen beiden Nullstellen liegt ein Maximum. Die Lage des Maximums entspricht derjenigen Geschwindigkeit, mit der sich bei gegebener Temperatur eine maximale Anzahl von Molekülen bewegt, die sog. wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Für sie gilt

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0.$$

Nach Berechnen der ersten Ableitung erhalten wir

$$v^2 \left(-\frac{2m}{2kT}\right) v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} + 2v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0,$$

hieraus

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Da $k = R/N_A$ und $mN_A = M$ ist, wobei M die Masse eines Grammoleküls darstellt, finden wir weiter

$$\underline{v_m = \sqrt{\frac{2RT}{M}}}.$$

b) Unter der durchschnittlichen Geschwindigkeit der Moleküle verstehen wir das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten aller Gasmoleküle. Wenn sich von der Gesamtzahl n der Moleküle der Bruchteil dn mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ bewegt, dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit v_d durch die Beziehung

$$v_d = \frac{\int_0^\infty v \, dn}{n} = \int_0^\infty v \frac{dn}{n}$$

gegeben. Dabei bedeutet dn/n die relative Anzahl der Moleküle, deren Geschwindigkeiten im Intervall v bis $v + dv$ liegen, d. h. $f(v)\, dv$. In Hinblick auf Gl. (1) können wir so schreiben:

$$v_d = \int_0^\infty v f(v) \, dv = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Das Integral

$$\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

lösen wir durch die Substitution

$$\frac{mv^2}{2kT} = y^2,$$

so daß sich ergibt

$$\frac{m}{kT} v \, dv = 2y \, dy.$$

Nach dieser Substitution geht das Integral über in

$$\frac{4k^2T^2}{m^2}\int_0^\infty y^3\,\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Der Ausdruck $\int_0^\infty y^3\,\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$, der partiell integriert wurde, ergibt den Wert $^1/_2$, und deshalb finden wir

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3 \frac{4k^2T^2}{m^2}\,\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Wenn wir festhalten, daß $k = R/N_\mathrm{A}$ und $mN_\mathrm{A} = M$ ist, erhalten wir schließlich

$$\underline{v_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}.$$

143. Berechnen Sie, wieviel Prozent der Moleküle eines Gases eine kinetische Energie der Translation haben, die größer als das Dreifache des Mittelwertes der kinetischen Translationsenergie der Moleküle ist.

Lösung

Für die Geschwindigkeiten der Moleküle, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, muß gelten

$$\frac{1}{2}\,mv^2 > 2\,\frac{1}{2}\,m\overline{v^2},$$

woraus wir erhalten

$$v > \sqrt{2}\,\bar{v}.$$

Die Anzahl der Moleküle, deren Geschwindigkeiten größer sind als $v_0 = \sqrt{2}\,\bar{v}$, läßt sich leicht aus dem Resultat der Aufgabe 141 und Bild 86 ermitteln.
Wir finden die relative Geschwindigkeit aus

$$u_0 = \frac{v_0}{v_m};\quad v_m = \sqrt{\frac{2RT}{M}};\quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

und daher

$$u_0 = \frac{\sqrt{2}\,\bar{v}}{v_m} = \sqrt{3} = 1{,}73.$$

Entsprechend dem Diagramm ist

$$\frac{n_{u0}}{n} = 0{,}11.$$

Also haben 11 % aller Moleküle eine kinetische Energie der Translation, die größer ist als das Dreifache des Mittelwerts.

144. Unter Normalbedingungen ($p_0 = 1$ atm, $t_0 = 0$ °C) hat die freie Weglänge eines Wasserstoffmoleküls den Wert $l_0 = 1{,}28 \cdot 10^{-5}$ cm. Wie groß ist der Durchmesser eines Wasserstoffmoleküls und wie groß wird seine mittlere freie Weglänge für den Fall, daß die Temperatur $t_0 = 0$ °C und der Druck $p = 10^{-4}$ Torr beträgt?

Lösung

Wenn wir die Beziehung für die mittlere freie Weglänge

$$l = \frac{3}{4\pi n D^2}$$

benutzen, in die wir für n (Zahl der Moleküle pro Volumeneinheit)

$$n = \frac{p}{kT}$$

einsetzen, so erhalten wir für den gesuchten Durchmesser eines Wasserstoffmoleküls die Beziehung

$$D^2 = \frac{3kT}{4\pi p l}\,.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt sich

$$D^2 = \frac{3kT_0}{4\pi p_0 l_0} = \frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{J grd}^{-1}\ 273\ \text{grd}}{4\pi\ 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{N m}^{-2}\ 1{,}28 \cdot 10^{-7}\text{m}} = 6{,}95 \cdot 10^{-20}\ \text{m}^2,$$

so daß man findet

$$\underline{D = 2{,}6 \cdot 10^{-10}\ \text{m}}.$$

Die mittlere freie Weglänge beträgt unter Normalbedingungen

$$l_0 = \frac{3kT_0}{4\pi p_0 D^2}$$

und bei einem Druck p und der Temperatur T_0

$$l = \frac{3kT_0}{4\pi p D^2}\,.$$

Nach Division beider Gleichungen erhalten wir

$$\frac{l}{l_0} = \frac{p_0}{p}$$

und damit

$$l = l_0 \frac{p_0}{p} = 1{,}28 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \frac{760\ \text{Torr}}{10^{-4}\ \text{Torr}} = \underline{0{,}97\ \text{m}}.$$

145. In einem abgeschlossenen Raum von einem Kubikzentimeter Inhalt ist Wasserstoff bei 0 °C und unter einem Druck von 1 atm eingeschlossen. Berechnen Sie die Anzahl der in einer Sekunde in diesem Gas auftretenden Zusammenstöße der Moleküle miteinander, wenn der Durchmesser eines Moleküls mit $D = 2{,}38 \cdot 10^{-8}$ cm angenommen wird.

Lösung

Innerhalb einer Sekunde stößt das einzelne Molekül durchschnittlich mit Z anderen zusammen. Wenn v_d die Durchschnittsgeschwindigkeit der Moleküle darstellt, dann ist

$$Z = \frac{4\pi n D^2}{3} v_d .$$

Bei jedem Zusammenstoß treffen zwei Moleküle aufeinander. Daher ist die Gesamtzahl der Zusammenstöße pro Volumen- und Zeiteinheit durch die Beziehung

$$Z_0 = \frac{n}{2} Z = \frac{4\pi n^2 D^2}{6} v_d$$

gegeben, wobei n die Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle bedeutet. Wenn wir berücksichtigen, daß

$$n = \frac{p}{kT}; \quad v_d = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

und $k = R/N_A$ ist, dann ergibt sich

$$Z_0 = \frac{4\pi p^2 D^2}{6k^2T^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{4p^2D^2}{3k^2T^2} \sqrt{\frac{2\pi RT}{M}} .$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir

$$Z_0 = \frac{4 \cdot 1{,}013^2 \cdot 10^{10}\ \text{N}^2\,\text{m}^{-4}\ 2{,}38^2 \cdot 10^{-20}\ \text{m}^2}{3 \cdot 1{,}38^2 \cdot 10^{-46}\ \text{J}^2\,\text{grd}^{-2}\ 273^2\ \text{grd}^2} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}31\ \text{J grd}^{-1}\,\text{mol}^{-1}\ 273\ \text{grd}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1}}} =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{35}\ \text{m}^{-3}\,\text{s}^{-1} = \underline{1{,}5 \cdot 10^{29}\ \text{cm}^{-3}\,\text{s}^{-1}}.$$

146. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit der Moleküle des Gases Argon, wenn die mittlere Zeitdauer zwischen jeweils zwei Zusammenstößen seiner Moleküle $\tau = 9 \cdot 10^{-7}$ s beträgt und wenn in der Volumeneinheit $n = 3{,}4 \cdot 10^{12}$ cm^{-3} Moleküle enthalten sind? Unter Normalbedingungen beträgt die mittlere freie Weglänge von Argonmolekülen $l_0 = 6{,}66 \cdot 10^{-6}$ cm.

Lösung

In der Zeitspanne τ, die dem zeitlichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen entspricht, legt das Molekül, das sich mit der durchschnittlichen Ge-

schwindigkeit v_d fortbewegt, eine Strecke der Länge

$$l = v_d \tau$$

zurück, woraus folgt $v_d = \frac{l}{\tau}$. (1)

Die mittlere freie Weglänge des Moleküls erfüllt die Beziehung

$$l = \frac{3}{4\pi n D^2}. \qquad (2)$$

Den unbekannten Durchmesser des Moleküls ermitteln wir aus den Normalbedingungen im Gas. Aus diesen Angaben resultiert

$$l_0 = \frac{3}{4\pi n_0 D^2}.$$

Da ferner

$$n_0 = \frac{p_0}{kT_0}$$

ist, gilt die Beziehung

$$D^2 = \frac{3kT_0}{4\pi l_0 p_0}.$$

Durch Einsetzen in Gl. (2) erhalten wir

$$l = \frac{3}{4\pi n \frac{3kT_0}{4\pi l_0 p_0}} = \frac{l_0 p_0}{nkT_0}.$$

Für die durchschnittliche Geschwindigkeit ergibt sich aus Gl. (1)

$$v_d = \frac{l}{\tau} = \frac{l_0 p_0}{nkT_0 \tau}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir schließlich

$$v_d = \frac{6{,}66 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}}{3{,}4 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m^{-3}} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,grd^{-1}}\, 273\,\mathrm{grd} \cdot 9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}} =$$
$$= \underline{5{,}86 \cdot 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

147. Bestimmen Sie den Zusammenhang der mittleren freien Weglänge von Gasmolekülen und des Koeffizienten der inneren Reibung η. Berechnen Sie die mittlere freie Weglänge von Gasmolekülen des Sauerstoffs unter Normalbedingungen, wenn hierbei der Koeffizient der inneren Reibung des Sauerstoffs den Wert $\eta_0 = 19{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$ hat.

Lösung

a) Für l und η gelten die Beziehungen

$$l = \frac{3}{4\pi n D^2}; \quad \eta = \frac{M v_d}{4\pi N_A D^2},$$

und ihr Quotient ist

$$\frac{\eta}{l} = \frac{M n v_d}{3 N_A}.$$

Der Quotient $m = M/N_A$ stellt die Masse eines Moleküls dar, und das Produkt aus Molekülmasse und Zahl der Moleküle je Volumeneinheit ergibt die Gasdichte $\varrho = mn$. Daher ist

$$\underline{\eta = \frac{1}{3} \varrho v_d l.}$$

b) Für die mittlere freie Weglänge kann dann geschrieben werden

$$l = \frac{3\eta}{\varrho v_d}.$$

Wenn wir die bereits bekannten Beziehungen für die durchschnittliche Geschwindigkeit der Moleküle

$$v_d = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

und die Zustandsgleichung

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{pM}{RT}$$

anwenden, dann finden wir für l die Beziehung

$$l = \frac{3\eta}{\frac{pM}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}},$$

woraus wir nach einfacher Umformung erhalten

$$l = \frac{3\eta}{2p}\sqrt{\frac{RT\pi}{2M}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir schließlich

$$l = \frac{3 \cdot 19{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{kg m}^{-1}\ \text{s}^{-1}}{2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{N m}^{-2}} \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 8{,}31\ \text{J grd}^{-1}\ \text{mol}^{-1}\ 273\ \text{grd}}{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1}}} =$$

$$= \underline{9{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{m.}}$$

A Aufgaben

157. Ein Manometer zeigt einen Druck von 75 at an. Drücken Sie diesen Druck in physikalischen Atmosphären, in Torr und Bar aus.

158 a) Berechnen Sie, bei welcher Temperatur ein Gas zwei Drittel des Volumens einnimmt, das es – bei Konstanthaltung des Druckes – bei der Temperatur 0 °C einnahm.

158 b) Ermitteln Sie, bei welcher Temperatur ein Gas – bei Konstanthaltung des Volumens – einen n-fachen Druck aufweist als bei 0 °C.

159. Ein an einem Gefäß mit komprimiertem Gas sitzendes Manometer zeigt bei der Temperatur $t = 20$ °C einen Druck von 60 kp cm^{-2} an. Nach Abkühlung des Gases zeigt das Manometer nur noch 45 kp cm^{-2} an. Berechnen Sie die Endtemperatur des Gases unter der Voraussetzung, daß eine etwaige Volumenänderung des Gefäßes vernachlässigt werden kann.

160. Im Raum über der Quecksilberfüllung eines Barometers befindet sich eine geringe Luftmenge, was bewirkt, daß das Barometer einen geringeren Druck anzeigt, als tatsächlich herrscht. Wenn z. B. der wahre Luftdruck 750 Torr beträgt, zeigt das Barometer nur 730 Torr an. Berechnen Sie, wie groß der wahre Wert des Luftdrucks ist, wenn das Barometer 690 Torr anzeigt. Die Länge des Barometers beträgt 85 cm. Den Druck messen wir bei gleichbleibender Temperatur.

161. Welches Volumen nehmen 4 g Helium bei einem Druck von 750 Torr und einer Temperatur von 20 °C ein?

162. Eine bestimmte Menge Luft nimmt bei einer Temperatur $t_0 = 8$ °C und dem Druck $p_0 = 750$ Torr ein Volumen $V_0 = 112$ cm^3 ein. Auf welche Temperatur muß die Luft erwärmt werden, damit sie bei einem Druck $p_1 = 740$ Torr das Volumen $V_1 = 136$ cm^3 einnimmt?

163. In einem Behälter von 40 l Fassungsvermögen befindet sich Sauerstoff bei einer Temperatur von 27 °C und unter einem Druck von 10 kp cm^{-2}. Berechnen Sie die Masse dieser Gasmenge.

164. Berechnen Sie die Dichte von Stickstoff bei 10 °C und einem Druck von 2 at.

165. Berechnen Sie das Gewicht der in einem Raum von 4 m · 5 m · 3 m enthaltenen Luftmenge bei einer Zimmertemperatur von 20 °C und einem Druck von 760 Torr. Die Luftdichte unter Normalbedingungen wird als bekannt vorausgesetzt.

166. Eine Glühbirne von 150 cm^3 Volumen ist mit Argon gefüllt. Wie hoch ist ihre Temperatur, wenn das Argon bei einem Druck von 750 Torr ein Gewicht von 1,45 · 10^{-4} kp hat?

167. Berechnen Sie, welchen Wert das spezifische Volumen des Wasserstoffs annimmt, wenn er bei einer Temperatur von 20 °C unter einem Druck von 1,25 atm steht.

168. In einem Gefäß von 6 l Inhalt befinden sich 1,4 g Gas bei einer Temperatur von 27 °C und einem Druck von 2,17 at. Um welches Gas handelt es sich?

169. Berechnen Sie, welches Volumen drei Grammoleküle Sauerstoff bei einem Druck von 3 atm und einer Temperatur von 100 °C einnehmen.

170. In einem Gefäß wurde Luft bei konstanter Temperatur bis auf 5 % ihres ursprünglichen Druckes entspannt. Welche Luftmenge mußte dazu aus dem Gefäß gepumpt werden?

171. Ein geeichtes Quecksilberbarometer zeigt bei $t_0 = 27$ °C einen Druck $b =$ $= 750$ Torr an. Die Länge der Baro-

meterröhre beträgt $l = 90$ cm, ihr Querschnitt $A = 1{,}5$ cm^2. Wenn wir in den Raum über dem Quecksilber ein wenig Sauerstoff leiten, sinkt die Quecksilbersäule um 50 mm. Berechnen Sie, welche Menge Sauerstoff wir eingeleitet haben, wenn vorausgesetzt wird, daß die Temperatur während des Prozesses konstant bleibt.

172. Ein Luftbläschen im Wasser eines Sees hat in einer Tiefe von $h = 21$ m bei der Temperatur $t_1 = 4$ °C einen Radius $r_1 = 1$ cm. Es steigt unter Volumenvergrößerung zur Wasseroberfläche auf. Wie groß wird sein Radius sein, wenn es die Wasseroberfläche erreicht hat, wo eine Temperatur von $t_2 = 27$ °C herrscht? Der atmosphärische Druck b stelle den Normaldruck dar, die Oberflächenspannung bleibe unberücksichtigt.

173. In einem Zylinder vom Volumen $V_1 = 5$ m^3 befindet sich Kohlenmonoxidgas unter einem Druck $p_1 = 150$ atm, in einem anderen Zylinder vom Volumen $V_2 = 8$ m^3 ist Wasserstoff von gleicher Temperatur, aber unter einem Druck $p_2 = 220$ atm enthalten. Bei der Vereinigung beider Gefäßinhalte bleibe die Temperatur konstant. Wie groß ist der Druck?

174. In einem Gefäß von 3 l Inhalt befinden sich 10 g Wasserstoff bei einer Temperatur von 20 °C, in einem anderen Gefäß von 5 l Inhalt bei gleicher Temperatur 8 g Stickstoff. Wie groß ist der resultierende Druck, der sich nach Vereinigung beider Gefäßinhalte einstellt?

175. Die Massenanteile eines Gemischs der durch Verbrennung entstandenen wasserfreien Gase sind folgende: 14% CO_2, 4,4% CO, 5,8% O_2, 75,8% N_2. Welchen Wert nimmt die mittlere relative Molekülmasse des Gemischs an?

176. Trockene Luft enthält – wenn wir Edelgase außer Betracht lassen – 23,2% (Massenprozente) Sauerstoff und 76,8% Stickstoff. Wie groß sind die Partialdrücke der einzelnen Komponenten, wenn der Gesamtdruck der Luft 750 Torr beträgt?

177. Ein Gasgemisch in der Zusammensetzung 12 g CO_2, 6 g O_2, 1 g CO und 86 g N_2 befindet sich bei $t_1 = 127$ °C in einem Gefäß vom Volumen $V = 3$ l. Wie groß ist der Gesamtdruck des Gemisches, und welche Werte nehmen die Partialdrücke der einzelnen Komponenten an?

178. Berechnen Sie, wieviel Moleküle (Atome) a) 1 l Wasser unter normalen Bedingungen, b) ein Eisenwürfel und c) ein Kupferwürfel mit 1 cm Kantenlänge enthält.

179. Wie groß ist die Masse eines Atoms (Moleküls) a) bei Eisen, b) bei Kupfer, c) bei Kochsalz?

180. Wie groß ist die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Moleküle a) des Stickstoffs, b) des Heliums bei den Temperaturen $t_1 = 500$ °C, $t_2 = 0$ °C, $t_3 = -270$ °C?

181. Unter der Annahme, daß die mittlere Zentraltemperatur der Sonne $2 \cdot 10^7$ °K beträgt, soll berechnet werden, wie groß die mittlere kinetische Translationsenergie der Atome im Sonneninnern ist.

182. Bei welcher Temperatur hat die mittlere quadratische Geschwindigkeit von Stickstoffmolekülen gerade den halben Wert derjenigen bei Zimmertemperatur ($t_1 = 20$ °C)?

183. Wieviel Moleküle befinden sich in einem kugelförmigen Gefäß von 3 cm Radius, das mit Sauerstoff von 27 °C unter einem Druck von 10^{-4} Torr gefüllt ist?

184. In einem Gefäß von 2 l Inhalt befinden sich $3 \cdot 10^{20}$ Stickstoffmoleküle, 10^{20} Kohlenmonoxidmoleküle sowie $2 \cdot 10^{20}$ Wasserstoffmoleküle. Der Druck des Gemisches beträgt 20 Torr. Wie hoch ist seine Temperatur?

185. Eine gewisse Menge Helium wurde von der Temperatur $t_1 = 20$ °C auf die

Temperatur $t_2 = -250$ °C abgekühlt. Wie änderte sich dabei die mittlere kinetische Energie und die Durchschnittsgeschwindigkeit der Moleküle?

186. Berechnen Sie, mit welcher durchschnittlichen und mit welcher wahrscheinlichsten Geschwindigkeit sich die Moleküle a) des Wasserstoffs, b) des Heliums und c) des Sauerstoffs bei einer Temperatur von 0 °C bewegen. Vergleichen Sie die Resultate mit der mittleren quadratischen Geschwindigkeit.
187. In einem mit Argon gefüllten Rohr pflanzt sich der Schall mit einer Geschwindigkeit v_0 fort. Berechnen Sie, welchen Wert die mittlere Geschwindigkeit der Argonmoleküle annimmt und mit welcher Geschwindigkeit sich die meisten Moleküle bewegen.
188. Berechnen Sie unter Hinzuziehung der Resultate der kinetischen Gastheorie den Wert der inneren Energie a) eines einatomigen, b) eines zweiatomigen Gases, dessen Druck mit p und dessen Volumen mit V gegeben ist.
189. Berechnen Sie unter Hinzuziehung der Aussagen der kinetischen Gastheorie a) die mittlere freie Weglänge der Moleküle von Stickstoff und Helium, b) die Zahl der Zusammenstöße pro Zeiteinheit, die ein Molekül mit den anderen bei einer Temperatur von 0 °C und einem Druck von $b_1 = 10^{-3}$ Torr und von $b_2 = 760$ Torr erfährt. Als mittlerer Durchmesser eines Stickstoffmoleküls wird der Wert $D_1 = 3{,}16 \cdot 10^{-10}$ m, für ein Heliummolekül wird $D_2 = 2{,}2 \times 10^{-10}$ m angenommen.
190. Berechnen Sie den Durchmesser eines Neonmoleküls, von dem bekannt ist, daß es bei einer Temperatur $t = 327$ °C und einem Druck von 1 Torr durchschnittlich $2{,}2 \cdot 10^6$ Zusammenstöße in der Zeiteinheit ausführt.
191. In einem kugelförmigen Gefäß vom Volumen $V = 4{,}2$ l ist bei einer Temperatur $t = 68$ °C Stickstoff enthalten. Auf welchen Druckwert muß das Gas entspannt werden, damit die mittlere freie Weglänge seiner Moleküle den Gefäßabmessungen gleichkommt? Wieviel Moleküle werden sich dann noch im Gefäß befinden? Den Durchmesser eines Stickstoffmoleküls nehmen wir mit etwa $D = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ m an.
192. Drücken Sie die allgemeine Temperaturabhängigkeit des Koeffizienten der inneren Reibung eines Gases aus. Berechnen Sie den Koeffizienten der inneren Reibung für Luft bei einer Temperatur $t = 27$ °C, wenn dieser bei der Temperatur $t_0 = 0$ °C den Wert $\eta_0 = 18 \cdot 10^{-5}$ g cm^{-1} s^{-1} annimmt.

2.3. Thermodynamik

Unter der **inneren Energie** eines Systems von Stoffen (z. B. des in einem Gefäß eingeschlossenen Gases) verstehen wir diejenige Energie, die wir dem System zuführen müssen, damit es aus dem Zustand, den wir als Grundzustand gewählt haben, in den gegebenen Zustand übergeht. Ein Stoffsystem im Gleichgewichtszustand ist durch einen genau bestimmten Wert der inneren Energie ausgezeichnet. Vom Standpunkt der molekular-kinetischen Darstellung aus verstehen wir unter der inneren Energie eines Systems die Summe aus kinetischer und potentieller Energie der das System bildenden Moleküle.

Wir führen einem Stoffsystem Energie von außen gewöhnlich *durch mechanische Arbeit oder durch Wärme* zu; die Größe der Energieänderung eines Systems kann man durch die Größe der Arbeit oder der Wärme messen.[1]) Arbeit und Wärme sind *äquivalente* (*gleichwertige*) Energieformen.

Im internationalen Einheitensystem gilt die Umrechnungsbeziehung 1 kcal = = 4186,8 J.

Wenn ein System bei infinitesimaler Änderung seines Zustands Energie von außen durch die mechanische Arbeit $\mathrm{d}W$ und die Wärme $\mathrm{d}Q$ aufnimmt, so erhöht sich seine innere Energie um den Betrag $\mathrm{d}U$ gemäß der Beziehung

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q. \tag{1}$$

Arbeit $\mathrm{d}W$ und Wärme $\mathrm{d}Q$ werden dabei in gleichen Einheiten ausgedrückt.

Die Gl. (1) stellt eine der mathematischen Formulierungen des **I. Hauptsatzes der Thermodynamik** dar.

Wenn die Größe $\mathrm{d}W$ (oder $\mathrm{d}Q$) negativ ist, so nimmt das System keine Arbeit (oder Wärme) von seiner Umgebung auf, sondern gibt sie an diese ab. Wenn wir die Arbeit, die ein System verrichtet, mit $\mathrm{d}W'$ (die abgegebene Wärme entsprechend mit $\mathrm{d}Q'$) bezeichnen, dann gelten die Beziehungen

$$\mathrm{d}W = -\mathrm{d}W', \quad \mathrm{d}Q = -\mathrm{d}Q'.$$

In einem System von Stoffen geht ein **thermodynamischer** Prozeß vor sich, wenn sich sein Zustand ändert. Der thermodynamische Prozeß, der in einem Stoffsystem abläuft, wird dann als **Kreisprozeß (zyklischer Prozeß)** bezeichnet, wenn das System nach Durchlaufen verschiedener Zustandsänderungen wieder in den Ausgangszustand zurückkehrt.

Die Arbeit, die ein Gas bei einer umkehrbaren infinitesimalen Änderung seines Volumens um den Betrag $\mathrm{d}V$ gegen die äußeren Kräfte verrichtet (sog. **Volumenarbeit**), ist durch die Beziehung

$$\mathrm{d}W' = p\,\mathrm{d}V$$

gegeben, in der p der Gasdruck ist.

Unter der spezifischen Wärmekapazität einer beliebigen Gasmenge verstehen wir die Wärmemenge, die zu ihrer Erwärmung um die Temperaturdifferenz von 1 grd notwendig ist. Wir unterscheiden: **spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck** und **spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen.** Bei einem gegebenen Gas ist erstere stets größer als letztere.

---

[1]) Gewöhnlich drückt man sich kurz aus: Einem System wird Wärme (Arbeit) zugeführt, ein System gibt Wärme ab, verrichtet Arbeit

Die Wärmekapazität eines Grammoleküls eines Gases wird als **Molekularwärme** bezeichnet. Sie hängt mit der spezifischen Wärmekapazität folgendermaßen zusammen:

$$C_p = Mc_p, \quad C_v = Mc_v,$$

wobei M die Masse eines Grammoleküls (Molmasse) Gas darstellt. Ein Gas wird dann als ideales Gas bezeichnet, wenn es die Zustandsgleichung

$$pV = nRT$$

vollkommen erfüllt und wenn es eine nur von der Temperatur abhängige innere Energie hat. Wenn sich bei der infinitesimalen Zustandsänderung eines Grammoleküls eines idealen Gases seine Temperatur um den Betrag $\mathrm{d}T$ ändert, dann ändert sich seine innere Energie um

$$\mathrm{d}U = C_v \, \mathrm{d}T.$$

Wenn uns eine bestimmte Gasmenge der Masse m vorliegt, dann enthält diese die Zahl $n = m/M$ Grammoleküle, so daß wir finden

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_v \, \mathrm{d}T = mc_v \, \mathrm{d}T.$$

Der Zusammenhang zwischen der Molekularwärme eines idealen Gases bei konstantem Druck und der Molekularwärme bei konstantem Volumen wird durch die MAYERsche Gleichung ausgedrückt

$$C_p - C_v = R.$$

Für die spezifischen Wärmekapazitäten gilt dann

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}.$$

Der I. Hauptsatz der Thermodynamik hat für eine beliebige Gasmenge die folgende Form:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W' = nC_v \, \mathrm{d}T + p \, \mathrm{d}V.$$

Es seien nunmehr einige einfache Zustandsänderungen eines idealen Gases vorgestellt.

1. **Isochore** Zustandsänderung:

Das Volumen des Gases bleibt konstant, es ist $\mathrm{d}V = 0$;

$$\mathrm{d}W' = 0; \quad \mathrm{d}Q = \mathrm{d}U; \quad Q = \int_1^2 \mathrm{d}Q = \int_1^2 \mathrm{d}U = U_2 - U_1.$$

Das Gas kann Energie nur durch Wärme aufnehmen oder abführen.

2. **Isotherme** Zustandsänderung:

Die Temperatur des Gases bleibt konstant, es ist $dT = 0$;

$$dU = nC_v\,dT = 0; \quad dQ = dW'; \quad Q = \int_1^2 dQ = \int_1^2 dW' = W'.$$

Das Gas erhält nur auf einem Wege Energie, z. B. durch Wärme (Arbeit), doch gibt es gleichzeitig an seine Umgebung die gleiche Menge an Energie auf eine andere Art ab, durch Arbeit (Wärme). Kurzgefaßt kann man den Sachverhalt ausdrücken: *Die gesamte, dem System von außen zugeführte Wärme (Arbeit) wird in mechanische Arbeit (Wärme) umgewandelt.*

3. **Adiabatische** Zustandsänderung:

Sie verläuft bei vollständiger Wärmeisolierung des Systems, d. h., es ist $dQ = 0$;

$$dW' = -dU; \quad W' = \int_1^2 dW = -\int_1^2 dU = U_1 - U_2.$$

Das Gas erhält Energie nicht durch Wärme, sondern nur durch Arbeit zugeführt. Analog kann das Gas an seine Umgebung Energie nur durch Arbeit (nicht durch Wärme) abgeben. Die vom Gas verrichtete Arbeit ist gleich der Abnahme seiner inneren Energie.

Der Zusammenhang zwischen dem Druck und dem Volumen des Gases wird durch die POISSONsche Gleichung ausgedrückt:

$$pV^{\varkappa} = p_0 V_0^{\varkappa} = \text{const}$$

$\varkappa = C_p/C_v$, p_0 Druck, V_0 Volumen des Gases im Anfangszustand).

Der CARNOTsche Kreisprozeß verläuft als ein Zyklus von vier aufeinanderfolgenden umkehrbaren Prozessen, von denen je zwei isotherm (I. und III.) sind, die bei den Temperaturen T_1 und T_2 verlaufen, und zwei adiabatisch (II. und IV.). Das Arbeitsmedium wird durch ein Grammolekül oder Kilogrammolekül eines idealen Gases dargestellt.

Im Verlauf eines Zyklus entnimmt das Gas einem Wärmespeicher der Temperatur T_1 die Wärmemenge Q_1, führt an einen Wärmespeicher der Temperatur T_2 die Wärmemenge Q_2' ab und verrichtet die Arbeit

$$W' = Q_1 - Q_2'.$$

Der Quotient aus der vom Gase verrichteten Arbeit W' und der bei einer höheren Temperatur T_1 aufgenommenen Wärme Q_1 stellt den sog. Wirkungsgrad des CARNOT-

Prozesses dar:

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Wenn der CARNOT-Prozeß entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, nimmt das Gas bei einer niedrigeren Temperatur T_2 von einem Wärmespeicher die Wärme Q_2 auf, nimmt eine bestimmte Menge mechanischer Wärme W aus der Umgebung auf und gibt an einen Wärmespeicher der höheren Temperatur T_1 sowohl die bei T_2 aufgenommene Wärme als auch die in Wärme umgewandelte, von außen aufgenommene mechanische Arbeit ab. Sein Wirkungsgrad beträgt hierbei

$$\eta = \frac{W}{W + Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Auf diesem Prinzip basiert die Arbeitsweise einer *Kältemaschine.*
Die **Entropie** stellt eine Zustandsgröße dar, die folgendermaßen ermittelt wurde: Wenn bei infinitesimaler Änderung seines Zustands ein Stoffsystem bei der Temperatur T auf umkehrbarem Wege die Wärmemenge $\mathrm{d}Q$ aufnimmt, dann ändert sich seine Entropie um den Wert

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

Die Gesamtänderung der Entropie eines Gases bei seiner Überführung aus einem Anfangszustand (1) in einen Endzustand (2) ist

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

Durch diese Beziehung kann nur die Änderung der Entropie, nicht aber ihr Wert bestimmt werden.
Die Änderung der Entropie eines idealen Gases beim Übergang aus einem Zustand, in dem es durch die Zustandsgrößen p_0, V_0 und T_0 gekennzeichnet war, in einen anderen Zustand, in dem diese Größen die Werte p, V und T annehmen, ist durch die folgende Beziehung gegeben:

$$\Delta S = \int_{(0)}^{(1)} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = nR \ln \frac{V}{V_0} + \mathrm{n}C_v \ln \frac{T}{T_0}.$$

Bei umkehrbaren adiabatischen Prozessen ändert sich die Entropie eines Stoffsystems nicht, sie bleibt konstant. Bei allen nicht umkehrbaren Prozessen, die in –

gegenüber der Umgebung thermisch isolierten – Systemen verlaufen, vergrößert sich die Entropie.
Außer den Größen p, V, T, U und S, die Funktionen des Systemzustands darstellen, werden in der Thermodynamik noch weitere Zustandsgrößen verwendet, z. B.

1. **Enthalpie** H,
die durch die folgende Beziehung definiert wird:

$$H = U + pV;$$

2. **freie Energie** F,
die durch eine weitere Beziehung definiert wird:

$$F = U - TS.$$

Aus der Definition dieser Größe ist ersichtlich, daß die von einem Stoffsystem bei der umkehrbaren isothermen Änderung seines Zustands verrichtete Arbeit gleich dem Zuwachs seiner freien Energie ist

$$-(\mathrm{d}F)_T = \mathrm{d}W'.$$

3. **potentielle thermodynamische Energie** G,
die folgendermaßen definiert wird:

$$G = U - TS + pV = H - TS.$$

Bei umkehrbaren Zustandsänderungen eines Systems, wenn das System nur Volumenarbeit verrichten kann, ist das Differential der potentiellen thermodynamischen Energie wie folgt bestimmt:

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T.$$

Die GIBBSsche Phasenregel bestimmt die Anzahl der Freiheitsgrade f eines Systems mittels der Anzahl der Phasen p und der Komponenten k, aus denen sich das System zusammensetzt, gemäß der Beziehung

$$f = k + 2 - p.$$

Unter der Zahl der Freiheitsgrade verstehen wir die Zahl der Zustandsgrößen (z. B. Druck, Temperatur usw.), die man zumindest innerhalb eines bestimmten Bereichs variieren kann, ohne daß sich dadurch die Zahl der Phasen des Systems verändert.

B Beispiele

148. Eine Stahlkugel fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ aus einer Höhe $h = 20$ m herab und wird nach dem Aufprall auf eine elastische Unterlage bis auf die Höhe $h_0 = 4$ m zurückgeworfen. Um wieviel Grad erhitzt sie sich dabei, wenn wir

voraussetzen, daß nur 60% der Arbeit, die bei der Deformation der Kugel im Moment ihres Aufpralls verrichtet wird, zur Erhöhung ihrer inneren Energie beitragen sollen?

Lösung

Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie muß die Gesamtenergie, welche die Kugel zu Beginn ihres Falles aus der Anfangshöhe besaß,

$$W = mgh + \frac{1}{2} mv_0^2,$$

erhalten bleiben. Unter Berücksichtigung des Umstands, daß die Kugel beim Zurückprallen nur bis in eine Höhe $h_0 < h$ aufsteigt, wird ein Teil der Energie an die Umgebung abgeführt, und somit erhöht sich durch die Deformationsarbeit sowohl die innere Energie der Kugel als auch die Energie der Umgebung. Für die Deformationsarbeit kann man in Übereinstimmung mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie wie folgt schreiben:

$$W = mgh + \frac{1}{2} mv_0^2 - mgh_0. \tag{1}$$

Ein Teil dieser Arbeit, und zwar der Betrag $W' = 0{,}6\ W$, trägt zur Erhöhung der inneren Energie der Kugel selbst bei, was sich durch eine Erhöhung ihrer Temperatur äußert. Offensichtlich in gleicher Weise würde sich die Temperatur erhöhen, wenn die Kugel von außen Energie in Form von Wärme zugeführt bekäme, im Wert

$$Q = mc\,\Delta t,$$

wobei Δt die Temperaturerhöhung der Kugel bedeutet.
In Hinsicht auf die Gleichwertigkeit der Arbeit W' und der Wärme Q können wir schreiben

$$W' = 0{,}6\ W = JQ = Jmc\Delta t.$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (1) gilt dann

$$Jmc\Delta t = 0{,}6\left(mgh + \frac{1}{2} mv_0^2 - mgh_0\right),$$

woraus wir nach kurzer Umformung erhalten

$$\Delta t = 0{,}6\,\frac{2g(h - h_0) + v_0^2}{2Jc},$$

d. h.,

$$\Delta t = 0{,}6\,\frac{2 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} \cdot 16 \text{ m} + 16 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 4{,}18 \text{ J cal}^{-1} \cdot 0{,}1 \cdot 10^3 \text{ cal kg}^{-1} \text{ grd}^{-1}} = \underline{0{,}23 \text{ grd}}.$$

149. Mit welcher Geschwindigkeit muß sich eine Bleikugel bewegen, damit sie beim Aufprall auf eine unelastische Wand schmilzt? Die ursprüngliche Temperatur der Kugel betrage $t_1 = 27$ °C, der Schmelzpunkt des Bleis liegt bei $t_2 = 327$ °C. Wir setzen voraus, daß die gesamte kinetische Energie der Kugel vollständig in ihre innere Energie übergeht.

Lösung

Beim Aufprall auf die unelastische Wand bleibt die Kugel in ihr hängen; ihre gesamte kinetische Energie wird durch die Verformungsarbeit

$$W = \frac{1}{2} mv^2 \tag{1}$$

auf die Kugel übertragen und erhöht ihre innere Energie.
Die von der Kugel aufgenommene Energie soll dazu ausreichen, sie bis zur Schmelztemperatur zu erhitzen und vollständig zu schmelzen. Dieses Erhitzen und das Schmelzen würden auch dann eintreten, wenn der Kugel von außen die Energie Q in Form von Wärme zugeführt worden wäre. Für das Erhitzen der Kugel von t_1 auf t_2 und für ihr Schmelzen bei der Temperatur t_2 würde folgende Wärme benötigt:

$$Q = mc(t_2 - t_1) + ml, \tag{2}$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität und l die Schmelzwärme des Bleis darstellt. Unter Berücksichtigung der Gleichwertigkeit der Wärme Q und der Arbeit W können wir auch schreiben

$$W = JQ,$$

und unter Berücksichtigung der Gln. (1) u. (2) erhalten wir

$$Jmc(t_2 - t_1) + Jml = \frac{1}{2} mv^2,$$

also

$$v^2 = 2Jc(t_2 - t_1) + 2Jl,$$

d. h.,

$$v = \sqrt{2 \cdot 4{,}18\,\mathrm{J\,cal^{-1}}\,0{,}03 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}\,grd^{-1}}\,300\,\mathrm{grd} + 2 \cdot 4{,}18\,\mathrm{J\,cal^{-1}}\,5 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}}} =$$
$$= \underline{340\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

150. Eine Arbeitsmaschine rotiert mit der Tourenzahl $n = 1200\,\mathrm{U\,min^{-1}}$ und wird ständig durch eine wassergekühlte Bremse gestoppt. Das Moment der Reibungskräfte ist $M = 500$ kpm. Der Bremsvorrichtung wird stündlich eine Wassermenge $m = 8 \cdot 10^3$ kg mit der Temperatur $t = 10\,°\mathrm{C}$ zugeleitet. Berechnen Sie, welche Temperatur das abfließende Wasser haben wird, wenn wir voraussetzen, daß nur 75% der Arbeit der Reibungskräfte zur Erhöhung der inneren Energie des Kühlwassers beitragen.

Lösung

Die Reibungskräfte, deren Moment M konstant ist, verrichten bei der Drehung eines Körpers um den Winkel φ die Arbeit

$$W = M\varphi. \tag{1}$$

Durch diese Arbeit erhöht sich die innere Energie des Wassers und auch die der Umgebung. Ein Teil dieser Arbeit vom Betrag $W_0 = 0{,}75\,W$ erhöht die innere Energie des Wassers, das der Bremsvorrichtung zugeführt wird, was sich in einer Temperaturerhöhung

um den Betrag Δt äußern muß. Ebenso würde sich die Temperatur erhöhen, wenn dem Kühlwasser von außen die Energie Q in Form von Wärme zugeführt würde. Für die Erwärmung des Wassers der Masse m um die Temperatur Δt wird eine Wärmemenge vom Betrag

$$Q = mc\Delta t \qquad (2)$$

benötigt.
Unter Berücksichtigung der Gleichwertigkeit von Arbeit W und Wärme Q kann die Gleichung

$$W_0 = JQ \qquad (3)$$

erfüllt werden. Durch einen Vergleich der Gln. (1), (2) u. (3) erhalten wir

$$mc\Delta t = 0{,}75 \frac{M}{J} \varphi. \qquad (4)$$

Die Maschine rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$, und in der Zeit t dreht sie sich um den Winkel $\varphi = 2\pi nt$. Wenn wir in Gl. (4) φ durch den Ausdruck $2\pi nt$ ersetzen, erhalten wir für die Erhöhung der Temperatur

$$\Delta t = \frac{2\pi Mnt}{Jmc} 0{,}75.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$\Delta t = 0{,}75 \frac{2\pi \cdot 500 \cdot 9{,}81 \text{ Nm} \dfrac{1200}{60} \text{ s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s}}{4{,}18 \text{ J cal}^{-1}\ 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ cal kg}^{-1} \text{ grd}^{-1}} = \underline{49{,}8 \text{ grd.}}$$

Da die Anfangstemperatur des Wassers bereits 10 °C betrug, wird die Temperatur des abfließenden Kühlwassers den Wert <u>59,8 °C</u> aufweisen.

51. Ein Stoffsystem hat aus seiner Umgebung die Wärmemenge $Q = 1$ kcal aufgenommen und gleichzeitig eine äußere Arbeit vom Wert $W' = 1680$ J verrichtet. Ermitteln Sie, wie sich bei diesem Prozeß die innere Energie des Stoffsystems veränderte.

Lösung

Gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik wird die einem System von außen durch Wärme zugeführte Energie einmal zur Änderung der inneren Energie ΔU des Systems benötigt, zum anderen wird sie an die äußere Umgebung in Form von Arbeit W' abgeführt:

$$Q = \Delta U + W'. \qquad (1)$$

In dieser Gleichung müssen alle Größen in gleichen Einheiten ausgedrückt werden. Unter Berücksichtigung der Äquivalenz von Arbeit und Wärme ist der Wärmemenge Q die Arbeit

$$W = JQ$$

gleichwertig, und wir erhalten nach Einsetzen in Gl. (1) die Beziehung

$$\Delta U = JQ - W',$$

d. h.,

$$\Delta U = 4{,}18 \text{ J cal}^{-1} \cdot 1000 \text{ cal} - 1680 \text{ J} = \underline{2500 \text{ J}}.$$

152. Bestimmen Sie die spezifische Wärmekapazität eines Gasgemisches, bestehend aus den Komponenten $m_1 = 3$ g CO, $m_2 = 6{,}1$ g N_2, $m_3 = 2{,}2$ g O_2, wenn die spezifischen Wärmekapazitäten c_{vi} jeder einzelnen Komponente bekannt sind.

Lösung

Die zur Erwärmung des Gasgemischs notwendige Wärme ist gleich der Summe der zur Erwärmung jeder einzelnen Komponente erforderlichen Wärme. Wenn wir dem Gemisch unter Konstanthaltung des Volumens (bzw. Drucks) Wärme zuführen, finden wir für die Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität

$$c_v = \frac{(\mathrm{d}Q)_v}{m\,\mathrm{d}T} \quad \text{bzw.} \quad c_p = \frac{(\mathrm{d}Q)_p}{m\,\mathrm{d}T},$$

als auf das ganze Gemisch anwendbar entsprechend

$$mc_v\,\mathrm{d}T = m_1c_{v1}\,\mathrm{d}T + m_2c_{v2}\,\mathrm{d}T + m_3c_{v3}\,\mathrm{d}T$$

und

$$mc_p\,\mathrm{d}T = m_1c_{p1}\,\mathrm{d}T + m_2c_{p2}\,\mathrm{d}T + m_3c_{p3}\,\mathrm{d}T,$$

woraus wir folgern

$$c_v = \frac{m_1c_{v1} + m_2c_{v2} + m_3c_{v3}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$c_p = \frac{m_1c_{p1} + m_2c_{p2} + m_3c_{p3}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir schließlich

$$c_v = \frac{(3 \cdot 0{,}178 + 6{,}1 \cdot 0{,}177 + 2{,}2 \cdot 0{,}155) \text{ g cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1}}{(3 + 6{,}1 + 2{,}2) \text{ g}} =$$

$$= \underline{0{,}173 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1}}.$$

Die spezifischen Wärmekapazitäten c_{pi} bestimmen wir mit Hilfe der MAYERschen Gleichung. Wenn C_p und C_v die Wärmekapazitäten eines Grammoleküls Gas darstellen, dann ist nach der MAYERschen Gleichung

$$C_p - C_v = R.$$

Da der Zusammenhang zwischen der spezifischen Wärmekapazität eines Grammoleküls und der Masseneinheit durch die Beziehung

$$C = Mc$$

ausgedrückt werden kann, wobei M die Masse eines Grammoleküls ist, wird ersichtlich, daß

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}$$

ist.
Nach Einsetzen der Werte finden wir

$$c_{p1} = 0{,}178 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1} + \frac{1{,}98 \text{ cal grd}^{-1} \text{ mol}^{-1}}{28 \text{ g mol}^{-1}} = 0{,}249 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1},$$

$$c_{p2} = 0{,}177 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1} + \frac{1{,}98 \text{ cal grd}^{-1} \text{ mol}^{-1}}{28 \text{ g mol}^{-1}} = 0{,}248 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1},$$

$$c_{p3} = 0{,}157 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1} + \frac{1{,}98 \text{ cal grd}^{-1} \text{ mol}^{-1}}{32 \text{ g mol}^{-1}} = 0{,}219 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1},$$

und für das Gasgemisch folgt schließlich

$$c_p = \frac{3 \cdot 0{,}249 + 6{,}1 \cdot 0{,}248 + 2{,}2 \cdot 0{,}219}{3 + 6{,}1 + 2{,}2} \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1} = \underline{0{,}243 \text{ cal g}^{-1} \text{ grd}^{-1}}.$$

153. In einem mit beweglichem Kolben verschlossenen Zylinder befindet sich Wasserstoff der Masse $m = 36$ g bei einer Temperatur $t_1 = 27$ °C und unter einem Druck $p_1 = 4$ atm. Dieser Wasserstoff wird auf ein Drittel seines ursprünglichen Volumens komprimiert, wozu eine Arbeit $W = 1{,}5 \cdot 10^5$ J aufgewendet werden muß. Gleichzeitig wurde ihm durch Kühlung die Wärmemenge $Q = 14{,}22 \cdot 10^3$ cal entzogen.
Berechnen Sie den Druck und die Temperatur des Wasserstoffs nach erfolgter Kompression.

Lösung

Nach dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W,$$

wobei

$$\mathrm{d}U = nC_v \,\mathrm{d}T = mc_v \,\mathrm{d}T.$$

Für die ganze durchlaufene Zustandsänderung wird

$$\int_{T_1}^{T} mc_v \,\mathrm{d}T = \int_1^2 \mathrm{d}Q + \int_1^2 \mathrm{d}W,$$

d. h.,

$$mc_v (T_2 - T_1) = Q + W,$$

woraus folgt

$$T_2 = T_1 + \frac{Q + W}{mc_v}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß die vom System aufgenommene Wärme Q negativ ist und das System nach außen die positive Wärme $Q' = -Q$ abgibt, finden wir

$$T_2 = T_1 + \frac{W - Q'}{mc_v},$$

$$T_2 = 300 \text{ grd} + \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot 0{,}239 \text{ cal J}^{-1} - 14{,}22 \cdot 10^3 \text{ cal}}{36 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 2{,}42 \cdot 10^3 \text{ cal kg}^{-1} \text{ grd}^{-1}} = 548 \text{ °K},$$

d. h.,

$$\underline{t_2 = 275 \text{ °C}.}$$

Für den Druck p_2 erhalten wir aus der Zustandsgleichung die Beziehung

$$p_2 = \frac{mRT_2}{MV_2} = \frac{3mRT_2}{MV_1},$$

und da für V_1 gilt

$$V_1 = \frac{mRT_1}{p_1 M},$$

finden wir

$$p_2 = 3p_1 \frac{T_2}{T_1},$$

d. h.,

$$p_2 = 3 \cdot 4 \text{ atm} \frac{548 \text{ grd}}{300 \text{ grd}} = \underline{22 \text{ atm}.}$$

154. Ein Gas, das bei einem Druck $p_0 = 760$ Torr und der Temperatur $t_0 = 20$ °C ein Volumen $V_0 = 830$ l einnahm, wird komprimiert. Für die Kompression wird eine Arbeit $W = 166770$ J verrichtet. Berechnen Sie den nach der Kompression vorliegenden Wert des Volumens, des Drucks und der Temperatur unter der Voraussetzung, daß das Gas bei der Kompression entsprechend dem Gesetz $pV^n =$ const behandelt wird, wobei $n = 1{,}25$ ist.

Lösung

Das Gas verrichtet bei der Änderung seines Volumens von V_0 auf V_1 die Arbeit

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p \, dV.$$

In unserem Fall wird das Gas komprimiert, die Arbeit W', die das Gas nach außen verrichtet, ist negativ; zur Kompression des Gases mußte also von außen die positive Arbeit $W = -W'$ zugeführt werden. Daher gilt

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} p \, dV. \qquad (1)$$

Das auf der rechten Seite von Gl. (1) stehende Integral können wir ausrechnen, indem wir mit der Gl. $pV^n = p_0 V_0^n = \text{const}$ die Größe p ausdrücken und in Gl. (1) einsetzen. Somit erhalten wir

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} p_0 \frac{V_0^n}{V^n} \mathrm{d}V = -p_0 V_0^n \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^n} \mathrm{d}V = \frac{p_0 V_0^n}{n-1} (V_1^{1-n} - V_0^{1-n}),$$

woraus wir für das Volumen des Gases nach der Zustandsänderung finden

$$V_1^{1-n} = \frac{(n-1)\,W + p_0 V_0}{p_0 V_0^n}.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$V_1^{-1/4} = \frac{\frac{1}{4}\,166770\,\mathrm{J} + 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}} \cdot 0{,}83\,\mathrm{m^3}}{1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}\,(0{,}83\,\mathrm{m^3})^{5/4}},$$

woraus wir entnehmen

$$\underline{V_1 = 0{,}166\,\mathrm{m^3}.}$$

Der sich einstellende Enddruck p_1 kann aus der Gleichung

$$p_1 V_1^n = p_0 V_0^n$$

bestimmt werden, indem wir finden

$$p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right) = 1\,\mathrm{atm} \left(\frac{0{,}83\,\mathrm{m^3}}{0{,}166\,\mathrm{m^3}}\right)^{5/4} = \underline{7{,}5\,\mathrm{atm}.}$$

Für die Ermittlung der Endtemperatur wenden wir die Gleichung

$$p_0 V_0^n = p_1 V_1^n$$

an, in die wir aus der Zustandsgleichung

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1},$$

$$V_1 = \frac{p_0 V_0}{p_1} \frac{T_1}{T_0}$$

einsetzen,

so daß wir aus der Umformung erhalten

$$p_0^{1-n} T_0^n = p_1^{1-n} T_1^n,$$

woraus resultiert

$$T_1 = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-n}{n}} T_0.$$

Mit den gegebenen Werten folgt

$$T_1 = \left(\frac{1\ \text{atm}}{7{,}5\ \text{atm}}\right)^{-1/5} \cdot 293\ ^\circ\text{K} = 438{,}3\ ^\circ\text{K},$$

d. h.,

$$\underline{t_1 = 165\ ^\circ\text{C}.}$$

155. Eine bestimmte Menge Helium vergrößert bei konstantem Druck $p_0 = 2$ atm ihr Volumen vom Ausgangswert $V_0 = 3$ l auf den doppelten Wert. Berechnen Sie die dafür notwendige Wärmezufuhr. Die POISSONsche Konstante für Helium ist $\varkappa = 1{,}67$.

Lösung

Entsprechend dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$\mathrm{d}Q = \frac{m}{M} C_v\, \mathrm{d}T + p\, \mathrm{d}V.$$

Für die Zustandsänderung ist bei konstantem Druck $p = p_0$ und $V_1 = 2V_0$, und wir erhalten nach Integration

$$Q = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_0) + p_0 V_0. \tag{1}$$

Jedoch gilt gemäß der Zustandsgleichung

$$\frac{m}{M} T_1 - \frac{m}{M} T_0 = \frac{p_0 2 V_0}{R} - \frac{p_0 V_0}{R} = \frac{p_0 V_0}{R},$$

was nach Einsetzen in Gl. (1) ergibt

$$Q = \frac{C_v}{R} p_0 V_0 + p_0 V_0 = \frac{C_v + R}{R} p_0 V_0.$$

Unter Anwendung der MAYERschen Gleichung können wir weiterhin schreiben

$$Q = \frac{C_p}{R} p_0 V_0.$$

Da $C_p/C_v = \varkappa$ und $C_p - C_v = R$ ist, wird

$$C_p = \varkappa C_v = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R,$$

so daß wir finden

$$Q = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_0 V_0.$$

Mit den in der Aufgabe vorgegebenen Werten folgt

$$Q = \frac{1{,}67}{0{,}67}\, 2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{N}\,\text{m}^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 1515\ \text{J} = \underline{362\ \text{cal}.}$$

156. Berechnen Sie, welche Wärmemenge bei der Kompression von $m = 45$ g Kohlendioxid der Temperatur $t_1 = -15$ °C vom Druck $p_1 = 2{,}3\ \text{kp cm}^{-2}$ auf den Druck $p_2 = 5{,}8\ \text{kp cm}^{-2}$ durch Kühlung abgeführt werden muß, damit die Kompression bei Temperaturkonstanz, also isotherm, ausgeführt werden kann.

Lösung

Bei einem isothermen Prozeß bleibt die innere Energie eines idealen Gases konstant. Bei der Veränderung seines Volumens vom Wert V_1 auf den Wert V_2 verrichtet das Gas durch Umwandlung der aufgenommenen Wärme Q die Arbeit

$$W' = Q = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V.$$

Dieser Ausdruck kann integriert werden, wenn wir für den Druck aus der Zustandsgleichung den Ausdruck

$$p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}$$

einsetzen. Dann ergibt sich

$$W' = Q = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Bei einer isothermen Änderung gilt entsprechend dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz die Beziehung

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

und daher finden wir

$$W' = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = Q.$$

Da der Druck $p_1 < p_2$ ist, wird diese Arbeit (ebenfalls natürlich die aufgenommene Wärme) negatives Vorzeichen haben. Für eine isotherme Kompression ist es notwendig, von außen die positive Arbeit $W = -W'$ zuzuführen, die vollkommen in Wärme umgewandelt wird. Diese Wärme muß dem Gas durch Abkühlung entzogen werden. Für sie gilt

$$Q' = W = -\frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

also

$$Q' = \frac{45 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}{44 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1}}\, 8{,}31\ \text{J grd}^{-1}\ \text{mol}^{-1} \cdot 258\ \text{grd} \cdot 2{,}3 \lg \frac{2{,}3\ \text{kp cm}^{-2}}{5{,}8\ \text{kp cm}^{-2}} =$$

$$= 2026\ \text{J} = \underline{\underline{485\ \text{cal.}}}$$

157. Ein Kompressor saugt in jeder Stunde atmosphärische Luft vom Volumen $V_0 = 150\ \mathrm{m}^3$ an und komprimiert sie auf einen Druck von $p_1 = 11\ \mathrm{kp\ cm}^{-2}$. Während der Kompression wird die Luft durch einen Wasserstrom gekühlt, so daß man die Kompression als einen isothermen Prozeß betrachten kann. Berechnen Sie den Wasserstrom, der stündlich durch die Kühlvorrichtung fließt, wenn das Wasser von $t_0 = 10\ °\mathrm{C}$ auf $t_1 = 18\ °\mathrm{C}$ erwärmt wird. Der Außendruck der Luft hat den Wert $p_0 = 1$ at.

Lösung

Das durch die Kühlvorrichtung strömende Wasser nimmt in jeder Stunde Wärme vom Betrag Q' auf und erwärmt sich dadurch um die Temperaturdifferenz Δt, wobei offenbar die Beziehung

$$Q' = mc\Delta t$$

erfüllt wird, so daß sich ergibt

$$m = \frac{Q'}{c\Delta t}. \tag{1}$$

Die Kompression ist ein isothermer Prozeß, d. h., die innere Energie des Gases bleibt konstant, und die von außen zugeführte Gesamtarbeit W wandelt sich in die Wärme Q' um, die ihrerseits mit dem Kühlwasser abgeführt wird.
Nach dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V = Q'.$$

Wenn wir für den Druck p aus dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz den Ausdruck

$$p = \frac{p_0 V_0}{V} \tag{2}$$

einsetzen, finden wir

$$Q' = \int_{V_1}^{V_0} \frac{p_0 V_0}{V}\,\mathrm{d}V = p_0 V_0 \ln\frac{V_0}{V_1}.$$

Da nach Gl. (2) auch $\dfrac{V_0}{V_1} = \dfrac{p_1}{p_0}$ ist, gilt weiterhin

$$Q' = p_0 V_0 \ln\frac{p_1}{p_0}.$$

Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir für die gesuchte Wassermenge die Beziehung

$$m = \frac{p_0 V_0 \ln\dfrac{p_1}{p_0}}{c\Delta t},$$

d. h.,

$$m = \frac{0{,}9807 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 150 \text{ m}^3 \cdot 2{,}3 \lg \frac{11}{1}}{1 \cdot 10^3 \text{ cal kg}^{-1} \text{ grd}^{-1} \cdot 8 \text{ grd}} \, 0{,}239 \text{ cal J}^{-1} = \underline{1052 \text{ kg}}.$$

158. In einem mit verschiebbarem Kolben verschlossenen Kreiszylinder der Höhe $l_1 = 0{,}5$ m befindet sich Luft bei einer Temperatur $t_1 = 20$ °C und unter einem Druck $p_1 = 760$ Torr. Auf welchen Betrag ändern sich Druck und Temperatur der eingeschlossenen Luft, wenn bei einer adiabatischen Kompression der Kolben um den Betrag $l_2 = 0{,}2$ m verschoben wird? Die POISSONsche Konstante für Luft hat den Wert $\varkappa = 1{,}4$.

Lösung

Den nach der adiabatischen Kompression sich einstellenden Luftdruck bestimmen wir gemäß der POISSONschen Gleichung

$$p_1 V_1^\varkappa = p_2 V_2^\varkappa,$$

woraus wir finden

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\varkappa. \tag{1}$$

Vor Beginn der Kompression nahm die Luft ein Volumen der Größe $V_1 = \pi \frac{d^2}{4} l_1$ ein, nach der Kompression verringert sich das Volumen auf den Wert $V_2 = \pi \frac{d^2}{4}(l_1 - l_2)$. Nach Einsetzen dieser beiden Volumenangaben in Gl. (1) erhalten wir für den Druck die Beziehung

$$p_2 = p_1 \left(\frac{l_1}{l_1 - l_2}\right)^\varkappa,$$

d. h.,

$$p_2 = 1 \text{ atm} \left(\frac{0{,}5}{0{,}3}\right)^{1{,}4} = \underline{2{,}04 \text{ atm}}.$$

Die Abhängigkeit der Temperatur des Gases von seinem Volumen erhalten wir für die adiabatische Zustandsänderung aus Gl. (1), in der wir den Druck p_2 durch den Ausdruck

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T_2}{V_2}$$

ersetzen. Nach geringfügiger Umformung erhalten wir

$$T_1 V_1^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1},$$

woraus wir finden

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1},$$

d. h.,

$$T_2 = 293\ ^\circ\text{K} \left(\frac{5}{3}\right)^{0,4} = 359{,}5\ ^\circ\text{K}$$

oder

$$\underline{t_2 = 86{,}5\ ^\circ\text{C}.}$$

159. Aus einem Ballon, der Sauerstoff unter einem Druck $p_1 = 1140$ Torr enthält, wird plötzlich eine bestimmte Gasmenge abgelassen, wobei der Druck des Gases auf den Wert $p_2 = 760$ Torr abfällt. Dieser Prozeß kann als adiabatisch angesehen werden. Nach dem Verschließen des so entlasteten Ballons nimmt das eingeschlossene Restgas von außen Wärme auf, und zwar so lange, bis es seine ursprüngliche Temperatur wieder angenommen hat. Berechnen Sie, wieviel Prozent der ursprünglichen Gasmenge abgelassen wurde und welcher Gasdruck sich nach Beendigung des Prozesses einstellt.

Lösung

Für den Ausgangszustand gilt die Zustandsgleichung

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1. \tag{1}$$

Mit dem Ablassen einer Sauerstoffmenge der Größe Δm ändern sich Druck und Temperatur auf die neuen Werte p_2 bzw. T_2, und der Zusammenhang zwischen den neuen Zustandsgrößen wird wiederum von der Zustandsgleichung angegeben:

$$p_2 V_1 = \frac{m - \Delta m}{M} R T_2. \tag{2}$$

Wenn wir die Gln. (1) und (2) dividieren, erhalten wir

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{m - \Delta m} \frac{T_1}{T_2}. \tag{3}$$

Da es sich beim Gasablassen um einen adiabatischen Prozeß handeln soll, können wir den Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur mit Hilfe der POISSONschen Gleichung ausdrücken

$$p_1 V_1^\varkappa = p_2 V_2^\varkappa,$$

in die wir für das Volumen V_2 den aus der Zustandsgleichung ermittelten Wert

$$V_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 T_1}$$

einsetzen. Nach Umformung erhalten wir

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}. \tag{4}$$

Wenn wir diesen Ausdruck in Gl. (3) einsetzen, finden wir

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{m - \Delta m} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{m - \Delta m}{m} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

und für die Menge des abgelassenen Gases ergibt sich in Prozenten

$$100 \frac{\Delta m}{m} = 100 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\right].$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte folgt

$$100 \frac{\Delta m}{m} = 100 \left[1 - \left(\frac{760}{1140}\right)^{\frac{1}{1,4}}\right] = \underline{25\%.}$$

Bei der anschließenden Wiedererwärmung erreicht das Gas wieder seine Ausgangstemperatur T_1 und den neuen Druck p_3. Gemäß der Zustandsgleichung gilt

$$\frac{p_3 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_1}{T_2},$$

woraus wir finden

$$p_3 = p_2 \frac{T_1}{T_2},$$

und nach Einsetzen von Gl. (4) für den Ausdruck $\frac{T_1}{T_2}$ erhalten wir

$$p_3 = p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = 760 \text{ Torr} \left(\frac{1140 \text{ Torr}}{760 \text{ Torr}}\right)^{\frac{0,4}{1,4}} = \underline{853,4 \text{ Torr}.}$$

160. Wir vergrößern ein bestimmtes Volumen Stickstoff der Temperatur $t_0 = 27$ °C und des Drucks $p_0 = 760$ Torr einmal
a) isotherm und
b) adiabatisch
auf den doppelten Wert. Berechnen Sie, auf welchen Betrag sich dabei die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle und die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle verändert.

Lösung

a) Bei der isothermen Zustandsänderung bleibt die Temperatur konstant, also ändert sich auch die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle nicht:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,3 \text{ J grd}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 300 \text{ °K}}{28 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}} = \underline{516,4 \text{ m s}^{-1}.}$$

Die Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle ändert sich von n_0 auf n_1. Für ihren Quotienten erhalten wir

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{\dfrac{p_1}{kT_0}}{\dfrac{p_0}{kT_0}} = \frac{p_1}{p_0}.$$

Nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE ist

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 \quad \text{und} \quad \frac{n_1}{n_0} = \frac{V_0}{V_1},$$

so daß wir finden

$$n_1 = \frac{1}{2} n_0 = \frac{1}{2} \frac{p_0}{kT_0} = \frac{p_0 N_A}{2RT_0} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 6{,}03 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{2 \cdot 0{,}082 \text{ l atm grd}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 300 \text{ °K}} =$$
$$= 1{,}225 \cdot 10^{22} \text{ l}^{-1} = \underline{1{,}225 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}}.$$

Im Ausgangszustand ist $n_0 = 2n_1 = 2{,}45 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}.

b) Durch die adiabatische Zustandsänderung, d. h. bei Änderung des Volumens von V_0 auf V_2, ändert sich die Temperatur des Gases auf T_2. Mit Hilfe der POISSONschen Gleichung (vgl. Aufg. 158!) kann man sie aus folgender Beziehung ermitteln:

$$T_0 V_0^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1}. \tag{1}$$

Da für Stickstoff $\varkappa = 1{,}4$ ist, können wir schreiben

$$T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = 300 \text{ °K} \left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}4} = 227{,}3 \text{ °K}.$$

Für die mittlere Geschwindigkeit erhalten wir den Wert nach Vollzug der adiabatischen Zustandsänderung zu

$$\bar{v}' = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}3 \cdot 227{,}3}{28 \cdot 10^{-3}}} \text{ m s}^{-1} = \underline{449{,}5 \text{ m s}^{-1}}.$$

Da wir die Zahl der Moleküle je Volumeneinheit nach Vorliegen der adiabatischen Zustandsänderung – n_2 – bestimmen wollen, müssen wir den sich einstellenden Enddruck kennen. Wir ermitteln diesen aus der POISSONschen Gleichung

$$p_0 V_0^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa},$$

woraus wir finden

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa}$$

und

$$n_2 = \frac{p_2}{kT_2} = \frac{p_0}{kT_2} \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa}.$$

Wenn wir hier den Wert für T_2 aus der Gl. (1) einsetzen, erhalten wir nach Umformung

$$n_2 = \frac{p_0}{kT_0} \frac{V_0}{V_2} = \frac{1}{2} n_0 .$$

Also wird – nach Durchlaufen der isothermen und der adiabatischen Zustandsänderung – die auf die Volumeneinheit entfallende Anzahl von Molekülen gleich sein. Dieser Umstand wird aus dem Verhalten des Gases deutlich, das in beiden Fällen sein Volumen verdoppelt.

161. In einem Ballon befindet sich ein Gemisch aus zwei chemisch nicht aufeinander wirkenden Gasen. Leiten Sie für den Fall einer adiabatischen Zustandsänderung die Abhängigkeit des Druckes vom Volumen ab.

Lösung

Gemäß dem Gesetz von DALTON wird in einem Gemisch von chemisch nicht aufeinander wirkenden Gasen jedes Gas so behandelt, als ob ihm allein der gesamte verfügbare Raum V zustünde.
Wenn n_1 und n_2 die Anzahl der Grammoleküle der einzelnen Komponenten im Gemisch, C_{v1} und C_{v2} die zugehörigen, auf ein Grammolekül bezogenen Wärmekapazitäten und p_1 und p_2 die Partialdrücke darstellen, dann ändert sich die innere Energie des Gasgemischs bei differentieller Zustandsänderung um

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2 = n_1 C_{v1}\, \mathrm{d}T + n_2 C_{v2}\, \mathrm{d}T,$$

und es wird die Arbeit

$$\mathrm{d}W' = \mathrm{d}W_1' + \mathrm{d}W_2' = p_1\, \mathrm{d}V + p_2\, \mathrm{d}V$$

verrichtet.
Gemäß dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt für die adiabatische Zustandsänderung in diesem Fall ($\mathrm{d}Q = 0$)

$$n_1 C_{v1}\, \mathrm{d}T + n_2 C_{v2}\, \mathrm{d}T + p_1\, \mathrm{d}V + p_2\, \mathrm{d}V = 0 .$$

Wenn wir für p_1 und p_2 entsprechend der Zustandsgleichung die Ausdrücke

$$p_1 = \frac{n_1 RT}{V} , \quad p_2 = \frac{n_2 RT}{V}$$

einsetzen, erhalten wir die Beziehung

$$n_1 C_{v1}\, \mathrm{d}T + n_2 C_{v2}\, \mathrm{d}T + n_1 RT \frac{\mathrm{d}V}{V} + n_2 RT \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 .$$

Nach einer einfachen Umformung finden wir

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{n_1 R + n_2 R}{n_1 C_{v1} + n_2 C_{v2}} \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0,$$

und nach erfolgter Integration erhalten wir zunächst die Abhängigkeit der Temperatur vom Volumen zu

$$T V^{\frac{n_1 R + n_2 R}{n_1 C_{v1} + n_2 C_{v2}}} = k . \tag{2}$$

Um aber die Abhängigkeit $p(V)$ zu finden, setzen wir für T den aus der Zustandsgleichung resultierenden Ausdruck

$$pV = nRT$$

ein, wobei allerdings $p = p_1 + p_2$ und $n = n_1 + n_2$ ist. Wir erhalten damit

$$pV^{\frac{n_1R + n_2R}{n_1C_{v1} + n_2C_{v2}} + 1} = knR = \text{const},$$

woraus wir nach Umformung und unter Anwendung der MAYERschen Gleichung $C_p = C_v + R$ die gesuchte Abhängigkeit finden

$$p\,V^{\frac{n_1C_{p1} + n_2C_{p2}}{n_1C_{v1} + n_2C_{v2}}} = \text{const}.$$

162. In einem mit Luft gefüllten und an beiden Enden verschlossenen Kreiszylinder befindet sich ein frei beweglicher, reibungsfrei gelagerter Kolben, der das Volumen des Zylinders in zwei Hälften unterteilt. Der Luftdruck hat auf beiden Seiten des Kolbens die gleiche Größe $p_0 = 760$ Torr. Wenn wir den Kolben geringfügig aus der Gleichgewichtslage ablenken und dann loslassen, beginnt er eine Schwingungsbewegung auszuführen. Berechnen Sie die Periodendauer dieser Schwingungen, wenn wir die Prozesse im Gas dabei als adiabatisch ansehen. Der Kolben hat die Masse $m = 1{,}5$ kg, sein Abstand von der Wand hat den Wert $l_0 = 0{,}2$ m, die Fläche des Kolbens hat den Betrag $A = 1 \cdot 10^{-2}$ m^2.

Lösung

Wenn wir den Kolben um eine kleine Strecke x z. B. nach rechts verschieben (Bild 87), so erhöht sich das Volumen im linken Teil des Zylinders auf den Wert $V_1 = V_0 + V = A(l_0 + x)$, und der Druck verringert sich von p_0 auf p_1, während im rechten Teil des Zylinders das verfügbare Volumen sich auf den Wert $V_2 = A(l_0 - x)$ verkleinert, wobei der Druck von p_0 auf p_2 anwächst. Wenn wir die bei geringfügigen Verschiebungen des Kolbens eintretenden Veränderungen als adiabatische Prozesse ansehen, so gilt die POISSONsche Gleichung

$$p_0V_0^\varkappa = p_1V_1^\varkappa,$$

$$p_0V_0^\varkappa = p_2V_2^\varkappa,$$

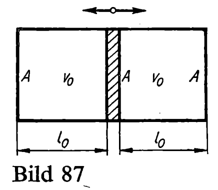


Bild 87

und nach Einsetzen für V_1 und V_2 erhalten wir

$$p_0l_0^\varkappa = p_1(l_0 + x)^\varkappa,$$

$$p_0l_0^\varkappa = p_2(l_0 - x)^\varkappa.$$

In der Grundstellung ist die auf den Kolben wirkende resultierende Kraft gleich Null. Nach erfolgter Auslenkung aus der Nullage wirkt auf den Kolben eine resultierende Druckkraft

$$F = (p_2 - p_1)A = Ap_0\left[\frac{l_0^\varkappa}{(l_0 - x)^\varkappa} - \frac{l_0^\varkappa}{(l_0 + x)^\varkappa}\right] =$$

$$= Ap_0l_0^\varkappa\frac{(l_0 + x)^\varkappa - (l_0 - x)^\varkappa}{(l_0^2 - x^2)^\varkappa}.$$

Bei nur geringfügiger Auslenkung kann die Größe x^2 gegenüber l_0^2 vernachlässigt werden, und analog kann in der binomischen Entwicklung $(l_0 \pm x)$ jedes Glied vernachlässigt werden, in dem die Auslenkung x in einer höheren als der ersten Potenz auftritt. Nach solcherart vorgenommener Vereinfachung wird

$$F = A(p_2 - p_1) = \frac{2Ap_0\varkappa}{l_0}x.$$

Aus diesem Ergebnis folgt, daß die auf den Kolben wirkende Kraft immer proportional zur momentanen Auslenkung aus der Nullage ist. Die Richtung der angreifenden Kraft ist parallel zur Richtung der Verschiebung. Daher können wir für die Kolbenbewegung folgende Bewegungsgleichung aufschreiben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{2Ap_0\varkappa}{ml_0} = \text{const.}$$

Der Kolben wird offenbar harmonische Schwingungen ausführen, deren Periodendauer sich ergibt zu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{2p_0A\varkappa}}.$$

Nach Einsetzen der Werte finden wir

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}5\ \text{kg}\cdot 0{,}2\ \text{m}}{2\cdot 1{,}013\cdot 10^5\ \text{N m}^{-2}\cdot 10^{-2}\ \text{m}^2\cdot 1{,}4}} = \underline{0{,}06\ \text{s}.}$$

163. Eine bestimmte Menge Luft sei in einem Volumen $V_0 = 10$ l bei einer Temperatur $t_0 = 0$ °C und dem Druck $p_0 = 1$ at enthalten. Sie wird zunächst isotherm auf das Volumen $V_1 = 2$ l komprimiert, um anschließend adiabatisch auf das Volumen $V_2 = 20$ l expandiert zu werden. Welche Lufttemperatur stellt sich nach Durchlaufen dieser Zustandsänderungen ein, und welche Gesamtarbeit muß dazu aufgebracht werden? Für Luft gilt $\varkappa = 1{,}4$.

Lösung

Nach Durchlaufen der isothermen Zustandsänderung wird die Luft durch die Zustandsgrößen p_1, V_1 und T_1 charakterisiert sein. Für sie gilt entsprechend dem Gesetz von Boyle-Mariotte

$$p_0V_0 = p_1V_1, \quad T_1 = T_0. \tag{1}$$

Nach Durchlaufen der adiabatischen Zustandsänderung werden Druck, Volumen und Temperatur des Gases die Werte p_2, V_2 und T_2 annehmen. Die sich einstellende Temperatur bestimmen wir aus der für die adiabatische Zustandsänderung geltenden Beziehung (vgl. Aufg. 158!)

$$T_1V_1^{\varkappa-1} = T_2V_2^{\varkappa-1}.$$

Unter Heranziehung von Gl. (1) können wir weiterhin schreiben

$$T_0V_1^{\varkappa-1} = T_2V_2^{\varkappa-1},$$

woraus wir für die gesuchte Temperatur T_2 die Beziehung erhalten

$$T_2 = T_0 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1}.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich dafür

$$T_2 = 273\ \text{°K} \left(\frac{2\,\text{l}}{20\,\text{l}}\right)^{1,4-1} = 108{,}6\ \text{°K};\quad \underline{t_2 = -164{,}4\ \text{°C}.}$$

Die Gesamtarbeit W', die das Gas verrichtet, wird gleich der Summe der beiden Arbeiten sein, die bei der isothermen Zustandsänderung (W'_{I}) und bei der adiabatischen Zustandsänderung (W'_{II}) auftreten. Für sie gilt

$$W'_{\text{I}} = \int \mathrm{d}W' = \int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V = \frac{m}{M} R T_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0},$$

$$W'_{\text{II}} = \int \mathrm{d}W' = \int -\mathrm{d}U = -\int_{T_1}^{T_2} m c_v\,\mathrm{d}T = m c_v (T_1 - T_2). \tag{2}$$

Unter Anwendung der MAYERschen Gleichung stellen wir fest, daß

$$c_v = \frac{R}{M(\varkappa - 1)} \quad \text{(vgl. Aufg. 195!)}$$

Wir setzen das in Gl. (2) ein und erhalten nach Umformung

$$W'_{\text{II}} = \frac{mR}{M(\varkappa - 1)} (T_1 - T_2) = \frac{mRT_1}{M(\varkappa - 1)} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Entsprechend der Zustandsgleichung ist aber

$$\frac{mRT_1}{M} = p_0 V_0,$$

so daß sich ergibt

$$W'_{\text{II}} = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Die vom Gas verrichtete Gesamtarbeit ist

$$W' = W'_{\text{I}} + W'_{\text{II}} = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0} + \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) =$$

$$= 1\ \text{at} \cdot 10\,\text{l} \cdot \ln \frac{2}{10} + \frac{1\ \text{at} \cdot 10\,\text{l}}{0{,}4} \left(1 - \frac{108{,}6}{273}\right) = 1{,}03\ \text{l at}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $1\ \text{l at} = 10^3\ \text{cm}^3\ \text{kp cm}^{-2} = 10\ \text{kpm} = 98{,}1\ \text{J}$ ist, ergibt sich

$$\underline{W' = -101\ \text{J}.}$$

Dem Gas muß also die Arbeit $W' = 101$ J zugeführt werden.

164. Eine bestimmte Gasmenge nimmt bei einem Druck $p_0 = 760$ Torr ein Volumen $V_0 = 1$ l ein. Das Gas soll nacheinander folgenden Veränderungen unterzogen werden:
a) isobare Erwärmung bis zur Volumenverdopplung,
b) weitere isochore Erwärmung bis zur Druckverdopplung,
c) adiabatische Expansion, bis die Temperatur wieder am Ausgangswert angelangt ist.
Berechnen Sie, welche Gesamtwärme dem Gas während dieser Prozesse zugeführt wurde, welche Arbeit das Gas verrichtete und wie sich dabei seine innere Energie änderte. Die POISSONsche Konstante des betrachteten Gases hat den Wert $\varkappa = 1{,}4$.

Lösung

Bei jedem einzelnen Prozeß ermitteln wir die vom Gas verrichtete Arbeit, die Änderung seiner inneren Energie und die ihm zugeführte Wärme. Zur Berechnung wenden wir den I. Hauptsatz der Thermodynamik an, der für eine infinitesimale Zustandsänderung die folgende Form annimmt:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W', \quad \text{wobei} \quad \mathrm{d}W' = p\,\mathrm{d}V.$$

Für ein ideales Gas gilt

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_v \,\mathrm{d}T.$$

Da in unserem vorliegenden Fall die POISSONsche Konstante des Gases bekannt ist, bestimmen wir die spezifische Wärmekapazität eines Grammoleküls aus der Beziehung

$$C_v = \frac{R}{\varkappa - 1}$$

und

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} \mathrm{d}T.$$

a) Isobare Zustandsänderung: Nach Durchlaufen dieser Zustandsänderung hat das Gas den Druck $p_1 = p_0$, das Volumen $V_1 = 2\,V_0$, und für die Temperatur T_1 finden wir aus der Zustandsgleichung

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 2 V_0}{T_1}; \quad T_1 = 2 T_0.$$

Das Gas verrichtet die Arbeit

$$W'_{\mathrm{I}} = \int_{V_0}^{2V_0} p_0 \,\mathrm{d}V = \underline{p_0 V_0}.$$

Seine innere Energie verändert sich um den Betrag

$$\Delta U_1 = \int_{T_0}^{2T_0} \frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} \mathrm{d}T = \frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} T_0.$$

Entsprechend der Zustandsgleichung

$$\frac{mRT_0}{M} = p_0 V_0$$

gilt

$$\Delta U_{\mathrm{I}} = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1}.$$

Die dem Gas zugeführte Wärme wird

$$Q_{\mathrm{I}} = \Delta U_{\mathrm{I}} + W'_{\mathrm{I}} = p_0 V_0 + \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1} = p_0 V_0 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}.$$

b) Isochore Zustandsänderung: Nach Durchlaufen dieser Zustandsänderung hat das Gas den Druck $p_2 = 2p_1 = 2p_0$, das Volumen $V_2 = V_1 = 2V_0$, und für die Temperatur erhalten wir aus der Zustandsgleichung den Wert

$$T_2 = 4T_0.$$

Da hierbei $V = \text{const}$ ist, wird die vom Gas verrichtete Volumenarbeit $W'_{\mathrm{II}} = 0$. Die innere Energie ändert sich um den Betrag

$$\Delta U_{\mathrm{II}} = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} \,\mathrm{d}T = \frac{mR}{M(\varkappa - 1)} \int\limits_{2T_0}^{4T_0} \mathrm{d}T = \frac{2mRT_0}{M(\varkappa - 1)} = \frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1}.$$

Im Verlauf der isochoren Zustandsänderung wird dem Gas die Wärme

$$Q_{\mathrm{II}} = W'_{\mathrm{II}} + \Delta U_{\mathrm{II}} = \frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1}$$

zugeführt.

c) Adiabatische Zustandsänderung: Nach Durchlaufen dieser Zustandsänderung hat das Gas den Druck p_3 und das Volumen V_3, die Temperatur $T_3 = T_0$. Das Volumen V_3 bestimmen wir aus der Beziehung

$$T_3 V_3^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1},$$

welche die Abhängigkeit von Temperatur und Volumen bei der adiabatischen Zustandsänderung angibt (vgl. Aufg. 158!). Aus ihr erhalten wir

$$V_3 = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdot V_2 = \left(\frac{4T_0}{T_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdot 2V_0 = 2^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} V_0.$$

Gemäß der Poissonschen Gleichung

$$p_3 V_3^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa}$$

folgt für den Druck p_3

$$p_3 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\varkappa} = 2p_0 \left(\frac{2\,V_0}{2^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,V_0}\right)^{\varkappa} = 2^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} p_0.$$

Beim adiabatischen Prozeß ist die vom Gas verrichtete Arbeit gleich der Abnahme seiner inneren Energie; daher gilt

$$W'_{\text{III}} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -\int_{T_2}^{T_3} \frac{m}{M} C_v\,\mathrm{d}T = -\frac{m}{M}\,\frac{R}{\varkappa - 1}\int_{4T_0}^{T_0} \mathrm{d}T = \frac{mR}{M(\varkappa - 1)} 3T_0,$$

und unter Hinzuziehung der Zustandsgleichung erhalten wir dafür

$$\underline{W'_{\text{III}} = \frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1}}\,.$$

Bei dieser Zustandsänderung nimmt das Gas weder Wärme auf, noch gibt es welche ab. Es ist also $\underline{Q_{\text{III}} = 0}$, und die Änderung der inneren Energie ergibt sich zu

$$\Delta U_{\text{III}} = -W'_{\text{III}} = \underline{-\frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1}}\,.$$

Insgesamt wird bei den angegebenen Zustandsänderungen die Arbeit

$$W' = W'_{\text{I}} + W'_{\text{II}} + W'_{\text{III}} = p_0 V_0 + \frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1} = p_0 V_0 \frac{\varkappa + 2}{\varkappa - 1} = \underline{862\ \text{J}}$$

verrichtet und die Wärme

$$Q = Q_{\text{I}} + Q_{\text{II}} + Q_{\text{III}} = p_0 V_0 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} + \frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1} = p_0 V_0 \frac{\varkappa + 2}{\varkappa - 1} = \underline{862\ \text{J}}$$

zugeführt. Damit ist die Änderung der inneren Energie

$$\Delta U = \Delta U_{\text{I}} + \Delta U_{\text{II}} + \Delta U_{\text{III}} = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1} + \frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1} - \frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1} = \underline{0}.$$

165. Im Volumen V_0 eines Gefäßes befindet sich bei der Temperatur t_0 eine bestimmte Menge eines Gases bekannter Molmasse. Berechnen Sie, welche Arbeit für das Komprimieren dieser Gasmenge m auf ein Volumen V_1 notwendig ist und wie sich bei diesem Prozeß seine Temperatur ändert, wenn bei dieser Zustandsänderung das Gas dem Gesetz $pV^n = \text{const}$ folgt, wobei $1 < n < \varkappa$ ist.

Lösung

Das Gas verrichtet die Arbeit

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V.$$

Wenn wir in dieser Gleichung den Druck p aus der Beziehung

$$pV^n = p_0 V_0^n = \text{const}$$

ersetzen, finden wir

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^n}{V^n} \, \mathrm{d}V.$$

Nach Integration erhalten wir

$$W' = \frac{p_0 V_0^n}{1 - n} (V_1^{1-n} - V_0^{1-n}).$$

Den Druck p_0 drücken wir unter Heranziehung der Zustandsgleichung aus:

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} R T_0$$

und erhalten nach Umformung

$$W' = \frac{m R T_0}{M(n-1)} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} \right].$$

Das Gas soll komprimiert werden, also ist es notwendig, von außen eine Arbeit

$$\underline{W = -W' = -\frac{m R T_0}{M(1-n)} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} \right]}$$

zuzuführen. Die Temperaturabhängigkeit des Gasvolumens erhalten wir aus der Beziehung

$$p V^n = p_0 V_0^n,$$

worin wir die Werte für p und p_0 aus der Zustandsgleichung einfügen. Damit erhalten wir

$$\frac{m R T_0}{V_0} V_0^n = \frac{m R T}{V} V^n,$$

woraus sich ergibt

$$T V^{n-1} = T_0 V_0^{n-1} = \text{const}.$$

Für die gesuchte Temperatur T_1 finden wir

$$\underline{T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1}}.$$

166. Eine Carnot-Maschine arbeitet mit einem Wirkungsgrad $\eta_1 = 40\%$. Bei Konstanthaltung der Temperatur ihres unteren Wärmespeichers $t_2 = 9$ °C soll der Wirkungsgrad der Maschine auf den Wert $\eta_2 = 50\%$ gesteigert werden, indem die Temperatur ihres oberen Wärmespeichers erhöht wird. Um wieviel muß sie erhöht werden?

Lösung

Der Wirkungsgrad der Carnot-Maschine ist der Quotient aus der von der Maschine verrichteten Arbeit W' und der bei höherer Temperatur aufgenommenen Wärme Q_1

gemäß

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

woraus sich ergibt

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta}.$$

Im ersten Fall ist

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta_1},$$

und im zweiten wird

$$T_1' = \frac{T_2}{1 - \eta_2}.$$

Für die gesuchte Temperaturänderung können wir also schreiben

$$\Delta T = T_1' - T_1 = \frac{T_2(\eta_2 - \eta_1)}{(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)},$$

d. h.,

$$\Delta T = \frac{282\ °\mathrm{K} \cdot 0{,}1}{(1 - 0{,}4)(1 - 0{,}5)} = \underline{94\ \mathrm{grd}}.$$

167. Berechnen Sie, welche Arbeit eine nach dem Prinzip der CARNOT-Maschine funktionierende Kältemaschine verrichtet, wenn in ihrer Umgebung mit der Temperatur $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$ eine Wassermenge $m = 1\ \mathrm{kg}$ von t_1 bis auf die Temperatur $t_2 = 0\ °\mathrm{C}$ herunter abgekühlt und gefroren wird.

Lösung

Der Wirkungsgrad der CARNOT-Maschine ist

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0}{T_1},$$

wobei W' die beim Kreisprozeß verrichtete Arbeit, Q_1 die vom Arbeitsstoff aufgenommene Wärme und T_1 und T_0 die Temperaturen des oberen bzw. unteren Wärmespeichers darstellen. Wenn die CARNOT-Maschine als Kältemaschine arbeitet, so nimmt sie vom unteren Wärmespeicher die Wärme Q_2 und von außen die Arbeit W auf, und an den oberen Wärmespeicher überträgt sie die Wärme Q_2 sowie diejenige Wärme, die aus der zugeführten Arbeit resultiert, also insgesamt $Q_2' = Q_2 + W$. Für den Wirkungsgrad können wir deshalb die Beziehung schreiben

$$\eta = \frac{W}{Q_2 + W},$$

woraus sich ergibt

$$W = Q_2 \frac{\eta}{1-\eta} = Q_2 \frac{T_1 - T_0}{T_0}.$$

In unserem Fall nimmt bei der Abkühlung die Temperatur des Kühlmittels (Wasser) der Kältemaschine ständig ab, während sich die Temperatur der Umgebung (Wärmespeicher) nicht ändert. Für die Entnahme der Wärmemenge dQ aus der Kältemaschine ist bei der Temperatur T die Arbeit

$$dW_1 = dQ \frac{T_1 - T}{T}$$

notwendig. Durch die Wärmeentnahme dQ sinkt die Temperatur des gekühlten Wassers von T auf $T - dT$, wobei das Wasser die Wärmemenge $dQ = -mc\,dT$ freisetzt. Für die Abkühlung des Wassers von T_1 auf T_0 ist die Arbeit

$$W_1 = \int \frac{T_1 - T}{T} dQ = -\int_{T_1}^{T_0} \frac{T_1 - T}{T} mc\,dT$$

notwendig, d. h.,

$$W_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{T_1}{T} mc\,dT - \int_{T_0}^{T_1} mc\,dT = mcT_1 \ln \frac{T_1}{T_0} - mc(T_1 - T_0).$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$W_1 = 1\,\text{kg} \cdot 1 \cdot 10^3\,\text{cal}\,\text{kg}^{-1}\,\text{grd}^{-1} \cdot 293\,°\text{K} \cdot 2{,}3 \lg \frac{293}{273} -$$

$$- 1\,\text{kg} \cdot 10^3\,\text{cal}\,\text{kg}^{-1}\,\text{grd}^{-1}\,(293 - 273)\,\text{grd};$$

$$W_1 = 696\,\text{cal}.$$

Beim Übergang des Wassers vom flüssigen zum festen Aggregatzustand wird – bei konstanter Temperatur von 0 °C – die Wärme

$$Q_2 = ms$$

frei, wobei s die Schmelzwärme des Eises bedeutet. Für die Überführung dieser Wärme in den oberen Wärmebehälter (Wärmespeicher) bei konstanter Temperatur T_0 ist die Arbeit

$$W_2 = Q_2 \frac{T_1 - T_0}{T_0} = ms \frac{T_1 - T_0}{T_0} = 1\,\text{kg} \cdot 79{,}7 \cdot 10^3\,\text{cal}\,\text{kg}^{-1} \frac{20}{273} = 5839\,\text{cal}$$

erforderlich. Die von der Kältemaschine verrichtete Gesamtarbeit ist

$$W = W_1 + W_2 = \underline{27\,370\,\text{J}.}$$

168. Eine Wärmekraftmaschine, deren Arbeitsmedium ein Mol idealen Gases ist, wird im Zyklus von drei aufeinanderfolgenden Prozessen betrieben, und zwar:
   1. isobare Erwärmung vom Ausgangsvolumen V_1 und der Ausgangstemperatur T_1 auf die Temperatur T_2;

2. adiabatische Expansion so lange, bis die Temperatur auf den Ausgangswert T_1 abgesunken ist;
3. isotherme Kompression bis auf das Ausgangsvolumen V_1.

Wie groß ist der Wirkungsgrad einer solchen Maschine?

Lösung

Der Wirkungsgrad der Maschine wird aus der Beziehung

$$\eta = \frac{W'}{Q}$$

ermittelt, in der W' die von der Maschine verrichtete Gesamtarbeit und Q die Wärme darstellt, die von der Maschine aus dem Wärmespeicher entnommen wurde.

1. Bei der isobaren Expansion vergrößert das Gas sein Volumen von V_1 auf $V_2 = V_1 T_2/T_1$ und verrichtet dabei die Arbeit

$$W_{\mathrm{I}}' = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V.$$

Aus der Zustandsgleichung erhalten wir

$$p \, \mathrm{d}V + V \mathrm{d}p = R \, \mathrm{d}T;$$

da bei konstantem Druck $\mathrm{d}p = 0$ ist, wird $p \, \mathrm{d}V = R \, \mathrm{d}T$. Daher finden wir auch

$$W_{\mathrm{I}}' = \int_{T_1}^{T_2} R \, \mathrm{d}T = R(T_2 - T_1).$$

Die innere Energie des Gases ändert sich bei diesem Prozeß um

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \int \mathrm{d}U = \int_{T_1}^{T_2} C_v \, \mathrm{d}T = C_v (T_2 - T_1).$$

Die dabei vom Gas aufgenommene Wärme bestimmen wir aus dem I. Hauptsatz der Thermodynamik:

$$Q_{\mathrm{I}} = W_{\mathrm{I}}' + \Delta U = R(T_2 - T_1) + C_v(T_2 - T_1) = C_p(T_2 - T_1).$$

2. Im Prozeß der adiabatischen Expansion vergrößert sich das Volumen des Gases von V_2 auf V_3 und seine Temperatur sinkt von T_2 auf $T_3 = T_1$. Aus der bekannten Abhängigkeit von Volumen und Temperatur $TV^{\varkappa-1} = \mathrm{const}$ bestimmen wir das Volumen V_3 nach Durchlaufen des Expansionsprozesses:

$$T_3 V_3^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1} = T_2 \left(V_1 \frac{T_2}{T_1} \right)^{\varkappa-1},$$

woraus folgt

$$V_3 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{1}$$

Die Arbeit, die das Gas bei dieser adiabatischen Expansion verrichtet, ist gleich der Abnahme seiner inneren Energie, also

$$W'_{\mathrm{II}} = \int\limits_{V_2}^{V_3} p\,\mathrm{d}V = -\int \mathrm{d}U = -\int\limits_{T_2}^{T_3=T_1} C_v\,\mathrm{d}T = C_v(T_2 - T_1).$$

Während dieses Prozesses hat das Gas Wärme weder aufgenommen noch abgegeben, so daß wir finden

$$Q_{\mathrm{II}} = 0.$$

3. Im Prozeß der isothermen Kompression erreicht das Gas wieder seinen Ausgangszustand, in dem es durch das Volumen V_1, die Temperatur T_1 und den Druck $p_1 = RT_1/V_1$ gekennzeichnet war. Die vom Gas verrichtete Arbeit ist

$$W'_{\mathrm{III}} = \int\limits_{V_3}^{V_1} p\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V_3}^{V_1} RT_1 \frac{\mathrm{d}V}{V} = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_3}.$$

Aus Gl. (1) aber können wir entnehmen, daß

$$\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

ist, woraus folgt

$$W'_{\mathrm{III}} = -RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}.$$

Bei diesem Prozeß wird die positive Wärme $Q'_{\mathrm{III}} = W_{\mathrm{III}} = -W'_{\mathrm{III}}$ frei:

$$Q'_{\mathrm{III}} = RT_1 \ln \frac{V_3}{V_1}.$$

Bei den angeführten Zustandsänderungen verrichtet das Gas insgesamt die Arbeit

$$W' = W'_{\mathrm{I}} + W'_{\mathrm{II}} + W'_{\mathrm{III}} = R(T_2 - T_1) + C_v(T_2 - T_1) - RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

und nimmt die Wärme

$$Q = Q_{\mathrm{I}} = C_p (T_2 - T_1)$$

auf. Der Wirkungsgrad der ganzen Maschine ist

$$\eta = \frac{W'}{Q} = \frac{(R + C_v)(T_2 - T_1) - RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{C_p(T_2 - T_1)}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = \frac{C_p}{R}$$

ist, finden wir schließlich den Gesamtwirkungsgrad der Maschine

$$\underline{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}.}$$

169. **Berechnen Sie die Entropieänderung, die bei der Mischung von $m_1 = 10$ g Wasser der Temperatur $t_1 = 100$ °C und $m_2 = 20$ g Wasser der Temperatur $t_2 = 15$ °C auftritt.**

Lösung

Die Temperatur des Gemisches wird ermittelt aus

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 43{,}3\ °\mathrm{C}, \quad \text{d. h.,} \quad T = 316{,}3\ °\mathrm{K}.$$

Ein aus zwei Flüssigkeiten bestehendes System hat eine Entropie, die, auf den Grundzustand von z. B. 0 °C bezogen, gleich der Summe der Entropien beider Flüssigkeiten bezüglich eben dieses Grundzustands ist. Vor Beginn des Mischungsvorgangs hatte das System die Gesamtentropie

$$S_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{\mathrm{d}Q}{T} + \int_{T_0}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{m_1 c\, \mathrm{d}T}{T} + \int_{T_0}^{T_2} \frac{m_2 c\, \mathrm{d}T}{T} =$$

$$= m_1 c \ln \frac{T_1}{T_0} + m_2 c \ln \frac{T_2}{T_0}.$$

Nach vollzogener Mischung wird die Gesamtentropie des Systems durch die Beziehung

$$S_2 = \int_{T_0}^{T} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_0}^{T} \frac{mc\, \mathrm{d}T}{T} = mc \ln \frac{T}{T_0}$$

ausgedrückt, in der $m = m_1 + m_2$ ist. Für die Gesamtzunahme der Entropie finden wir damit

$$\Delta S = S_2 - S_1 = mc \ln \frac{T}{T_0} - m_1 c \ln \frac{T_1}{T_0} - m_2 c \ln \frac{T_2}{T_0} =$$

$$= m_1 c \ln \frac{T}{T_1} + m_2 c \ln \frac{T}{T_2}.$$

Mit den vorgegebenen Werten finden wir schließlich

$$\Delta S = 10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 1 \cdot 10^3\ \mathrm{cal\ kg^{-1}\ grd^{-1}} \cdot 2{,}3 \lg \frac{316{,}3}{373} +$$

$$+ 20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 1 \cdot 10^3\ \mathrm{cal\ kg^{-1}\ grd^{-1}} \cdot 2{,}3 \lg \frac{316{,}3}{288} =$$

$$= \underline{0{,}23\ \mathrm{cal\ grd^{-1}}}.$$

170. Berechnen Sie, wie sich die Entropie von $m = 2$ g Stickstoff verändert, der von einer Ausgangstemperatur $t_0 = 0$ °C auf die Temperatur $t_1 = 30$ °C erwärmt wird, und zwar auf zwei verschiedenen Wegen:

a) isochore Erwärmung,

b) isobare Erwärmung.

Lösung

Für die infinitesimale Änderung der Entropie eines idealen Gases gilt

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{nC_v\,dT + p\,dV}{T}.$$

Für die gesamte Entropieänderung, vom Ausgangszustand, in dem $S = S_0$ angesetzt wird, bis zum neuen Endzustand, erhalten wir

$$S - S_0 = \int \frac{nC_v\,dT}{T} + \int \frac{p\,dV}{T},$$

wobei $n = m/M$ ist.
Wenn wir eine beliebige Gasmenge m annehmen, dann gilt für die beiden vorgegebenen Erwärmungsprozesse:
a) Bei der isochoren Zustandsänderung ist $dV = 0$, so daß sich ergibt

$$S - S_0 = \frac{m}{M} C_v \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_v \ln \frac{T_1}{T_0} = mc_v \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

Mit den gegebenen Werten finden wir

$$S - S_0 = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 0{,}177 \cdot 10^3\,\text{cal kg}^{-1}\,\text{grd}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{303}{273} =$$
$$= \underline{0{,}0368\,\text{cal grd}^{-1}}.$$

b) Bei der isobaren Zustandsänderung resultiert aus der Zustandsgleichung

$$pV = \frac{m}{M} RT: \quad p\,dV + V\,dp = \frac{m}{M} R\,dT.$$

Da bei der isobaren Zustandsänderung $dp = 0$ ist, finden wir $p\,dV = \frac{m}{M} R\,dT$. Für die Änderung der Entropie erhalten wir

$$S' - S_0 = \frac{m}{M} C_v \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_v \ln \frac{T}{T_0} + \frac{m}{M} R \ln \frac{T}{T_0} =$$
$$= \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T}{T_0} = mc_p \ln \frac{T}{T_0},$$

also ist

$$c_p = c_v + \frac{R}{M} = 0{,}177 \cdot 10^3\,\text{cal kg}^{-1}\,\text{grd}^{-1} + \frac{1{,}98\,\text{cal mol}^{-1}\,\text{grd}^{-1}}{28 \cdot 10^{-3}\,\text{kg mol}^{-1}} =$$
$$= 0{,}249 \cdot 10^3\,\text{cal kg}^{-1}\,\text{grd}^{-1}$$

und

$$S' - S_0 = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 0{,}249 \cdot 10^3\,\text{cal kg}^{-1}\,\text{grd}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{303}{273} =$$
$$= \underline{0{,}0518\,\text{cal grd}^{-1}}.$$

171. Führen Sie den Beweis dafür, daß die Gesamtänderung der Entropie eines idealen Gases im CARNOT-Prozeß gleich Null ist.

Lösung

Wir setzen voraus, daß das Gas im Anfangszustand durch die Entropie S_0 und nach Durchlaufen des Zyklus durch die Entropie S ausgezeichnet ist. In jedem Zyklus ist die Gesamtänderung der Entropie $S - S_0$ gleich der Summe der Entropieänderungen während der einzelnen Teilprozesse im Zyklus:

$$S - S_0 = S_1 - S_0 + S_2 - S_1 + S_3 - S_2 + S - S_3. \tag{1}$$

Bei der isothermen Expansion ist

$$S_1 - S_0 = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} = \frac{m}{M} R \int \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Bei der adiabatischen Expansion ist

$$S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T} = 0, \quad \text{da ja} \quad dQ = 0 \quad \text{ist}.$$

Bei der isothermen Kompression ist

$$S_3 - S_2 = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{M} R \ln \frac{V_3}{V_4},$$

und da $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$ ist, wird

$$S_3 - S_2 = -\frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Bei der adiabatischen Kompression ist wieder $dQ = 0$, so daß wir ebenfalls finden

$$S - S_3 = 0.$$

Nach Einsetzen aller gefundenen Werte in Gl. (1) erhalten wir schließlich

$$S - S_0 = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} = 0.$$

Hieraus ergibt sich der geforderte Beweis:

$$\underline{S = S_0.}$$

172. In einer Stahlflasche mit dem Volumen $V_1 = 50\,l$ ist Gas unter einem Druck $p_1 = 45$ atm enthalten, in einer anderen mit dem Volumen $V_2 = 30\,l$ ist ein anderes Gas unter einem Druck $p_2 = 85$ atm aufbewahrt. Die Temperaturen in beiden Gasmengen sind einander gleich, sie betragen $t = 20$ °C. Berechnen Sie, wie sich die Entropie des aus beiden Gasmengen bestehenden Systems verändert, wenn die beiden Behälter miteinander verbunden werden. Jedes Gas sei gegenüber dem anderen als chemisch inaktiv angesehen.

Lösung

Für die Änderung der Entropie eines idealen Gases bestimmter Masse gilt beim Übergang von einem irgendwie vorgegebenen Anfangs- zu einem bestimmten Endzustand die Beziehung

$$S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{\frac{m}{M} C_v \, dT + p \, dV}{T} = mc_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{v_1}^{v_2} \frac{dV}{V} =$$

$$= mc_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} . \tag{1}$$

Vor dem Mischungsvorgang ist die Entropie der beiden betrachteten Gase

$$S_1 = S_1' + S_2',$$

wobei S_1' und S_2' die Entropien der einzelnen Gase darstellen. Wenn das System nach dem Mischvorgang durch die Entropie S_2 gekennzeichnet sein soll, so gilt für die Gesamtänderung der Entropie

$$\Delta S = S_2 - S_1 = S_2 - S_1' - S_2'.$$

Alle Entropieangaben beziehen wir auf den gleichen Grundzustand mit den Größen p_0, V_0 und T_0.
Unter Hinzuziehung der Gl. (1) können wir schreiben

$$S_2 - S_1 = mc_v \ln \frac{T}{T_0} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V}{V_0} - m_1 c_{v1} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{m_1}{M_1} R \ln \frac{V_1}{V_0} -$$

$$- m_2 c_{v2} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{m_2}{M_2} R \ln \frac{V_2}{V_0} . \tag{2}$$

Bekanntlich ist die spezifische Wärmekapazität des Gasgemischs gleich der Summe der spezifischen Wärmekapazitäten seiner Komponenten, also gilt

$$mc_v = m_1 c_{v1} + m_2 c_{v2} .$$

Weiterhin ist die Gesamtzahl der Mole des Gemischs gegeben durch

$$\frac{m}{M} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} .$$

Damit finden wir die Änderung der Entropie durch Umformung der Gl. (2) zu

$$\Delta S_2 - S_1 = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) R \ln V - \frac{m_1 R}{M_1} \ln V_1 - \frac{m_2 R}{M_2} \ln V_2 .$$

Entsprechend der Zustandsgleichung muß gelten

$$\frac{m_1 R}{M_1} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \quad \text{und} \quad \frac{m_2 R}{M_2} = \frac{p_2 V_2}{T_2} ,$$

so daß wir nach Einsetzen erhalten

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T}\,[(p_1V_1 + p_2V_2)\ln V - p_1V_1 \ln V_1 - p_2V_2 \ln V_2].$$

Nach Umformung dieser Beziehung erhalten wir schließlich

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{p_1V_1}{T}\ln\frac{V}{V_1} + \frac{p_2V_2}{T}\ln\frac{V}{V_2}.$$

Mit Einsetzen der vorgegebenen Werte finden wir die gesuchte Entropieänderung

$$\Delta S = \frac{45\ \text{atm}\cdot 50\ \text{l}}{293\ {}^\circ\text{K}}\cdot 2{,}3\ \lg\frac{50+30}{50} + \frac{85\ \text{atm}\cdot 30\ \text{l}}{293\ {}^\circ\text{K}}\cdot 2{,}3\ \lg\frac{50+30}{30},$$

$$\Delta S = 12{,}1\ \text{l atm grd}^{-1} = 1225{,}7\ \text{J grd}^{-1} = \underline{293\ \text{cal grd}^{-1}}.$$

173. Berechnen Sie, wie sich die Entropie eines idealen Gases mit den Zustandsgrößen $t_0 = 20\ {}^\circ\text{C}$, $p_0 = 1$ atm und $V_0 = 2$ l ändert, wenn es – ohne Arbeit gegen einen Kolben verrichten zu müssen – auf das doppelte Volumen ausgedehnt wird.

Lösung

Bei Ausdehnung eines idealen Gases gegen ein Vakuum verändert sich weder seine innere Energie noch seine Temperatur, wie das auch der bekannte Versuch von Gay-Lussac beweist.

Wenn das Gas im Ausgangszustand die Entropie S_0 und im Endzustand die Entropie S hat, so ändert sich seine Entropie während der Zustandsänderung um den Betrag $\Delta S = S - S_0$; für diese Änderung gilt die Beziehung

$$\Delta S = \int\frac{dQ}{T} = \int\frac{m}{M}\,C_v\,\frac{dT}{T} + \int\frac{p\,dV}{T}.$$

Da bei diesem Prozeß die Temperatur konstant bleibt, ist

$$\Delta S = \int\frac{p\,dV}{T}.$$

Wir drücken die Größe p mit Hilfe der Zustandsgleichung aus und erhalten

$$\Delta S = \frac{m}{M}\,R\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V} = \frac{p_0V_0}{T_0}\ln\frac{V}{V_0}.$$

Nach Einsetzen der vorgegebenen Werte erhalten wir

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{1\ \text{atm}\cdot 2\ \text{l}}{293\ {}^\circ\text{K}}\,2{,}3\ \lg\frac{2\,V_0}{V_0} = 0{,}0047\ \text{l atm grd}^{-1}.$$

Da 1 l atm = 101,3 J und 1 J = $2{,}39\cdot 10^{-1}$ cal ist, finden wir

$$\underline{S - S_0 = 0{,}114\ \text{cal grd}^{-1}}.$$

174. Eine Menge idealen Gases vom Volumen $V_1 = 10\,l$ und dem Druck $p_1 = 2$ atm lassen wir bei konstanter Temperatur auf ein Volumen $V_2 = 27{,}18\,l$ reversibel expandieren. Berechnen Sie, wie sich bei diesem Prozeß die freie Energie des Gases verändert.

Lösung

Aus seiner Definition ergibt sich für eine infinitesimale Änderung der freien Energie eines Gases

$$dF = dU - T\,dS - S\,dT.$$

Bei den reversiblen Prozessen ist $dS = \frac{dQ}{T}$.

Bei einem isothermen Prozeß ist $dU = 0$ und $dT = 0$, sowie $dQ = dW'$, so daß wir nach Einsetzen finden

$$dF = -dQ = -dW'.$$

Die Gesamtänderung der freien Energie erhalten wir durch Integration

$$\int_1^2 dF = -\int_1^2 dW' = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV.$$

Es ist also

$$F_2 - F_1 = -\frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Mit den gegebenen Werten der Aufgabe finden wir also

$$F_2 - F_1 = 2\text{ atm} \cdot 10\,l \cdot 2{,}3 \lg \frac{10}{27{,}18} = -20\,l\text{ atm} = \underline{-202{,}7\text{ J.}}$$

175. Eine Menge Stickstoffgas der Masse $m = 2$ g und der Temperatur $t_0 = 27\,°C$ wird bei konstantem Druck auf ein Volumen komprimiert, das nur $^3/_4$ des ursprünglichen Wertes beträgt. Berechnen Sie, wie sich bei diesem Prozeß die potentielle thermodynamische Energie des Gases verändert.

Lösung

Aus der Definition der potentiellen thermodynamischen Energie ergibt sich für ihre infinitesimale Änderung

$$dG = dU + p\,dV + V\,dp - T\,dS - S\,dT.$$

Bei umkehrbaren Prozessen ist $dS = dQ/T$. Wenn wir weiter berücksichtigen, daß entsprechend dem I. Hauptsatz der Thermodynamik $dU + p\,dV = dQ$ ist, können wir schreiben

$$dG = V\,dp - S\,dT.$$

Da für die vorgegebene isobare Zustandsänderung $dp = 0$ ist, wird

$$dG = -S\,dT. \tag{1}$$

Die Entropie des zur Temperatur T gehörenden Zustands finden wir zu

$$S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{\frac{m}{M} C_v\,dT + p\,dV}{T}.$$

Für die isobare Zustandsänderung ist $p\,dV = (m/M)R\,dT$, und wenn wir noch die MAYERsche Beziehung $C_p = C_v + R$ anwenden, erhalten wir

$$S = \int_{T_0}^{T} \frac{m}{M} C_p \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T}{T_0} = mc_p \ln \frac{T}{T_0}. \tag{2}$$

Unter Anwendung der Gl. (2) erhalten wir aus Gl. (1) die gesamte Änderung der potentiellen thermodynamischen Energie im Verlauf der vorgegebenen Zustandsänderung zu

$$\int_1^2 dG = -\int_{T_0}^{T_1} S\,dT = -\int_{T_0}^{T_1} mc_p \ln \frac{T}{T_0}\,dT.$$

Nach den bekannten Integrationsregeln erhalten wir für das Integral

$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1)$ und, bezogen auf unser vorliegendes Beispiel, nach Umformung

$$G_2 - G_1 = mc_p(T_1 - T_0) + mc_pT_1 \ln \frac{T_0}{T_1}.$$

Die nach Verlauf der isobaren Kompression sich einstellende Gastemperatur ermitteln wir aus der Zustandsgleichung

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_0 \frac{3}{4} V_0}{T_1}, \quad \text{so daß} \quad T_1 = \frac{3T_0}{4} = 225\ °\text{K}.$$

Nach Einsetzen der Werte finden wir

$$G_2 - G_1 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 0{,}249 \cdot 10^3\ \text{cal kg}^{-1}\ \text{grd}^{-1} \left[-75\ \text{grd} + 225\ °\text{K} \cdot 2{,}3 \lg \frac{4}{3}\right] =$$
$$= -5\ \text{cal} = \underline{-21\ \text{J}.}$$

176. Ermitteln Sie mit Hilfe der Phasenregel, durch wieviel voneinander unabhängige Zustandsgrößen der Gleichgewichtszustand folgender Systeme bestimmt wird:
a) Wasser mit gesättigtem Dampf,
b) Kochsalzlösung (H_2O + NaCl) mit gesättigtem Dampf,
c) ein System, das sich aus den Stoffen $CaCO_3$, CaO und CO_2 zusammensetzt, zwischen denen die Reaktion

$$CaCO_3 \rightleftharpoons CaO + CO_2 \tag{1}$$

ablaufen kann.

Lösung

Wir wenden die GIBBSsche Phasenregel an:

$$f = k + 2 - p.$$

a) Das vorgegebene System hat eine Komponente (H_2O) und zwei Phasen (Flüssigkeit, Dampf). Daher ist

$$f = 1 + 2 - 2 = \underline{1}.$$

Der Gleichgewichtszustand wird durch einen Parameter bestimmt, z. B. durch die Temperatur.

b) Das System hat zwei Komponenten (H_2O, NaCl) und zwei Phasen (Lösung, Dampf), daher gilt

$$f = 2 + 2 - 2 = \underline{2}.$$

Der Gleichgewichtszustand wird von zwei Parametern bestimmt, und zwar durch Temperatur und Konzentration.

c) Im System existieren zwei feste Phasen (CaO, $CaCO_3$) und eine Gasphase (CO_2). Wenn die das System bildenden Stoffe miteinander keinerlei Reaktionen eingingen, dann hätte das System drei Komponenten. Da aber die Reaktion (1) stattfinden kann, verringert sich die Anzahl der voneinander unabhängigen Komponenten um eine, so daß $k = 2$ ist. Demnach gilt

$$f = 2 + 2 - 3 = \underline{1}.$$

Der Gleichgewichtszustand wird also lediglich durch einen Parameter bestimmt, z B durch die Temperatur. Dadurch ist z. B. auch der Druck des CO_2 bestimmt.

A Aufgaben

193. Eine Maschine, die eine Leistung der Größe $P = 0{,}5$ PS aufnimmt, bohrt innerhalb zwei Minuten ein Loch in einen Gußblock der Masse $m = 20$ kg. Um wieviel Grad erwärmt sich dabei der Block, wenn 80% der beim Bohren verrichteten Arbeit zur Erwärmung und damit zur Erhöhung der inneren Energie des Blockes beitragen? Die spezifische Wärmekapazität des Gußstückes ist $c = 0{,}13$ cal g^{-1} grd^{-1}.

194. In einem Rohr, das wir 40mal umdrehen, fallen Bleikugeln aus der Höhe $h = 1{,}2$ m herab. Bei dem Experiment stellen wir fest, daß die Temperatur der Kugeln sich um 3,8 grd erhöht. Wir setzen voraus, daß die gesamte, bei der Deformation der Kugeln durch den Aufprall verrichtete Arbeit zur Erhöhung der inneren Energie der Kugeln beiträgt. Aus diesen Angaben ist das mechanische Wärmeäquivalent zu bestimmen.

195. Aus der bekannten Molmasse eines Gases und aus dem Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten $\varkappa = c_p/c_v$ soll der Wert der spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v für das Gas Stickstoff ermittelt werden.

196. Bestimmen Sie die Molmasse der Luft, wenn ihre spezifische Wärmekapazität c_v und das Verhältnis ihrer spezifischen

Wärmekapazitäten $\varkappa = c_p/c_v$ bekannt sind.

197. Es wird eine Mischung zweier Gase hergestellt, die aus $m_1 = 2$ g Kohlendioxid und $m_2 = 3$ g Stickstoff besteht. Die spezifischen Wärmekapazitäten c_{v1} und c_{v2} sind bekannt. Berechnen Sie das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten für das resultierende Gasgemisch.

198. Ein Gasgemisch besteht aus $m_1 = 2$ g Sauerstoff und $m_2 = 5$ g Stickstoff. Es soll bei konstantem Volumen von einer Temperatur $t_1 = 20$ °C auf $t_2 = 40$ °C erwärmt werden. Berechnen Sie die dazu notwendige Wärmemenge.

199. Einer bestimmten Menge Argon wird bei konstantem Volumen und einer Ausgangstemperatur von 60 °C eine Wärmemenge von 50 cal zugeführt, wodurch sich eine Temperaturerhöhung auf 88 °C einstellt. Um welche Menge Argon handelt es sich bei diesem Versuch?

200. Berechnen Sie, auf welchen Betrag sich die Temperatur einer Menge Kohlendioxid von $G = 0{,}6$ kp Gewicht verringert, wenn ihr, von einer Ausgangstemperatur $t_0 = 50$ °C ausgehend, 1600 kpm an innerer Energie entzogen werden.

201. Eine bestimmte Menge idealen Gases nimmt bei einem Druck $p_0 = 760$ Torr das Volumen $V_0 = 1$ l ein. Berechnen Sie, wie sich die innere Energie des Gases verändert, wenn es einem Prozeß unterzogen wird, bei dem der Druck auf das Vierfache wächst, während das Volumen auf die Hälfte verringert wird. Es ist a) ein einatomiges Gas mit $\varkappa = {}^5/_3$ und b) ein zweiatomiges Gas mit $\varkappa = {}^7/_5$ anzunehmen.

202. In einem Gefäß ist Luft der Masse $m = 6$ kg eingeschlossen. Ihr wird eine Wärmemenge $Q = 88$ kcal zugeführt. Dabei vergrößert die Luft ihr Volumen und verrichtet eine Arbeit $W' = 18500$ kpm, wobei ihre Temperatur von $t_1 = 10$ °C auf $t_2 = 52$ °C ansteigt. Berechnen Sie auf der Grundlage dieser Angaben die spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v für Luft. Die Poissonsche Konstante hat den Wert $\varkappa = 1{,}4$.

203. In einem Zylinder mit beweglichem Kolben wird bei konstantem Druck $p_0 = 1520$ Torr eine Luftmenge $m = 5$ g von der Temperatur $t_0 = 18$ °C auf eine Temperatur $t_1 = 200$ °C erhitzt. Welche Wärmemenge muß der Luft zugeführt werden, und welche Arbeit verrichtet sie bei der Expansion? Berechnen Sie ferner, um welche Strecke sich der bewegliche Kolben dabei verschiebt, wenn der Durchmesser des Kreiskolbens 6 cm beträgt.

204. Eine Luftmenge der Masse $m = 0{,}5$ kg und der Ausgangstemperatur $t_0 = 35$ °C wurde isobar komprimiert, wobei ihr eine Wärmemenge von 23,4 kcal entzogen wurde. Auf welche Temperatur erhitzte sie sich dabei?

205. In einem Gefäß von 60 l Inhalt ist eine Luftmenge der Masse $m = 0{,}2$ kg unter einem Druck von 10 at eingeschlossen. Berechnen Sie, welche Wärmemenge ihr zugeführt werden muß, damit sich ihr Volumen bei konstantem Druck auf den doppelten Wert ausdehnt. Um welchen Betrag ändert sich dabei ihre innere Energie, und welche Arbeit verrichtet die Luft dabei nach außen?

206. Für die isobare Kompression einer Gasmenge der Masse $m = 100$ g ist es notwendig, eine Arbeit vom Betrag $W = 1817{,}8$ J aufzuwenden. Dabei steigt ihre Temperatur von $t_1 = 40$ °C auf $t_2 = 110$ °C. Berechnen Sie, welche Wärme bei diesem Prozeß dem Gas noch zugeführt werden muß und um welchen Betrag ihre innere Energie anwächst. Um welches Gas handelt es sich hierbei?

207. In einem senkrecht stehenden, mit be-

weglichem Kolben verschlossenen Zylinder der Höhe l_0 und der Querschnittsfläche A befindet sich Gas unter dem Druck p_0. Das Gas wird isotherm komprimiert, wobei der Kolben auf ein Zehntel seiner ursprünglichen Höhe herabgedrückt wird. Welche Arbeit muß dazu verrichtet werden?

208. Welche Wärme ist erforderlich, um 2 l Wasserstoff unter einem Druck von 0,8 kp cm^{-2} isotherm auf das Vierfache seines Volumens zu expandieren? Welchen Wert nimmt der resultierende Druck an?

209. Bei der isothermen Kompression von $V_1 = 4{,}5$ l Luft und dem ursprünglichen Druck $p_1 = 740$ Torr wird an die Umgebung eine Wärmemenge $Q' = 0{,}25$ kcal abgeführt. Berechnen Sie Druck und Volumen der Luft nach Ablauf des Kompressionsvorgangs.

210. Bei der isothermen Kompression einer bestimmten Gasmenge auf ein Volumen von 4 l und einen Druck von 2,2 kp cm^{-2} wird durch Abkühlung eine Wärmemenge von 6 cal abgeführt. Berechnen Sie, welchen Wert der Gasdruck zu Beginn des Prozesses hatte, als die Gastemperatur 20 °C betrug.

211. Ein Kompressor saugt atmosphärische Luft von 760 Torr Druck und 27 °C an und komprimiert sie isotherm auf einen Druck von 26600 Torr. Berechnen Sie, wieviel Wärme stündlich an das Kühlwasser abgeführt werden muß, wenn je Stunde 10 kg Luft komprimiert werden.

212. Es soll Luft von 1 kg Masse und 0 °C Temperatur von einem Druck von 1 kp cm^{-2} ausgehend auf den zehnfachen Druck komprimiert werden. Berechnen Sie den dafür erforderlichen Arbeitsaufwand bei a) isothermer und b) adiabatischer Kompression.

213. In einem Gefäß von zwei Liter Inhalt befinden sich bei einer Temperatur von 27 °C 2 Mol Stickstoff.
Berechnen Sie, welchen Druck der Stickstoff in verschiedenen Volumina von 1,5 l, 4 l, 5 l und 6 l annimmt, wenn das Gas a) isotherm und b) adiabatisch verändert wird.
Stellen Sie die entsprechenden Druckänderungen in einem p, V-Diagramm dar.

214. Stickstoff mit einer Masse $m = 8$ g und einer Temperatur $t_0 = 20$ °C soll adiabatisch auf ein Fünftel seines ursprünglichen Volumens komprimiert werden. Welche Arbeit wird bei diesem Prozeß dem Gas zugeführt, und wie ändert sich dabei seine innere Energie? Berechnen Sie auch die Temperatur des Stickstoffs nach Beendigung des Kompressionsvorgangs.

215. Eine bestimmte Menge Luft mit der Temperatur $t_1 = 25$ °C und dem Druck $p_1 = 760$ Torr wird plötzlich von einem Volumen $V_1 = 15$ l auf ein Volumen $V_2 = 3{,}4$ l komprimiert. Welche Werte nehmen Temperatur und Druck am Ende des Kompressionsaktes an, und wie verändert sich die innere Energie der betreffenden Luftmenge, wenn wir den Kompressionsakt als adiabatischen Prozeß ansehen? Die POISSONsche Konstante für Luft ist $\varkappa = 1{,}4$.

216. Zwei Grammoleküle Wasserstoff mit der Temperatur $t_1 = 27$ °C und dem Druck $p_1 = 745$ Torr werden adiabatisch auf ein Drittel des ursprünglichen Volumens komprimiert. Danach wird das Gas isotherm auf sein ursprüngliches Volumen ausgedehnt. Wie hoch werden sich Endtemperatur und -druck einstellen? Welche Arbeit wird hierbei vom Gas verrichtet?

217. In einem Ballon befindet sich ein Gasgemisch, das durch gleiche Mengen Helium und Wasserstoff bei einer Temperatur von 0 °C und einem Druck von 760 Torr gebildet wird. Berechnen Sie, wie sich Druck und Temperatur des angegebenen Gemischs ändern, wenn es

adiabatisch auf das doppelte Volumen ausgedehnt wird.

218. Eine Stickstoffmenge mit der Masse $m = 200$ g, der Ausgangstemperatur $t_1 = 27$ °C und dem Druck $p_1 = 3040$ Torr wird einem thermodynamischen Prozeß unterzogen, bei dem der Druck auf den Wert $p_2 = 2280$ Torr absinkt. Welche Wärmemenge wurde dem Stickstoff zugeführt, welche Arbeit verrichtete dieser dabei, und wie veränderte sich seine innere Energie, wenn der Prozeß a) isochor, b) isotherm und c) adiabatisch verlief? Stellen Sie diese Prozesse in p, V-Diagrammen dar.

219. Es ist der theoretisch höchste Wirkungsgrad einer Dampfmaschine zu bestimmen, die mit Dampf einer Temperatur von 190 °C betrieben wird und bei der das Kondenswasser eine Temperatur von 40 °C hat.

220. Berechnen Sie, welche Werte die Temperaturen des oberen und des unteren Wärmespeichers einer idealen CARNOT-Maschine haben müssen, zwischen denen eine Temperaturdifferenz von 40 grd besteht. Die Maschine arbeitet mit einem Wirkungsgrad von 12%.

221. Eine CARNOT-Maschine entnimmt bei jedem Zyklus einem oberen Wärmespeicher eine Wärmemenge von 100 cal, um einem unteren Wärmespeicher 80 cal zuzuführen. Berechnen Sie die Temperatur des unteren Wärmespeichers, wenn die des oberen bei 127 °C gehalten wird.

222. Wie groß muß die Mindestleistung einer Maschine sein, die einer großen Wassermenge der konstanten Temperatur von 17 °C in jeder Sekunde 10 kcal Wärme entnimmt, um diese einem Heizkörper von 46 °C zuzuführen? Welche Wärmemenge wird insgesamt an den oberen Wärmespeicher abgegeben?

223. Um welchen Betrag ändert sich die Entropie von 20 g Wasser, wenn wir es von 10 °C auf 75 °C erhitzen?

224. Berechnen Sie die Entropie eines Gramms Wasser bei einer Temperatur von 100 °C und die eines Gramms gesättigten Wasserdampfes der gleichen Temperatur, bezogen auf den flüssigen Aggregatzustand bei 0 °C.

225. In ein drei Liter fassendes Wasserbad von 15 °C wird eine Masse von 1 kg Blei gebracht, das vorher auf eine Temperatur von 300 °C erhitzt wurde. Wie ändert sich die Entropie des Systems nach Einstellung der Endtemperatur? Die Wärmekapazität des Gefäßes sowie mögliche weitere Wärmeverluste werden vernachlässigt.

226. Um welchen Betrag ändert sich die Entropie von 20 g Eis, das zuerst bei einer Temperatur von 0 °C vorlag und dann bei normalem Atmosphärendruck in Dampf von 100 °C verwandelt wird?

227. Berechnen Sie die Entropieänderung von 2 g Stickstoff, der bei konstanter Temperatur, d. h. isotherm, einer Volumenverringerung von 6 auf 4 l unterworfen wurde.

228. Um welchen Betrag ändert sich die Entropie von einem Gramm Kohlendioxid, das aus einem Anfangszustand mit den Zustandsgrößen $p_1 = 4560$ Torr und $t_1 = 20$ °C in einen anderen Zustand mit den Zustandsgrößen $p_2 = 1520$ Torr und $t_2 = -20$ °C übergeführt wurde?

229. Zwei Mol Gas werden bei einer Temperatur von 127 °C so komprimiert, daß der Gasdruck auf den doppelten Wert ansteigt. Berechnen Sie, wie sich bei diesem Prozeß die freie Energie und die potentielle thermodynamische Energie des Gases verändern.

230. Berechnen Sie, durch wieviel voneinander unabhängige Zustandsgrößen ein chemisch reiner Stoff bei Änderung seines Aggregatzustands definiert wird.

231. Beweisen Sie, daß ein System, in dem drei Phasen derselben Komponente

nebeneinander bestehen, nur bei ganz bestimmten Druck- und Temperaturwerten im Gleichgewicht existieren kann.

2.4. Ein- und mehrphasige Systeme

Bei Änderung seines Aggregatzustands nimmt ein Stoff Energie gewöhnlich nur in Form von Wärme auf (oder gibt sie in dieser Form ab). Kurzgefaßt kann man sagen: Bei der Änderung des Aggregatzustands wird Wärme umgesetzt. Als **Umwandlungswärme** l bezeichnen wir diejenige Wärmemenge, die bei der Änderung des Aggregatzustands einer Masseeinheit eines bestimmten Stoffes umgesetzt (d. h. zugeführt oder freigesetzt) wird. Gemäß dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$Q = l = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1).$$

Ein Teil der zugeführten Wärme wird bei der Änderung des Aggregatzustands zur Vergrößerung der inneren Energie $U_2 - U_1$ und ein anderer wird für die Arbeit notwendig, die bei der Änderung des Volumens von V_1 auf V_2 verrichtet wird, wenn sie bei konstantem Druck verläuft.
Chemisch reine Stoffe sind bei gegebenem Druck durch eine ganz bestimmte Schmelztemperatur und durch eine ganz bestimmte Siedetemperatur ausgezeichnet. Diese Temperatur ist druckabhängig. Die CLAUSIUS-CLAPEYRONsche Gleichung drückt die Druckabhängigkeit der Temperatur der Aggregatzustandsänderung von Stoffen in Form einer Differentialgleichung aus. Sie besagt:
Wenn ein Stoff bei der Temperatur T aus einem Aggregatzustand (1) in einen anderen Aggregatzustand (2) übergeht und wenn für die Aggregatzustandsänderung die Umwandlungswärme l benötigt wird, dann verursacht eine infinitesimale Änderung des Drucks um $\mathrm{d}p$ eine Änderung der Temperatur, bei welcher der Stoff seinen Aggregatzustand wechselt, um den Betrag $\mathrm{d}T$ entsprechend der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{l}{T(v_2 - v_1)}$$

(v_1 bzw. v_2 spezifisches Volumen des entsprechenden Aggregatzustands des Stoffes).
Bei einem ganz bestimmten Druck und einer ganz bestimmten Temperatur, dem sog. *Tripelpunkt*, können alle drei Aggregatzustände eines Stoffes im Gleichgewicht nebeneinander bestehen.
Als **Sattdampf** bezeichnen wir einen Dampf, der sich mit seiner Flüssigkeit im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Seine Spannung ist – solange der Dampf gesättigt bleibt – unabhängig vom Volumen, das er einnimmt. Mit wachsender Temperatur steigt die Spannung des gesättigten Dampfes so lange an, bis sie bei einer

bestimmten, der sog. **kritischen Temperatur** T_k einen maximalen Wert erreicht. Oberhalb der kritischen Temperatur kann die flüssige Phase nicht mehr existieren. Den zur kritischen Temperatur gehörenden Druck des gesättigten Dampfes bezeichnen wir als **kritischen Druck** p_k und das zugehörige Volumen als **kritisches Volumen** V_k. Die Isotherme eines realen Gases, welche die Abhängigkeit seines Drucks vom Volumen im Bereich der kritischen Temperatur darstellt, hat im sog. kritischen Punkt einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

Die Eigenschaften und das Verhalten der realen Gase werden relativ gut durch die VAN DER WAALSsche Zustandsgleichung beschrieben. Sie hat für ein Mol Gas die Form

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

(a und b stoffabhängige Konstanten, V_m Molvolumen, p Druck und R Gaskonstante). Das Glied a/V_m^2 nennt man *Innendruck* oder Kohäsionsdruck des Gases. Mit seiner Hilfe charakterisieren wir die wechselseitige Anziehung der Gasmoleküle.

Der Zusammenhang zwischen den VAN DER WAALSschen Konstanten a und b sowie den Parametern des kritischen Zustands p_k, V_k, T_k wird durch folgende Beziehungen angegeben:

$$V_k = 3b; \quad T_k = \frac{8a}{27bR}; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}.$$

Ein homogenes Gemisch zweier chemisch reiner Stoffe bezeichnen wir als **Lösung.** Die Konzentration von Lösungen wird gewöhnlich durch folgende Definitionen angegeben:

α) durch die Zahl der Mole des gelösten Stoffes in 1 l Lösung (sog. **Molarität** der Lösung),

β) durch die Zahl der Mole des gelösten Stoffes, die auf 1 kg reinen Lösungsmittels entfallen (sog. **Kilogramm-Molarität** oder **Molalität** der Lösung),

γ) mit Hilfe der Massenprozentzahlen (sog. Grammbrüche) und

δ) mit Hilfe der Molbrüche gemäß folgender Definition:

Ein Molbruch der Komponente A in einer Lösung mit den beiden Komponenten A und B wird durch die Beziehung

$$\nu_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

bestimmt, wobei n_A bzw. n_B die Zahl der Mole der Komponente A bzw. B in der Lösung darstellt.

Ein homogenes Gemisch zweier Flüssigkeiten wird dann als **ideal** bezeichnet, wenn die Partialdrücke der Komponenten p_1 bzw. p_2 im Sattdampf proportional zu ihren Molbrüchen ν_1 bzw. ν_2 in der Flüssigkeit sind.
Wenn wir die Lösung eines nichtflüchtigen Stoffes betrachten, so sehen wir, daß sein Sattdampf nur aus dem Dampf des Lösungsmittels besteht. Wenn n_0 die Zahl der Mole des Lösungsmittels, n die Zahl der Mole des gelösten Stoffes, p_0 die Spannung der Sattdämpfe des reinen Lösungsmittels und p die Spannung der Sattdämpfe des Lösungsmittels über der Lösung darstellt, dann gilt für eine relative Erhöhung der Spannung der Sattdämpfe über der idealen Lösung eines nichtflüchtigen Stoffes das RAOULTsche Gesetz

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n_0 + n}.$$

Nach VAN'T HOFF stellt der **osmotische Druck** π, durch den verdünnte, elektrisch nicht leitfähige Flüssigkeiten wirken, den in einem solchen Fall auftretenden Druck so dar, als ob der gelöste Stoff das ganze Volumen einnimmt, das von der Lösung ausgefüllt wird, und zwar so, als wenn er im gasförmigen Aggregatzustand vorläge. Demnach ist

$$\pi = \frac{m}{MV} RT = cRT.$$

(m Masse des gelösten Stoffes, M seine Molmasse, V Volumen der Lösung, T Temperatur der Lösung).
Der Quotient $m/MV = n/V = c$ stellt die Zahl der Mole des gelösten Stoffes je Volumeneinheit der Lösung dar.
Lösungen erstarren bei geringerer und sieden bei höherer Temperatur als das reine Lösungsmittel. Die Schmelzpunkterniedrigung bzw. Siedepunkterhöhung von elektrisch nicht leitenden Lösungen wird durch die Gleichungen

$$\Delta t_s = -E_g \frac{m}{MV}; \quad \Delta t_v = E_s \frac{m}{MV}$$

bestimmt (Δt_s bzw. Δt_v die Differenz zwischen der Schmelz- bzw. der Siedetemperatur des reinen Lösungsmittels und der Lösung, m Masse des gelösten Stoffes, M Molmasse, V Volumen der Lösung). Die Konstanten E_g, die **kryoskopische Konstante,** und E_s, die **ebullioskopische Konstante** (auch molale Gefrierpunkterniedrigung bzw. molale Siedepunkterhöhung genannt), können wir aus den Beziehungen

$$E_g = \frac{RT_s^2}{\varrho_0 l_s}; \quad E_s = \frac{RT_v^2}{\varrho_0 l_v}$$

berechnen (R Gaskonstante, T_s und T_v Schmelz- bzw. Siedetemperatur des reinen Lösungsmittels, l_s und l_v Schmelzwärme bzw. Verdampfungswärme des reinen Lösungsmittels, ϱ_0 Dichte des reinen Lösungsmittels).

B Beispiele

177. Unter dem Druck $p_1 = 760$ Torr schmilzt Blei bei der Temperatur $t_1 = 327$ °C. Berechnen Sie, wie groß die Schmelzwärme des Bleis bei dieser Temperatur ist, wenn sich bei einer Erhöhung des äußeren Drucks um $\Delta p = 760$ Torr die Schmelztemperatur um $\Delta t = 0{,}008$ grd erhöht und das Blei durch den Schmelzprozeß sein Volumen um 3,4% vergrößert.

Lösung

Die Schmelzwärme erhalten wir aus der CLAUSIUS-CLAPEYRONschen Gleichung

$$l = T(v_2 - v_1)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}. \tag{1}$$

Das spezifische Volumen der festen Phase ist $v_1 = 1/\varrho$, wobei ϱ die Dichte des Bleis darstellt. Das spezifische Volumen der flüssigen Phase bestimmen wir aus der Bedingung, daß ihr Volumen um k% größer ist als das der festen Phase, also

$$v_2 = v_1 + v = v_1 + \frac{v_1}{100}\,k.$$

Der Quotient $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T$ kann durch den Quotienten $\Delta p/\Delta T$ in Hinblick auf die geringfügige Temperaturänderung ΔT ersetzt werden.
Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$l = T_1\,\frac{v_1}{100}\,k\,\frac{\Delta p}{\Delta T} = 600\ \text{°K}\,\frac{1}{11{,}3\cdot 10^5\ \text{kg m}^{-3}}\,3{,}4\,\frac{1{,}013\cdot 10^5\ \text{N m}^{-2}}{0{,}008\ \text{grd}} =$$

$$= 22{,}86\cdot 10^3\ \text{J kg}^{-1} = \underline{5{,}46\ \text{cal g}^{-1}}.$$

178. Die Druckabhängigkeit der Schmelztemperatur kann beim α-Naphthol durch die Beziehung

$$T = a + bp + cp^2$$

ausgedrückt werden ($a = 369$ grd, $b = 32{,}63\cdot 10^{-6}$ grd Torr^{-1}, $c = -11{,}25\cdot 10^{-13}$ grd Torr^{-2}). Berechnen Sie, wie groß die Schmelzwärme dieser Substanz bei einem Druck von 100 atm ist, wenn sich das spezifische Volumen der festen Phase beim Schmelzen um $\Delta v = 0{,}107$ cm^3 g^{-1} vergrößert.

Lösung

Unter dem Druck $p = p_0$ schmilzt der Stoff bei einer Temperatur T_0, für die gilt

$$T_0 = a + bp_0 + cp_0^2.$$

Durch Ableiten der Temperatur $T(p)$ nach dem Druck erhalten wir

$$\frac{dT}{dp} = b + 2cp,$$

woraus für die Änderung des Drucks der Sattdämpfe mit der Temperatur allgemein resultiert

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{b + 2cp}$$

und für den Druck $p = p_0$

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{p=p_0} = \frac{1}{b + 2cp_0}.$$

Die Schmelzwärme wird sodann aus der CLAUSIUS-CLAPEYRONschen Gleichung errechnet

$$l = T_0 (v_2 - v_1) \frac{dp}{dT}.$$

Mit den Werten

$$T_0 = 371{,}5\ °K; \quad v = v_2 - v_1 = 0{,}107\ cm^3\ g^{-1}; \quad \left(\frac{dp}{dT}\right)_{p=p_0} = 40{,}53\ atm\ grd^{-1}$$

folgt

$$l = 371{,}5\ °K \cdot 0{,}107 \cdot 10^{-3}\ m^3\ kg^{-1} \cdot 40{,}53 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\ N\ m^{-2}\ grd^{-1} =$$
$$= 1{,}63 \cdot 10^5\ J\ kg^{-1} = \underline{39{,}0\ cal\ g^{-1}}.$$

179. Welchen Druck nimmt gesättigter Wasserdampf bei $t_1 = 80$ °C an, wenn die Abhängigkeit der Verdampfungswärme des Wassers von der Temperatur durch die angenäherte Beziehung

$$l = a - bT$$

ausgedrückt wird, wobei $a = 764\ cal\ g^{-1}$ und $b = 0{,}6\ cal\ g^{-1}\ grd^{-1}$ ist? Wenden Sie bei der Berechnung der Gasphase die Zustandsgleichung an, und vernachlässigen Sie das spezifische Volumen der Kondensationsphase gegenüber der Gasphase bei gegebener Temperatur.

Lösung

Nach der CLAUSIUS-CLAPEYRONschen Gleichung gilt

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{(v_2 - v_1)\, T},$$

und nach Einfügen der Bedingung $l = a - bt$ und $v_1 \ll v_2$ finden wir

$$\frac{dp}{dT} = \frac{a - bT}{v_2 T}. \tag{1}$$

Aus der Zustandsgleichung $pV = (m/M)RT$ ergibt sich für das spezifische Volumen der Gasphase die Beziehung

$$v_2 = v = \frac{V}{m} = \frac{RT}{Mp},$$

woraus sich nach Einsetzen in Gl. (1) und einer Umformung ergibt

$$\frac{dp}{p} = \frac{M}{R}\,\frac{a - bT}{T^2}\,dT.$$

Indem wir beide Seiten der vorstehenden Gleichung integrieren, finden wir

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_{T_0}^{T} \frac{M}{R}\,\frac{a - bT}{T^2}\,dT,$$

d. h.,

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{M}{R}\left[a\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) + b\ln\frac{T}{T_0}\right],$$

so daß wir finden können

$$p = p_0 \exp\left\{-\frac{M}{R}\left[a\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) + b\ln\frac{T}{T_0}\right]\right\}.$$

Bei einer Temperatur $t_0 = 100$ °C beträgt der Druck der gesättigten Wasserdämpfe $p_0 = 760$ Torr, so daß nach Einsetzen der gegebenen Werte geschrieben werden kann

$$p = 1\,\text{atm}\exp\left\{-\frac{18\ \text{g mol}^{-1}}{1{,}98\ \text{cal grd}^{-1}\ \text{mol}^{-1}}\left[764\,\text{cal g}^{-1}\left(\frac{1}{353}\,\text{grd}^{-1} - \frac{1}{373}\,\text{grd}^{-1}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \, 0{,}6\ \text{cal g}^{-1}\ \text{grd}^{-1} \cdot 2{,}3\lg\frac{353}{373}\right]\right\}$$

$$p = 0{,}471\ \text{atm} = \underline{357{,}2\ \text{Torr}}.$$

Das Resultat kommt dem experimentell ermittelten Wert von 355,1 Torr sehr nahe.

180. Berechnen Sie, welcher Arbeitsaufwand für die Umwandlung einer Wassermenge der Masse $m = 1$ g notwendig ist, wenn das Wasser bei konstant gehaltener Temperatur von 100 °C vollständig in Dampf übergeführt wird. Der Druck beträgt $p = 760$ Torr. Um welchen Betrag ändert sich bei diesem Prozeß die innere Energie des Wassers? Unter den gegebenen Bedingungen ist das spezifische Volumen des Wasserdampfes $v_2 = 1674\ \text{cm}^3\ \text{g}^{-1}$, das des Wassers $v_1 = 1{,}04\ \text{cm}^3\ \text{g}^{-1}$.

Lösung

Entsprechend dem I. Hauptsatz der Thermodynamik wird die zugeführte Umwandlungswärme für die Änderung der inneren Energie und für die Leistung der mit der Volumenänderung des verdampfenden Wassers einhergehenden Arbeit aufgewendet. Demnach ist

$$l = U_2 - U_1 + W'.$$

Bei der Änderung des Aggregatzustands ändert sich zwar der Druck nicht, aber das spezifische Volumen des Wassers wächst von v_1 auf v_2. Für die notwendige Volumenarbeit bei konstantem Druck erhalten wir

$$W' = \int_{v_1}^{v_2} p\,\mathrm{d}V = p(v_2 - v_1) = 1\ \text{atm} \cdot 1673 \cdot 10^{-3}\ \text{l g}^{-1} =$$

$$= 1{,}673\ \text{l atm g}^{-1} = 169{,}6\ \text{J g}^{-1} = 40{,}5\ \text{cal g}^{-1}.$$

Die Änderung der inneren Energie finden wir wie folgt

$$U_2 - U_1 = l - W' = 539\ \text{cal g}^{-1} - 40{,}5\ \text{cal g}^{-1} = 498{,}5\ \text{cal g}^{-1} = \underline{2084\ \text{J g}^{-1}}.$$

181. Bestimmen Sie die Temperatur und den Druck am Tripelpunkt des Arsens, wenn die Abhängigkeit der Sattdämpfe von der Temperatur durch folgende Beziehungen gegeben ist:

a) für die Flüssigkeitsphase

$$p_1 = k_1\,\mathrm{e}^{\frac{a_1}{T}}, \tag{1}$$

b) für die feste Phase

$$p_2 = k_2\,\mathrm{e}^{\frac{a_2}{T}}. \tag{2}$$

($a_1 = -5658$ grd, $a_2 = -15978$ grd, $k_1 = 4{,}89 \cdot 10^6$ Torr, $k_2 = 6{,}31 \cdot 10^{10}$ Torr).

Lösung

Im Tripelpunkt existieren bei einer ganz bestimmten Temperatur und bei ganz bestimmtem Druck drei Aggregatzustände eines Stoffes im Gleichgewicht nebeneinander. Die Spannung der Sattdämpfe über der flüssigen und über der festen Phase muß also bei der Temperatur des Tripelpunkts gleich sein.

Die entsprechende Temperatur bestimmen wir durch Gegenüberstellung und Lösung der beiden Gln. (1) u. (2)

$$p_1 = p_2,$$

$$k_1\,\mathrm{e}^{\frac{a_1}{T}} = k_2\,\mathrm{e}^{\frac{a_2}{T}},$$

$$\mathrm{e}^{\frac{a_1 - a_2}{T}} = \frac{k_2}{k_1}.$$

so daß sich ergibt

$$\frac{a_1 - a_2}{T} = 2{,}3 \lg \frac{k_2}{k_1}.$$

Wir finden also

$$T = \frac{a_1 - a_2}{2{,}3 \lg \frac{k_2}{k_1}}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$T = \frac{-5658 \text{ grd} + 15978 \text{ grd}}{2{,}3 \lg \frac{6{,}31 \cdot 10^{10}}{4{,}89 \cdot 10^{6}}} = 1091 \text{ °K} = \underline{818 \text{ °C}}.$$

Den zugehörigen Druck bestimmen wir aus Gl. (1) oder (2) zu

$$p = 4{,}89 \cdot 10^6 \text{ Torr} \cdot e^{-\frac{5658}{1091}} = 2{,}7 \cdot 10^4 \text{ Torr} = \underline{36 \text{ atm}}.$$

Also sind die Koordinaten des Tripelpunkts von Arsen definiert durch die Zustandswerte 36 atm und 818 °C.

182. Gesättigter Wasserdampf wird umkehrbar adiabatisch, von der Temperatur $t_1 = 195$ °C ausgehend, expandiert bis auf eine Temperatur $t_2 = 120$ °C, wobei ein gewisser Anteil des Wassers kondensiert. Berechnen Sie, welche Zusammensetzung das aus Wasser und Sattdampf bestehende Gemisch nach Vollzug der Expansion hat. Die zugehörigen Verdampfungswärmen sind $l_1 = 468{,}1$ cal g^{-1} und $l_2 = 525{,}7$ cal g^{-1}.

Lösung

Bei der umkehrbaren adiabatischen Expansion verändert sich die Entropie des Systems nicht. Im Anfangszustand hat gesättigter Wasserdampf der Masse m eine – auf den Grundzustand von der Temperatur T_0 bezogene – Entropie, die wir durch folgende Beziehung definieren:

$$S_1 = S_1' + m \frac{l_1}{T_1}. \tag{1}$$

Nach der adiabatischen Expansion auf die Temperatur T_2 kondensiert eine gewisse Menge y, und die Entropie des aus Wasser und Sattdampf bestehenden Gemischs finden wir als Summe der Entropien beider Komponenten, d. h.,

$$S_2 = \frac{y}{m} S_2' + \frac{m - y}{m} S_2' + (m - y) \frac{l_2}{T_2}, \tag{2}$$

wobei S_1' und S_2' die Entropien der Wassermenge m bei den Temperaturen T_1 bzw. T_2 darstellen. Aus Gl. (2) finden wir nach vollzogener Umformung

$$S_2 = S_2' + (m - y) \frac{l_2}{T_2}.$$

Da es sich um eine umkehrbar adiabatische Zustandsänderung handelt, ändert sich hierbei die Entropie nicht, und aus der Gegenüberstellung der Gln. (1) und (2) resultiert

$$S_1' + m\frac{l_1}{T_1} = S_2' + (m - y)\frac{l_2}{T_2}. \tag{3}$$

Der Quotient $x = \frac{m - y}{m}$ bedeutet die relative Menge gesättigten Wasserdampfes nach Ablauf der adiabatischen Zustandsänderung. Für diese Größe finden wir aus Gl. (3) die Beziehung

$$x = \frac{m - y}{m} = \frac{T_2}{l_2}\left[\frac{S_1' - S_2'}{m} + \frac{l_1}{T_1}\right]. \tag{4}$$

Die Entropie S' von Wasser der Masse m bei der Temperatur T kann man – bezogen auf den Grundzustand bei T_0 – aus

$$S' = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T} \frac{mc\,dT}{T} = mc \ln \frac{T}{T_0}$$

und

$$S_1' - S_2' = mc \ln \frac{T_1}{T_0} - mc \ln \frac{T_2}{T_0} = mc \ln \frac{T_1}{T_2}$$

bestimmen. Nach Einsetzen in Gl. (4) erhalten wir

$$x = \frac{T_2}{l_2}\left[c \ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{l_1}{T_1}\right].$$

Nach Einsetzen der Werte finden wir dann

$$x = \frac{393\ \text{grd}}{525{,}7\ \text{cal g}^{-1}}\left[1\ \text{cal g}^{-1}\ \text{grd}^{-1}\ 2{,}3\ \lg\frac{468}{393} + \frac{468{,}1\ \text{cal g}^{-1}}{468\ \text{grd}}\right] = 0{,}88.$$

Das Gemisch, das sich nach der adiabatischen Expansion herausbildet, besteht aus 88 % gesättigtem Wasserdampf und 12 % Wasser.

183. Ein CARNOT-Prozeß verläuft zwischen den Temperaturen T_1 und T_2. Als Arbeitsstoff dient Wasserdampf in einer Masse $m = 1$ g, der während des gesamten Prozesses gesättigt bleibt. Stellen Sie diesen Prozeß in einem p, V-Diagramm dar, und berechnen Sie den Wirkungsgrad.

Lösung

Aus der Bedingung, daß der Wasserdampf während des gesamten Kreisprozesses gesättigt bleiben soll, ergibt sich die Forderung, daß die Kennlinie, die den Zyklus im p, V-Diagramm beschreibt, vollständig innerhalb jenes Bereichs liegen muß, in dem Flüssigkeits- und Gasphase nebeneinander bestehen

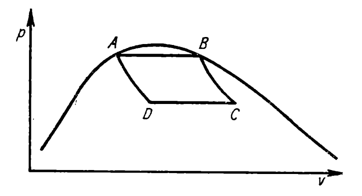


Bild 88

können. Die isotherme Zustandsänderung vollzieht sich bei konstantem Druck. Daher sind die Isothermen mit den Isobaren identisch (Bild 88). Im Anfangszustand A haben wir $m = 1$ g Flüssigkeit bei einer Temperatur T_1 und der Entropie S_1'.
a) Im Verlauf der isothermen Expansion (Teilprozeß AB) verdampft das Wasser vollständig zu Sattdampf, wozu von außen die Wärmemenge

$$Q_1 = ml_1 \tag{1}$$

zugeführt werden muß. Hierbei stellt l_1 die Verdampfungswärme bei der Temperatur T_1 dar.
b) im Verlauf der adiabatischen Expansion (Teilprozeß BC) fällt die Temperatur des Dampfes auf T_2, ein Teil des Dampfes kondensiert, und das entstehende Dampf-Wasser-Gemisch enthält eine bestimmte Menge gesättigten Dampfes, die durch die Beziehung

$$x_c = \frac{T_2}{l_2}\left[\frac{S_1' - S_2'}{m} + \frac{l_1}{T_1}\right] \text{ (vgl. Aufg. 182)} \tag{2}$$

bestimmt ist (S_2' Entropie von 1 g Wasser bei der Temperatur T_2, l_2 Verdampfungswärme bei der Temperatur T_2).
c) Im Verlauf der isothermen Kompression (Teilprozeß CD) kondensiert ein weiterer Teil des Dampfes, der Anteil des Sattdampfes verringert sich auf x_D, und die Menge des kondensierten Dampfes ist

$$x_C - x_D.$$

Bei diesem Prozeß wird die Wärmemenge

$$Q_2' = (x_C - x_D)\, l_2 \tag{3}$$

frei.
d) Im Zuge der adiabatischen Kompression (Teilprozeß DA) wird das Gemisch wieder in den ursprünglichen Zustand gebracht, wobei es zur vollständigen Kondensation kommt. Bei diesem Teilprozeß ändert sich die Entropie nicht, daher ist die Entropie des Systems im Zustand (D) S_2 dieselbe wie im Zustand (A) S_1'. Nun ist

$$S_2 = (m - x_D)\frac{S_2'}{m} + x_D\left[\frac{S_2'}{m} + \frac{l_2}{T_2}\right] = S_1',$$

woraus sich ergibt

$$x_D = (S_1' - S_2')\frac{T_2}{l_2}. \tag{4}$$

Unter Anwendung der Beziehungen (2) und (4) erhalten wir

$$x_C - x_D = m\frac{T_2}{T_1}\frac{l_1}{l_2}.$$

Und für die freigesetzte Wärmemenge Q_2' erhalten wir aus Gl. (3) den Wert

$$Q_2' = m\frac{T_2}{T_1}l_1.$$

Beim CARNOT-Prozeß wird die Arbeit

$$W' = Q_1 - Q_2' = ml_1 - m\frac{T_2}{T_1}l_1 = ml_1\frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

gewonnen, der Wirkungsgrad des Prozesses ist also durch

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

angegeben.

184. In einem Gefäß vom Volumen $V = 2\ m^3$ befinden sich $m = 4$ kg Sauerstoff bei einer Temperatur $t = 29$ °C. Wie groß ist der Druck? Wie verändert sich der Druck, wenn wir das Gas bei konstantem Volumen auf die doppelte Temperatur erwärmen? Zur Berechnung soll die VAN DER WAALSsche Zustandsgleichung angewandt werden.

Lösung

Für ein Mol realen Gases hat die VAN DER WAALSsche Zustandsgleichung die Form

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \tag{1}$$

(V_m das von einem Mol eingenommene Volumen). Wenn wir eine beliebige Gasmenge der Masse m in Betracht ziehen, so hat sie bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck das Volumen

$$V = nV_m$$

(n die Zahl der enthaltenen Mole).
Wenn wir mit Hilfe dieser Beziehung die Größe V_m in Gl. (1) ersetzen, erhalten wir nach Umformung

$$\left(p + n^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

Daraus erhalten wir

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - n^2 \frac{a}{V^2}.$$

Für den Druck des Sauerstoffs vor Beginn der Zustandsänderung finden wir nach Einsetzen der gegebenen Werte:

$$p = \frac{\frac{4\ \text{kg}}{32 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1}}\, 0{,}082\ \text{l atm grd}^{-1}\ \text{mol}^{-1} \cdot 302\ \text{°K}}{2 \cdot 10^3\ \text{l} - \frac{4\ \text{kg}}{32 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1}}\, 0{,}03\ \text{l mol}^{-1}} - \left(\frac{4\ \text{kg}}{32 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1}}\right)^2 \frac{1{,}35\ \text{l}^2\ \text{atm mol}^{-2}}{2^2 \cdot 10^6\ \text{l}^2} = 1{,}55\ \text{atm}.$$

Nach Vollzug der Zustandsänderung ändert sich der Druck um den Betrag

$$\Delta p = p' - p = \frac{nR(T_0 + 2t)}{V - nb} - n^2 \frac{a}{V^2} - \frac{nR(T_0 + t)}{V - nb} + n^2 \frac{a}{V^2} =$$

$$= n \frac{Rt}{V - nb} = \underline{0{,}15 \text{ atm}}.$$

185. Ein Mol realen Gases, das nach der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung behandelt wird, soll von einer Temperatur t_1 auf eine höhere Temperatur t_2 erwärmt werden. Sein Volumen ändert sich dabei von V_1 auf V_2. Berechnen Sie, wie sich bei dieser Zustandsänderung die innere Energie des Gases verändert.

Lösung

Das reale Gas verrichtet bei einer Volumenänderung auch gegen die inneren Kräfte Arbeit, die ihren Ursprung in der gegenseitigen Beeinflussung der Moleküle haben. Der innere Druck p_i, durch den wir diese gegenseitige Einwirkung erfassen, wird durch die Größe $p = a/V^2$ bestimmt. Die Gesamtarbeit, die das Gas gegen den Innendruck verrichtet, d. h.,

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p_i \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} \, dV = a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right),$$

wird für eine Erhöhung der inneren Energie des Gases benötigt. Um diesen Betrag ist nach der angegebenen Zustandsänderung die innere Energie des realen Gases größer, als es die eines idealen Gases wäre.
Wenn wir voraussetzen, daß die spezifische Wärmekapazität von einem Mol Gas temperaturunabhängig ist, dann finden wir für die gesamte Änderung der inneren Energie die Beziehung

$$\underline{U_2 - U_1 = C_v(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)}.$$

186. Berechnen Sie, wie sich die Temperatur eines der VAN DER WAALSschen Gleichung gehorchenden Gases ändert, wenn es dem Versuch von JOULE-THOMSON unterzogen wird. Wir setzen dabei voraus, daß die Konstante b in der VAN DER WAALSschen Gleichung vernachlässigt werden kann.

Lösung

In der Versuchsanordnung gemäß JOULE-THOMSON wird das Gas auf nicht umkehrbare Weise adiabatisch expandiert. Der Prozeß verläuft bei konstanter Enthalpie des Gases. Daher gilt $H_1 = H_2$ oder

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2, \tag{1}$$

wobei sich die Indizes 1 und 2 auf den Anfangs- bzw. Endzustand des Gases beziehen. Für das Produkt pV finden wir gemäß der VAN DER WAALSschen Gleichung für 1 Mol

$$pV = \frac{RTV}{V-b} - \frac{a}{V},$$

und, da $b = 0$ ist, ergibt sich

$$pV = RT - \frac{a}{V}. \tag{2}$$

Für die Berechnung der Änderung der inneren Energie des realen Gases wenden wir die Beziehung an, die in Beispiel 185 abgeleitet wurde:

$$U_2 - U_1 = C_v(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right). \tag{3}$$

Wenn wir die Gln. (2) u. (3) in Gl. (1) einsetzen, finden wir

$$C_v(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = RT_1 - \frac{a}{V_1} - RT_2 + \frac{a}{V_2}.$$

Hieraus erhalten wir nach Umformung

$$\underline{T_2 - T_1 = \frac{2a}{C_v + R}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).}$$

Da $V_2 > V_1$ ist, wird $T_2 < T_1$.
Das Gas kühlt sich also ab, es handelt sich um den sog. positiven JOULE-THOMSON-Effekt.

187. Die Eigenschaften und das Verhalten einiger realer Gase lassen sich recht gut mit der Beziehung

$$\left(p + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b) = RT$$

beschreiben. Berechnen Sie mit Hilfe der Konstanten a und b die Zustandsgrößen p, V und T im kritischen Zustand.

Lösung

Im kritischen Punkt hat die Isotherme des Gases einen Wendepunkt, und die Tangente der Isotherme verläuft parallel zur Volumenachse. Daher müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\frac{dp}{dV} = 0; \quad \frac{d^2p}{dV^2} = 0. \tag{1}$$

Aus der angegebenen Zustandsgleichung resultiert

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2} \tag{2}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{TV^3}; \quad \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{TV^4}.$$

Für den kritischen Zustand finden wir unter Anwendung der Gl. (1)

$$\frac{RT_k}{(V_k-b)^2} = \frac{2a}{T_kV_k^3}; \quad \frac{2RT_k}{(V_k-b)^3} = \frac{6a}{T_kV_k^4}. \tag{3}$$

Wenn wir beide Gleichungen dividieren, erhalten wir nach Umformung

$$\underline{V_k = 3b.}$$

Für die Größen T_k und p_k finden wir aus den Gln. (2) u. (3) die Beziehungen

$$\underline{T_k^2 = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb}}; \quad \underline{p_k^2 = \frac{aR}{216\,b^3}}.$$

188. Berechnen Sie, wie sich die Entropie eines Mols Stickstoff verändert, wenn dieser bei einer Erwärmung von $t_1 = 27$ °C auf $t_2 = 100$ °C sein Volumen von $V_1 = 2$ l auf $V_2 = 3$ l vergrößert. Wir setzen voraus, daß wir das Gas entsprechend der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung behandeln können.

Lösung

Für eine infinitesimale Änderung der Entropie gilt

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{\mathrm{d}U + \mathrm{d}W'}{T}. \tag{1}$$

Die Änderung der inneren Energie $\mathrm{d}U$ ist bei einem realen Gas gegenüber dem idealen Gas um diejenige Arbeit vergrößert, die das Gas gegen den Innendruck (vgl. Beispiel 185) verrichtet. Dieser Anteil ist durch die Beziehung

$$\mathrm{d}W_i' = \frac{a}{V^2}\,\mathrm{d}V$$

gegeben. Für die infinitesimale Änderung der inneren Energie können wir also schreiben

$$\mathrm{d}U = C_v\,\mathrm{d}T + \frac{a}{V^2}\,\mathrm{d}V. \tag{2}$$

Die Arbeit, die das Gas gegenüber äußeren Kräften verrichtet, berechnen wir aus der Beziehung

$$\mathrm{d}W' = p\,\mathrm{d}V.$$

Wenn wir die Angabe für den Druck p aus der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung entnehmen und hier einsetzen, erhalten wir

$$\mathrm{d}W' = \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)\mathrm{d}V. \tag{3}$$

Wir setzen die gefundenen Gln. (2) u. (3) in Gl. (1) ein und erhalten daraus nach Umformung

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V - b}.$$

Für die Gesamtänderung der Entropie finden wir

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_v \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} R \frac{dV}{V - b} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$S_2 - S_1 = 4{,}96 \text{ cal grd}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{373\ °\text{K}}{300\ °\text{K}} +$$

$$+ 1{,}98 \text{ cal grd}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{(3 - 0{,}04) \text{ l mol}^{-1}}{(2 - 0{,}04) \text{ l mol}^{-1}},$$

$$\underline{S_2 - S_1 = 1{,}9 \text{ cal grd}^{-1} \text{ mol}^{-1}.}$$

189. Eine gewisse Menge wasserfreien Kalziumchlorids ($CaCl_2$) der Masse $m_1 = 53{,}846$ g wurde bei einer Temperatur $t = 18$ °C in Wasser der Masse $m_2 = 100$ g aufgelöst. Die so geschaffene Lösung hat eine Dichte $\varrho = 1342$ g l^{-1}.
Bestimmen Sie die Konzentration der Lösung
a) in Massenprozenten p,
b) in der Molarität C,
c) in der Molalität C_m und
d) in Molbrüchen.

Lösung

a) Wenn die Gewichte der einzelnen Komponenten G_1 und G_2 und die zugehörigen Massen der Komponenten m_1 und m_2 sind, dann gilt

$$p = 100\% \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

d. h.,

$$p = 100\% \frac{53{,}846 \text{ g}}{53{,}846 \text{ g} + 100 \text{ g}} = \underline{35{,}0\%.}$$

b) Die Molarität C der Lösung ist die Zahl der Mole des gelösten Stoffes in einem Liter Lösungsmittel. Wenn die Lösung das Volumen V einnimmt und der gelöste Stoff aus n_1 Molen besteht, dann ist die Molarität durch die folgende Beziehung gegeben:

$$C = \frac{n_1}{V}.$$

Weiterhin können wir schreiben:

$$V = \frac{m_1 + m_2}{\varrho}; \qquad n_1 = \frac{m_1}{M_1}.$$

Die Masse eines Mols gelösten Stoffes (M_1) läßt sich leicht mit Hilfe der Atommassen ihrer Komponenten ermitteln. Für $CaCl_2$ ist $M_1 = 111 \text{ g mol}^{-1}$, so daß sich ergibt

$$C = \frac{m_1 \varrho}{M_1(m_1 + m_2)} = \frac{53{,}846 \text{ g} \cdot 1342 \text{ g l}^{-1}}{111 \text{ g mol}^{-1} \cdot 153{,}846 \text{ g}} = \underline{4{,}23 \text{ mol l}^{-1}}.$$

c) Die Molalität C_m der Lösung stellt die Anzahl der Mole des gelösten Stoffes in 1000 g Lösungsmittel dar. Auf $m_2 = 100$ g Lösungsmittel entfallen

$$n_1 = m_1/M_1$$

Mole gelösten Stoffes. Für die Molalität gilt dann

$$C_m = 10 n_1 = 10 \frac{53{,}846 \text{ g}}{111 \text{ g mol}^{-1}} = \underline{4{,}85 \text{ mol.}}$$

d) Der Molbruch der Komponenten A in der Lösung mit den beiden Komponenten A und B wird durch die Beziehung

$$\nu_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

bestimmt, in der n_A und n_B die jeweilige Zahl der Mole der beiden Komponenten A und B darstellen. Der Molbruch von $CaCl_2$ ist damit durch folgende Beziehung angegeben:

$$\nu_1 = \frac{\dfrac{m_1}{M_1}}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}} = \frac{\dfrac{53{,}846 \text{ g}}{111 \text{ g mol}^{-1}}}{\dfrac{53{,}846 \text{ g}}{111 \text{ g mol}^{-1}} + \dfrac{100 \text{ g}}{18 \text{ g mol}^{-1}}} = \underline{0{,}08.}$$

190. Über einer Lösung von 100 kg Masse, bestehend aus Benzol (C_6H_6) und Toluol ($C_6H_5CH_3$), hat der Gesamtdruck des Sattdampfes bei einer Temperatur von 100 °C einen Betrag von 942 Torr. Berechnen Sie, welche Mengen Toluol und Benzol die Lösung enthält, wenn die Spannung des Sattdampfes vom Benzol allein bei gegebener Temperatur die Größe $p_1^0 = 1340$ Torr und die des Toluols $p_2^0 = 560$ Torr annimmt. Die Lösung soll als Ideallösung angesehen werden.

Lösung

Ein homogenes Gemisch zweier Flüssigkeiten kann dann als ideales Gemisch angesehen werden, wenn die Partialdrücke der Komponenten (p_1 bzw. p_2) im Sattdampf ihren Molbrüchen (ν_1 bzw. ν_2) in der Flüssigkeit proportional sind. Wenn die Spannung der Sattdämpfe der ersten Komponente p_1^0 und der zweiten Komponente p_2^0 ist, dann ergibt sich für die Partialdrücke aus der Proportion

$$p_1 : p_1^0 = \nu_1 : 1 \quad \text{und} \quad p_2 : p_2^0 = \nu_2 : 1$$

$$p_1 = \nu_1 p_1^0 \quad \text{und} \quad p_2 = \nu_2 p_2^0, \tag{1}$$

wobei

$$\nu_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{und} \quad \nu_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}. \tag{2}$$

Die Größen n_1 und n_2 stellen die zugehörigen Molzahlen der einzelnen beteiligten Komponenten dar.
Da $\nu_1 + \nu_2 = 1$ ist, können wir unter Anwendung der Gl. (1) wie folgt schreiben:

$$\frac{p_1}{p_1^0} + \frac{p_2}{p_2^0} = 1.$$

Der Gesamtdruck des Sattdampfes über der Lösung ist gleich der Summe der Partialdrücke aller Komponenten, also

$$p_1 + p_2 = p.$$

Diese Beziehung zusammen mit der vorhergehenden bietet die Lösung für die Drücke p_1 und p_2:

$$p_1 = p_1^0 \frac{p - p_2^0}{p_1^0 - p_2^0}; \quad p_2 = p_2^0 \frac{p_1^0 - p}{p_1^0 - p_2^0}. \tag{3}$$

Aus den Gln. (1) u. (2) ergibt sich

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{p_1}{p_2} \frac{p_2^0}{p_1^0} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $n_1 = m_1/M_1$ und $n_2 = m_2/M_2$ ist, erhalten wir unter Verwendung der Gln. (3)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{p - p_2^0}{p_1^0 - p}.$$

Diese Beziehung liefert zusammen mit der Gleichung $m = m_1 + m_2$ die gesuchte Lösung

$$m_1 = \frac{M_1(p - p_2^0)}{M_2(p_1^0 - p) + M_1(p - p_2^0)} m$$

und $m_2 = m - m_1$.
Mit den gegebenen Werten finden wir

$$M_1 = 78 \text{ g mol}^{-1}; \quad M_2 = 92 \text{ g mol}^{-1};$$

$$m_1 = \frac{78 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} (942 - 560) \text{ Torr}}{92 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} (1340 - 942) \text{Torr} + 78 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} (942 - 560) \text{Torr}} 100 \text{ kg}$$

$$m_1 = \underline{44{,}9 \text{ kg}}; \quad m_2 = \underline{55{,}1 \text{ kg.}}$$

191. In einem Liter Wasser werden $m = 50$ g eines nicht dissoziierenden Stoffes bei der Temperatur $t = 95$ °C gelöst. Die über der Lösung befindlichen Sattdämpfe haben eine Spannung $p = 632{,}8$ Torr. Bestimmen Sie die Molmasse des gelösten Stoffes. Bei der

gegebenen Temperatur von 95 °C hat der gesättigte Wasserdampf eine Spannung von 634 Torr.

Lösung

Aus dem RAOULTschen Gesetz

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n_0 + n}$$

bestimmen wir die Anzahl n der Mole des gelösten Stoffes, und mit Hilfe der Beziehung $n = m/M$ die Masse eines Mols:

$$n = \frac{p_0 - p}{p} n_0 = \frac{m}{M};$$

$$M = \frac{p}{n_0(p_0 - p)} m,$$

worin n_0 die Anzahl der Mole des Wassers darstellt, d. h.,

$$n_0 = \frac{m_0}{M_0} = \frac{1000\text{ g}}{18\text{ g mol}^{-1}}.$$

Nach Einsetzen der Werte finden wir

$$M = \frac{632{,}8\text{ Torr}}{\frac{1000\text{ g}}{18\text{ g mol}^{-1}}(634 - 632{,}8)\text{ Torr}} 50\text{ g} = \underline{475\text{ g mol}^{-1}}.$$

192. In einem Liter Wasser wird bei einer Temperatur $t = 27$ °C Natriumchlorid der Masse $m = 2{,}92$ g gelöst. Welchen Wert wird der osmotische Druck der Lösung annehmen, wenn 44% der Moleküle des NaCl in Ionen dissoziieren?

Lösung

Der osmotische Druck von Stoffen, die elektrisch leitende Lösungen bilden, ist stets größer, als ihn das VAN'T HOFFsche Gesetz angibt, denn die Moleküle dieser Stoffe dissoziieren bei der Lösung in Ionen, die als selbständige Moleküle wirken. Dadurch erhöht sich die Zahl der Teilchen je Volumeneinheit, und der osmotische Druck der Lösung steigt an.

Wir setzen voraus, daß n_0 die Zahl der Moleküle des gelösten Stoffes in der Volumeneinheit darstellt und daß keinerlei Dissoziation auftritt. Im Falle der Dissoziation aber sollen von dieser Zahl i Moleküle derart dissoziieren, daß jedes in zwei Ionen zerfällt. Dann wird die nach der Dissoziation in der Volumeneinheit enthaltene Zahl der Teilchen durch die Beziehung

$$n_0' = 2i + (n_0 - i)$$

gegeben sein. Da der osmotische Druck der Anzahl der Teilchen je Volumeneinheit direkt proportional ist, steigt er infolge der Dissoziation im Verhältnis

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{n_0'}{n_0} = \frac{2i + (n_0 - i)}{n_0} = k + 1,$$

wobei der Quotient der Zahl der dissoziierenden Moleküle zur Gesamtmolekülzahl n_0 mit dem Buchstaben k bezeichnet wird. Dann gilt

$$\pi' = \pi(k + 1).$$

Und wenn wir das VAN'T HOFFsche Gesetz anwenden, finden wir

$$\pi' = \frac{m}{MV} RT(k + 1).$$

Die Masse eines Mols NaCl ist 58,5 g mol^{-1}, $k = 0{,}44$, so daß sich nach Einsetzen der gegebenen Werte ergibt

$$\pi' = \frac{2{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 0{,}082\ \text{l atm grd}^{-1}\ \text{mol}^{-1} \cdot 300\ ^\circ\text{K}\ (0{,}44 + 1)}{58{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1} \cdot 1\ \text{l}} = \underline{1{,}77\ \text{atm.}}$$

193. Ein zylindrisches Rohr, das eine Rohrzuckerlösung ($C_{12}H_{22}O_{11}$) enthält, ist an seinem unteren Ende mit einer halbdurchlässigen Membran verschlossen. Es wird in ein anderes Gefäß eingetaucht, in dem sich reines Wasser befindet. Nach Herausbildung des Gleichgewichtszustands befindet sich der Spiegel der Lösung im Rohr um eine Höhe $h = 10$ cm über dem Flüssigkeitsspiegel des umgebenden Wassers. Das zylindrische Rohr habe eine Querschnittsfläche $A = 2$ cm^2, die Temperatur der Lösung betrage $t_0 = 13$ °C. Die Membran liege um eine Höhe $h_0 = 3$ cm unter dem Wasserspiegel. Berechnen Sie, welche Zuckermenge in der Lösung enthalten ist. Die Dichte der Lösung unterscheidet sich nur geringfügig von der des Wassers (Bild 89).

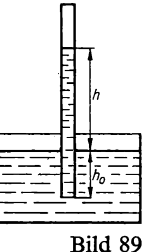


Bild 89

Lösung

Die halbdurchlässige Membran zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, daß sie keine gelösten Stoffe hindurchläßt, daß wohl aber die Moleküle des reinen Lösungsmittels gut hindurchgehen. Daher wird das Wasser allmählich in die Zuckerlösung eindringen, und das Experiment zeigt einen Anstieg des Spiegels der Lösung gegenüber dem des Lösungsmittels. Nach einer bestimmten Zeit tritt ein Gleichgewichtszustand ein. Er ist dadurch charakterisiert, daß der hydrostatische Druck der Flüssigkeitssäule über dem Spiegel des Lösungsmittels dem osmotischen Druck der Lösung gleich ist. Dann gilt

$$\pi = h\varrho g.$$

Unter der vereinfachenden Bedingung $\varrho \approx \varrho_0 \approx 10^3$ kg m^{-3} und unter Anwendung des VAN'T HOFFschen Gesetzes können wir für den osmotischen Druck schreiben

$$\frac{m}{MV} RT = hg\varrho_0,$$

woraus sich ergibt

$$m = \frac{MVhg\varrho_0}{RT}.$$

Die Molmasse des Zuckers ist $M = 342\ \text{g mol}^{-1}$, das Volumen, das von der Lösung eingenommen wird, ist

$$V = A(h + h_0).$$

Nach dem Einsetzen finden wir

$$m = \frac{MgAh(h + h_0)\,\varrho_0}{RT}, \quad \text{d. h.,}$$

$$m = \frac{342 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1} \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\,(10 + 3) \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{8{,}3\ \text{J grd}^{-1}\ \text{mol}^{-1} \cdot 276\ °\text{K}} \times$$

$$\times\ 1 \cdot 10^3\ \text{kg m}^{-3}$$

$$m = 3{,}67 \cdot 10^{-6}\ \text{kg} = \underline{3{,}67\ \text{mg}}.$$

194. Durch Auflösen von $m = 30$ g eines bestimmten Stoffes in 300 cm³ Wasser entsteht eine Lösung, deren Erstarrungstemperatur um 0,6 grd niedriger liegt als die des reinen Wassers. Wie groß ist die Molmasse des gelösten Stoffes? Bei der Lösung soll keine Dissoziation auftreten.

Lösung

Die Gefrierpunkterniedrigung in verdünnten Lösungen ist direkt proportional der Zahl C der Mole des in einem Liter Lösungsmittel gelösten Stoffes. Wenn sich in einem Volumen V die Masse m des gelösten Stoffes befindet, von dem ein Mol die Masse M hat, dann gilt

$$C = \frac{m}{MV}.$$

Die Gefrierpunkterniedrigung wird

$$\Delta t = -E_g \frac{m}{MV},$$

woraus sich ergibt

$$M = -\frac{E_g m}{\Delta t V}.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$M = -\frac{1{,}86\ \text{grd l mol}^{-1} \cdot 30 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}{-0{,}6\ \text{grd} \cdot 0{,}3\ \text{l}} = \underline{0{,}31\ \text{kg mol}^{-1}}.$$

A Aufgaben

232. Berechnen Sie, bei welcher Temperatur Eis unter dem Druck $p = 1520$ Torr schmilzt, wenn das spezifische Volumen des Eises $v_1 = 1{,}09 \cdot 10^{-3}$ m³ kg⁻¹, des Wassers $v_2 = 10^{-3}$ m³ kg⁻¹ und die Schmelzwärme des Eises $l = 79{,}6$ kcal kg⁻¹ beträgt.
233. Berechnen Sie, unter welchem Druck Wasser bei einer Temperatur von 99 °C siedet, wenn die Verdampfungswärme des Wassers bei 100 °C einen Wert von 539 kcal kg⁻¹ hat und wenn das spezifische Volumen des Wasserdampfes bei dieser Temperatur $v_2 = 1675 \cdot 10^{-3}$ m³ kg⁻¹ und in der kondensierten Phase $v_1 = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$ m³ kg⁻¹ beträgt.
234. Berechnen Sie das spezifische Volumen des Wasserdampfes bei einer Temperatur $t_1 = 300$ °C, wenn bei dieser Temperatur die Verdampfungswärme den Wert $l = 335{,}1$ kcal kg⁻¹ hat und das spezifische Volumen in der kondensierten Phase $v_1 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ m³ kg⁻¹ ist. In der Umgebung der Temperatur t_1 ändert sich bei einer Temperaturänderung um 1 grd der Druck der Sattdämpfe um einen Betrag von 1,27 kp cm⁻².
235. Ein Mol Kohlendioxid wird bei 0 °C isotherm auf den vierten Teil seines Volumens im Normzustand komprimiert. Berechnen Sie, welcher Druck dazu erforderlich ist, wenn man das Gas
a) als ideales Gas,
b) als reales Gas entsprechend der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung behandelt ($a = 3{,}601 \cdot 10^6$ atm cm⁶ mol⁻²; $b = 42{,}672$ cm³ mol⁻¹).
236. In einem realen Gas, das entsprechend der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung zu behandeln ist, verläuft ein Prozeß a) isotherm, b) isochor und c) isobar.
Stellen Sie den Verlauf dieses Prozesses in p,V- und p,T-Diagrammen dar.
237. In einer Stahlflasche mit dem Volumen $V_0 = 0{,}53$ m³ befindet sich unter einem Druck von $p_0 = 38 \cdot 10^3$ Torr ein Kilomol Kohlendioxid. Welche Temperatur hat das Gas entsprechend der VAN DER WAALSschen Gleichung? Die Konstanten sind:
$a = 3{,}65 \cdot 10^5$ J m³ kmol⁻²;
$b = 0{,}043$ m³ kmol⁻¹.
Vergleichen Sie das erhaltene Ergebnis mit der Temperatur, die ein ideales Gas unter diesen Umständen hätte.
238. Ein Mol Kohlendioxid vergrößert sein Volumen vom ursprünglichen Wert $V_0 = 1$ l auf das Doppelte. Berechnen Sie, welche Arbeit das Gas dabei gegen die inneren Kräfte verrichten muß. Wir setzen voraus, daß das Gas der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung gehorcht.
239. Ermitteln Sie die Zahlenwerte der beiden Konstanten a und b in der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung für das Gas Sauerstoff, dessen kritischer Druck $p_k = 50$ at und dessen kritische Temperatur $t_k = -119$ °C beträgt.
240. Berechnen Sie die Werte für den kritischen Druck und die kritische Temperatur des Kohlendioxids unter der Voraussetzung, daß die Konstanten a und b der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung bekannt sind.
241. Berechnen Sie unter Benutzung der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung die Arbeit, die eine Menge $m = 50$ g Stickstoff gegen die äußeren Kräfte verrichtet, wenn sich das Gas bei der Temperatur $t = 27$ °C von einem Anfangsvolumen $V_1 = 0{,}5$ l isotherm auf das vierfache Volumen ausdehnt.
242. Eine zehnprozentige wäßrige Lösung von Methylalkohol (CH_3OH) hat bei der Temperatur $t = 20$ °C eine Dichte

$\varrho = 0{,}9815\ \mathrm{kg\,l^{-1}}$. Bestimmen Sie die Konzentration dieser Lösung in den Angaben: a) Molbruch; b) Molalität; c) Molarität.

243. Eine wäßrige Silbernitratlösung enthält bei einer Temperatur $t_0 = 100$ °C und einem Druck $p_0 = 760$ Torr $AgNO_3$ der Masse $m_1 = 110$ g und Wasser der Masse $m_2 = 100$ g. Bestimmen Sie die Konzentration dieser Lösung in den Angaben: a) Molalität; b) Massenprozente; c) Molbrüche.

244. Bestimmen Sie die Partialdrücke und den Gesamtdruck des Sattdampfes über einer Benzol-Chlorbenzol-Lösung bei einer Temperatur von 30 °C unter der Voraussetzung, daß diese Lösung als ideal angesehen werden kann. Der Molbruch des Benzols in der Lösung beträgt 0,25, die Spannung der Sattdämpfe des reinen Benzols hat bei der angegebenen Temperatur den Wert 118,2 Torr, die des Chlorbenzols dagegen 27,1 Torr.

245. Berechnen Sie die Spannung der Sattdämpfe über einer 5%igen wäßrigen Rohrzuckerlösung ($C_{12}H_{22}O_{11}$), wenn die Temperatur der Lösung 100 °C beträgt.

246. Berechnen Sie, wie hoch die Temperatur einer Lösung von 20 g Traubenzucker ($C_6H_{12}O_6$) in 2,2 l Wasser sein muß, damit ihr osmotischer Druck einen Wert von 912 Torr annimmt.

247. Berechnen Sie, welche Menge Natriumchlorid man bei einer Temperatur von 0 °C in Wasser lösen muß, damit die so mit einem Liter Wasser hergestellte Lösung einen osmotischen Druck von 1748,0 Torr aufweist. Wir setzen dabei voraus, daß das NaCl in der Lösung vollkommen dissoziiert ist.

248. Berechnen Sie die Werte der molalen Gefrierpunkterniedrigung E_g und der molalen Siedepunkterhöhung E_s von Wasser.

249. Bestimmen Sie, welche Menge an Glyzerin ($C_3H_8O_3$) in 100 g Wasser gegossen werden muß, damit das so gebildete Gemisch bei einer Temperatur von −2 °C erstarrt.

250. In einem Wasserbad von einem Liter Inhalt werden 100 Gramm Rohrzucker ($C_{12}H_{22}O_{11}$) gelöst. Berechnen Sie, bei welchen Temperaturen unter Normalbedingungen diese Lösung erstarren und sieden wird.

2.5. Wärmeleitung

Bei der Wärmeübertragung auf dem Wege der Wärmeleitung in einem Stab, dessen Temperatur in seiner Längsausdehnung gleichmäßig abnimmt, existiert ein stationärer Zustand. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß die Wärmemenge Q, die durch einen beliebig gelegten Querschnitt in der Zeit τ hindurchtritt, direkt proportional der Größe der Querschnittsfläche A, der Zeit τ, dem Temperaturunterschied der beiden Stabenden $t_1 - t_2$ und umgekehrt proportional zur Stablänge l ist. Es gilt

$$Q = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{l} \tau. \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor λ wird **Wärmeleitfähigkeit** des Stabes genannt. Wenn wir mit der Dichte des Wärmestroms i diejenige Wärmemenge bezeichnen, die in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Wärmeausbreitung gelegte Flächeneinheit

strömt, dann ist diese Dichte des Wärmestroms gemäß Gl. (1) in jedem beliebigen Stabquerschnitt durch die Beziehung

$$i = \frac{Q}{A\tau} = \lambda \frac{t_1 - t_2}{l}$$

gegeben.
Wenn wir die Stabachse mit der x-Achse identifizieren und festlegen, daß diese auch die Richtung der Temperaturabnahme ist, und wenn wir den Temperaturabfall in jedem infinitesimal kleinen Abschnitt des Stabes mit $-\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ bezeichnen, dann ist die Dichte des Wärmestroms in eben jenem Punkt durch folgende Beziehung gegeben:

$$i = \frac{Q}{A\tau} = -\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$$

Mit dieser Beziehung wird die Dichte des Wärmestroms auch in solchen isotropen Körpern richtig wiedergegeben, in denen die Temperatur ungleichmäßig abnimmt.
Die Wärmemenge, die bei einem stationären Wärmestrom radial durch den Mantel eines Hohlzylinders mit den Abmessungen Innenradius r_1 und Außenradius r_2 in der Zeit τ hindurchströmt, ist

$$Q = 2\pi l \lambda \tau \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

wobei l die Länge des Zylinders, $t_1 - t_2$ die Differenz der Randtemperaturen auf der Innen- bzw. Außenfläche des Hohlzylinders ist.
Betrachten wir den Durchtritt der Wärme durch eine Trennfläche, die einen festen Stoff von einer Flüssigkeit oder einem Gas trennt:
Wenn das Gas die Temperatur t und die Oberfläche eines festen Körpers die Temperatur t' aufweist, dann kann man für die Dichte des Wärmestroms, der auf die Wandung des Festkörpers auftrifft, folgende Beziehung aufstellen:

$$i = \alpha(t - t'),$$

worin α den sog. **Wärmeübergangskoeffizienten** bedeutet.

Wenn die Wärme durch eine Wand hindurchtritt, die zwei Gase von unterschiedlicher Temperatur voneinander trennt, dann gelten für die Dichte des auftretenden Wärmestroms gleichzeitig die Beziehungen

$$i = \alpha_1(t_1 - t_1') = \lambda \frac{t_1' - t_2'}{d} = \alpha_2(t_2' - t_2)$$

(t_1 bzw. t_2 die Temperaturen der beiden Gase, t_1' bzw. t_2' die Temperaturen an den Wandoberflächen, d Wanddicke, α_1 bzw. α_2 die zugehörigen Wärmeübergangskoeffizienten, λ die Wärmeleitfähigkeit der Trennwand).

B Beispiele

195. Wir halten das eine Ende eines Stahlstabes der Länge $l = 0{,}2$ m und der Querschnittsfläche $A = 3\ \text{cm}^2$ auf einer konstanten Temperatur $t_1 = 300\ °\text{C}$, während das andere Ende des Stabes in schmelzendes Eis getaucht wird. Es sei vorausgesetzt, daß keine Wärmeverluste an die Umgebung auftreten. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Menge an Eis, die während einer Versuchsdauer von $\tau = 10$ min geschmolzen wird.

Lösung

Im stationären Zustand tritt durch einen beliebigen Stabquerschnitt während der Zeit τ die Wärmemenge

$$Q = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{l} \tau.$$

Da keinerlei Wärmeverlust an die Umgebung auftreten soll, kann diese gesamte Wärmemenge für den Schmelzprozeß des Eises angesetzt werden. Wenn wir die Masse des in der Zeit τ schmelzenden Eises mit der Größe x und die Schmelzwärme des Eises mit der Größe s bezeichnen, dann ist die Beziehung

$$\lambda A \frac{t_1 - t_2}{l} \tau = xs$$

erfüllt, woraus sich ergibt

$$x = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{ls} \tau,$$

oder mit den gegebenen Werten ausgerechnet

$$x = 0{,}14\,\text{cal grd}^{-1}\,\text{cm}^{-1}\,\text{s}^{-1} \cdot 3\,\text{cm}^2 \frac{300\,\text{grd}}{79{,}7\,\text{cal g}^{-1} \cdot 20\,\text{cm}} \cdot 10 \cdot 60\,\text{s},$$

$$\underline{x = 47{,}4\,\text{g}.}$$

196. Ein Messingstab der Länge $l_1 = 15$ cm ist mit einem Stahlstab von gleichem Querschnitt und der Länge $l_2 = 8$ cm verbunden. Das freie Ende des Messingstabes wird auf einer konstanten Temperatur $t_1 = 150\ °\text{C}$ gehalten, das des Stahlstabes auf $t_2 = 20\ °\text{C}$. Wärmeverluste an die Umgebung sollen nicht eintreten. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Dichte des Wärmestroms im Stab sowie die Temperatur, die an der Berührungsfläche der beiden Metalle herrscht.

Lösung

Die Dichte des Wärmestroms, die die in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Wärmeausbreitungsrichtung gelegte Flächeneinheit hindurchtretende Wärmemenge darstellt, ist bei stationärem Wärmestrom in beiden Stäben die gleiche. Es ist also

$$i = \frac{Q}{A\tau} = \lambda_1 \frac{t_1 - t_1'}{l_1} = \lambda_2 \frac{t_1' - t_2}{l_2},$$

wobei t_1' die Temperatur an der Berührungsfläche der beiden Stäbe bedeutet. Daraus finden wir

$$t_1 - t_1' = \frac{il_1}{\lambda_1}\,; \quad t_1' - t_2 = \frac{il_2}{\lambda_2}\,. \tag{1}$$

Durch Addition beider Gleichungen erhalten wir

$$t_1 - t_2 = i\left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}\right),$$

woraus sich ergibt

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{l_1}{\lambda_1} + \dfrac{l_2}{\lambda_2}},$$

d. h.,

$$i = \frac{(150 - 20)\,\text{grd}}{\dfrac{15\,\text{cm}}{0{,}95\,\text{cal grd}^{-1}\,\text{cm}^{-1}\,\text{s}^{-1}} + \dfrac{8\,\text{cm}}{0{,}14\,\text{cal grd}^{-1}\text{cm}^{-1}\,\text{s}^{-1}}} = \underline{1{,}78\,\text{cal cm}^{-2}\,\text{s}^{-1}}.$$

Für die Temperatur t_1' an der Berührungsfläche der beiden Stäbe erhalten wir aus Gl. (1) nach Einsetzen folgenden Wert:

$$t_1' = t_1 - i\,\frac{l_1}{\lambda_1} = \underline{121{,}9\,°\text{C}}.$$

197. Zwei Metallplättchen, das eine aus Kupfer mit der Dicke $h_1 = 0{,}6$ cm und das andere aus Eisen mit der Dicke $h_2 = 0{,}4$ cm, werden fest aneinandergelegt. Berechnen Sie, welchen Wert die Wärmeleitfähigkeit einer homogenen Metallplatte der Dicke $h = 1{,}0$ cm annehmen muß, damit sie die gleiche Wärmemenge fortleitet wie die aus den beiden obengenannten Plättchen zusammengesetzte.

Lösung

Wenn t_1 und t_2 die Randtemperaturen der zusammengelegten Kupfer- und Eisenplättchen sind, und wenn λ_1 und λ_2 die zugehörigen spezifischen Wärmeleitfähigkeiten von Kupfer und Eisen darstellen, dann ist die Dichte des Wärmestroms in jedem be-

liebigen Querschnitt wie folgt definiert:

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2}}.$$

Eine homogene Platte, durch welche die beiden Plättchen ersetzt werden sollen, muß eine Wärmeleitfähigkeit haben, die bewirkt, daß in jedem beliebigen ihrer Querschnitte bei gleicher Temperaturdifferenz $t_1 - t_2$ der hindurchtretende Wärmestrom die gleiche Dichte wie im Fall der zusammengesetzten Plättchen annimmt. Deshalb ist

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\frac{h}{\lambda}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2}},$$

woraus sich ergibt

$$\lambda = h \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1},$$

d. h.,

$$\underline{\lambda = 0{,}285 \text{ cal cm}^{-1}\text{ s}^{-1}\text{ grd}^{-1}.}$$

198. Eine zylinderförmige Stahlrohrleitung ist mit einer wärmeisolierenden Asbestverkleidung von 3 cm ummantelt. Das Rohr hat einen Innendurchmesser $d_1 = 7{,}0$ cm und einen Außendurchmesser $d_2 = 7{,}6$ cm. An der Innenwand der Rohrleitung herrscht eine Temperatur $t_1 = 10$ °C, an der Außenfläche des Asbestmantels eine vom Betrag $t_2 = -10$ °C. Die Rohrleitung hat eine Länge von einem Meter. Berechnen Sie, welche Wärmemenge durch die Rohrleitung während einer Zeit $\tau = 24$ h an die Umgebung abgeführt wird. Um welchen Betrag würde sich unter sonst gleichen Bedingungen der Wärmeverlust ändern, wenn keine Wärmeisolation angebracht wäre?

Lösung

Bei radialem Wärmedurchgang durch eine einfache zylindrische Rohrleitung strömt während der Zeit τ durch eine zylindrische Fläche die Wärmemenge

$$Q = 2\pi\, l\lambda\tau \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{1}$$

(r_1 Innenradius, r_2 Außenradius der Rohrleitung, l ihre Länge, $t_1 - t_2$ Differenz der Randtemperaturen).

Wenn die zylindrische Rohrleitung aus mehreren Schichten besteht, dann tritt im stationären Zustand durch eine beliebig gelegene Zylinderfläche in der gleichen Zeit die gleiche Wärmemenge hindurch. Somit finden wir im Fall zweier Schichten:

$$Q = 2\pi l\lambda_1\tau \frac{t_1 - t_1'}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 2\pi l\lambda_2\tau \frac{t_1' - t_2}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \tag{2}$$

(t_1 und t_2 Randtemperaturen, t_1' Temperatur an der Berührungsfläche, r_3 äußerer Radius der zweiten Schicht).

Aus Gl. (2) erhalten wir nach Addition der Temperaturdifferenzen

$$t_1 - t_1' + t_1' - t_2 = \frac{Q}{2\pi l\tau}\left(\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2}\right).$$

Nach einer Umstellung erhalten wir für die Menge der abströmenden Wärme folgende Beziehung:

$$Q = 2\pi l\tau(t_1 - t_2)\frac{1}{\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{r_3}{r_2}}. \tag{3}$$

Die Auswertung mit den gegebenen Größen ergibt

$$Q = 2\pi\cdot 1\,\text{m}\cdot 24\,\text{h}\times$$

$$\times\frac{20\,\text{grd}}{\dfrac{1}{0{,}14\cdot 3600\cdot 10^2\,\dfrac{\text{cal}}{\text{m h grd}}}\,2{,}3\lg\dfrac{76}{70} + \dfrac{1}{0{,}18\cdot 10^3\,\dfrac{\text{cal}}{\text{m h grd}}}\,2{,}3\lg\dfrac{136}{76}} =$$

$$= \underline{931{,}8\text{ kcal.}}$$

Im Falle, daß keinerlei isolierende Rohrummantelung besteht, können wir die Menge der abströmenden Wärme gemäß Gl. (1) bestimmen:

$$Q_1 = 2\pi l\tau(t_1 - t_2)\frac{1}{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Daraus folgt

$$Q_1 = 1{,}85\cdot 10^6\text{ kcal}$$

und somit

$$\underline{Q_1 = Q\cdot 1{,}9\cdot 10^3.}$$

199. Zwischen zwei konzentrischen Hohlkugeln mit den Radien r_1 und r_2 ($r_2 > r_1$) befindet sich ein homogener Stoff mit der Wärmeleitfähigkeit λ, der sehr gut wärmeleitend sein soll. Bestimmen Sie in dieser Anordnung

a) die Wärmemenge, die während der Zeitspanne τ bei stationärem Wärmestrom durch eine beliebige, zu den beiden erstgenannten konzentrisch gelegene Kugelfläche hindurchtritt,

b) die Temperaturverteilung im Raum zwischen den beiden konzentrischen Kugelflächen.

Im Zustand der stationären Wärmeströmung sind die Temperaturen der inneren und der äußeren Kugel t_1 und t_2 ($t_2 > t_1$) als konstant anzusehen.

Lösung

a) Bei stationärem Wärmestrom fließt durch eine Kugelfläche mit dem Radius x während der Zeit τ die Wärmemenge

$$Q = -\lambda A\tau \frac{dt}{dx} = -\lambda 4\pi x^2 \tau \frac{dt}{dx},$$

die vom Radius der Kugelfläche unabhängig ist. Nach Umformung erhalten wir eine Differentialgleichung

$$Q \frac{dx}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \, dt. \tag{1}$$

Nach deren Integration in den Grenzen r_1 bis r_2 bzw. von t_1 bis t_2

$$Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \int_{t_1}^{t_2} dt$$

erhalten wir für die gesuchte Wärmemenge die folgende Beziehung:

$$Q = 4\pi\lambda\tau \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (t_1 - t_2). \tag{2}$$

b) Die Wegabhängigkeit der Temperatur im Raum zwischen den beiden Kugelflächen erhalten wir durch Integration der Gl. (1) in den Grenzen von r_1 bis x bzw. von t_1 bis t, d. h.,

$$Q \int_{r_1}^{x} \frac{dx}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \int_{t_1}^{t} dt,$$

woraus sich ergibt

$$Q = 4\pi\lambda\tau \frac{r_1 x}{x - r_1} (t_1 - t). \tag{3}$$

Im stationären Zustand ist die Wärmeströmung durch jede Kugelfläche gleich groß, deshalb erhalten wir durch Vergleich der Gln. (2) u. (3) den Zusammenhang

$$\frac{x}{x - r_1} (t_1 - t) = \frac{r_2}{r_2 - r_1} (t_1 - t_2).$$

Nach geringfügiger Umformung und Auflösung nach t ergibt sich hieraus

$$t = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{t_1 - t_2}{x} + \frac{r_2 t_2 - r_1 t_1}{r_2 - r_1}.$$

200. Unter einem Dampfkessel befindliche Rauchgase haben eine Temperatur $t_0 = 950$ °C, während das im Kessel befindliche Wasser eine Temperatur $t = 180$ °C hat. Berechnen Sie die Wärmemenge, die innerhalb einer Stunde durch einen Quadratmeter Kessel-

fläche dem Kesselwasser zugeführt wird, wenn die Kesselwandung $d_2 = 1{,}8$ cm dick ist und an ihrer Innenseite mit einer Kesselsteinschicht der Dicke $d_3 = 0{,}5$ cm und an ihrer Außenseite mit einer Ruß- und Ascheschicht der Dicke $d_1 = 0{,}45$ cm bedeckt ist. Die Kesselwandung selbst besteht aus Stahl. Bestimmen Sie die Temperatur der äußeren und der inneren Kesselwandung.

Lösung

Die Wärme tritt aus den Gasen mit der Temperatur t_0 allmählich durch die Ruß- und Ascheschicht, die eiserne Kesselwandung und den Kesselstein in das Wasser der Temperatur t über. Im stationären Zustand ist die Dichte des Wärmestroms für jede durchflossene Schicht gleich groß. Wenn wir die zugehörigen Temperaturen an den jeweiligen Berührungsflächen durch die Symbole t_1 (Asche – Gase), t_2 (Kesselwandung – Ruß), t_3 (Kesselstein – Kesselwandung) und t_4 (Wasser – Kesselstein) bezeichnen, dann können wir die Dichte des Wärmestroms wie folgt ausdrücken:

$i = \alpha_1(t_0 - t_1) = \cdots$ für den Übertritt der Wärme aus den Gasen in die Ascheschicht,

$i = \lambda_1 \dfrac{t_1 - t_2}{d_1} = \lambda_2 \dfrac{t_2 - t_3}{d_2} = \lambda_3 \dfrac{t_3 - t_4}{d_3} = \ldots$ für die einzelnen festen Schichten,

$i = \alpha_2(t_4 - t) = \cdots$ für den Übertritt der Wärme aus dem Kesselstein ins Wasser, wobei λ_i die entsprechenden Wärmeleitfähigkeiten und α_i die Wärmeübergangskoeffizienten bedeuten.

Wir können mit Hilfe dieser Gleichungen die Temperaturdifferenzen ausdrücken:

$$(1)\quad t_0 - t_1 = \frac{i}{\alpha_1}; \qquad (2)\quad t_1 - t_2 = i\frac{d_1}{\lambda_1}; \qquad (3)\quad t_2 - t_3 = i\frac{d_2}{\lambda_2};$$

$$(4)\quad t_3 - t_4 = i\frac{d_3}{\lambda_3}; \qquad (5)\quad t_4 - t = \frac{i}{\alpha_2}.$$

Wenn wir die Gln. (1) bis (5) addieren, erhalten wir

$$t_0 - t = i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}\right),$$

woraus sich ergibt

$$i = k(t_0 - t),$$

worin die Proportionalitätskonstante k, der Wärmeübergangskoeffizient für eine Wand, aus der Beziehung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}$$

bestimmt wird. Nach Einsetzen der Werte finden wir somit

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{15} + \frac{4{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}07} + \frac{18 \cdot 10^{-3}}{50} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{1}{4000}\right)\frac{1}{\text{kcal m}^{-2}\,\text{h}^{-1}\,\text{grd}^{-1}},$$

$$k = 7{,}46 \text{ kcal m}^{-2}\,\text{h}^{-1}\,\text{grd}^{-1}.$$

Damit ergibt sich die gesamte Wärmemenge, die dem Wasser während der Zeit τ durch die Kesselfläche A zugeführt wurde, zu

$$Q = A\tau k(t_0 - t);$$

$$Q = 1\ \mathrm{m}^2 \cdot 1\ \mathrm{h} \cdot 7{,}46\ \mathrm{kcal\ m^{-2}\ h^{-1}\ grd^{-1}}\ (950 - 180)\ \mathrm{grd} = 5744\ \mathrm{kcal}.$$

Die Temperatur der Außenwandung des Kessels bestimmen wir durch Addition der Gln. (1) u. (2), womit wir erhalten

$$t_0 - t_2 = i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1}\right).$$

Daraus entnehmen wir

$$t_2 = t_0 - i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1}\right) = \underline{197{,}5\ ^\circ\mathrm{C}}.$$

Schließlich erhalten wir aus Gl. (3) die Temperatur an der Innenwandung

$$t_3 = t_2 - i\frac{d_2}{\lambda_2} = \underline{195{,}4\ ^\circ\mathrm{C}}.$$

A Aufgaben

251. Ermitteln Sie, welche Wärmemenge innerhalb einer Stunde durch einen Quadratmeter Ziegelmauerfläche der Dicke $d = 0{,}5$ m hindurchströmt, wenn die Innentemperatur $t_1 = 18$ °C und die Außentemperatur $t_2 = -2$ °C beträgt. Wärmeverluste in die Umgebung sollen nicht auftreten.
252. Auf einem Kocher wird Wasser in einem Aluminiumgefäß erhitzt. Das Wasser im Gefäß siedet bei 100 °C. In jeder Minute bilden sich $m = 200$ g Dampf. Der Gefäßboden hat die Dicke $h = 0{,}2$ cm und die Fläche $A = 200\ \mathrm{cm}^2$. Berechnen Sie die Temperatur an der unteren Grenze des Gefäßbodens, wenn vorausgesetzt wird, daß sich der gesamte Gefäßboden gleichmäßig erhitzt und daß Wärmeverluste an den Gefäßwänden und an die Umgebung vernachlässigt werden.
253. Berechnen Sie die Wärmemenge, die durch Wärmeleitung stündlich von einer Ziegelmauer mit der Dicke $d = 0{,}43$ m und den Seiten 6,5 m · 3,2 m abgeführt wird, die beiderseitig mit einer 1 cm dicken Putzschicht bedeckt ist. An der Außenseite beträgt die Temperatur $t = -5$ °C, an der Innenseite $t_0 = 20$ °C. Um welchen Betrag ändert sich die abfließende Wärmemenge, wenn die Mauer an ihrer Innenseite noch mit einer Heraklitschicht der Dicke $d_2 = 5$ cm verkleidet wird?
254. Berechnen Sie, wie groß die Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenfläche eines kupfernen Hohlzylinders sein muß, wenn bei stationärer Wärmeströmung in jeder Minute durch eine Fläche von 1500 cm² 200 kcal hindurchtreten. Die Radien des Hohlzylinders sind $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm.
255. Eine 12 cm dicke Ziegelmauer ist beiderseits mit einer 1,5 cm dicken Putzschicht bedeckt. Die Mauer soll durch eine zusätzlich anzubringende Heraklitplatte wärmeisoliert werden, so daß ihr Wärmedämmvermögen dem einer 38 cm

dicken, beiderseits mit 1,5 cm Putz versehenen Ziegelmauer entspricht. Wie dick muß die zusätzlich anzubringende Heraklitschicht sein?

256. Berechnen Sie die Wärmemenge, die in einer Stunde durch eine nicht verputzte, 30 cm dicke Ziegelmauer von 16,5 m^2 Flächeninhalt strömt, wenn die Innentemperatur $t_1 = 22$ °C und die Außentemperatur $t_2 = -12$ °C ist. Die Wärmeübergangskoeffizienten sind: $\alpha_1 = 7$ kcal m^{-2} h^{-1} grd^{-1} an der Innenfläche und – mit Berücksichtigung des Einflusses der kalten Luftströmung – $\alpha_2 = 20$ kcal m^{-2} h^{-1} grd^{-1} an der Außenfläche der Mauer.

257. In einem dickwandigen, abgeschlossenen Gefäß aus Metall befindet sich bei einer Temperatur t_1 eine Flüssigkeit. Die Temperatur der das Gefäß umgebenden Außenluft beträgt t_2. Berechnen Sie die Temperatur t' an der Außenwandung des Gefäßes, wenn die Wärmeleitfähigkeit des Gefäßmaterials mit λ und die Wärmeübergangszahl für die Trennfläche Metall – Luft mit α angegeben wird. Für die innere Trennfläche Flüssigkeit – Metall sei sie als unendlich groß angenommen. Die Gefäßwandung habe die Dicke d.

3. Elektrische und magnetische Vorgänge

3.1. Elektrostatik

Gemäß dem **Coulombschen Gesetz** wirkt eine Punktladung Q_1 auf eine Punktladung Q_2 mit der Kraft

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}_{1,2};$$

$\vec{r}_{1,2}$ ist der Ortsvektor der Ladung Q_2 bezüglich Q_1, r der Abstand zwischen beiden Ladungen und ε die **Dielektrizitätskonstante** des Mittels, in dem sich die Ladungen befinden. Man kann ε in der Form $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ausdrücken, wobei $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}m^{-1}}$ als **elektrische Feldkonstante** (bisher auch Influenzkonstante genannt) und ε_r als **Dielektrizitätszahl** bezeichnet wird. Für das Vakuum gilt $\varepsilon_r = 1$.
Unter der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ in einem beliebigem Punkt des Feldes verstehen wir den Quotienten der Kraft $\vec{F}$, die im gegebenen Punkt auf irgendeine Ladung Q' wirkt, und der Ladung selbst. In der Umgebung einer Punktladung ist

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^3} \vec{r};$$

$\vec{r}$ ist der Ortsvektor des Punktes, in dem die Feldstärke in bezug auf den Punkt herrscht, der die Ladung enthält. In der Umgebung einer größeren Zahl von Punktladungen $Q_1, Q_2, \ldots$ herrscht eine Feldstärke, die wir nach der Beziehung

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \sum \frac{Q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

berechnen, d. h. als die Vektorsumme der elektrostatischen Feldstärken, die im gegebenen Punkt die einzelnen Ladungen jeweils selbst für sich erzeugen würden.

Im Falle, daß die Ladung innerhalb eines bestimmten Volumens kontinuierlich verteilt ist, kann die Stärke des elektrostatischen Feldes in der Umgebung durch

$$\vec{E} = \int \frac{\varrho \, \mathrm{d}\tau}{4 \, \pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^3} \vec{r}$$

angegeben werden, in der ϱ die Volumendichte der Ladung, $\mathrm{d}\tau$ das Volumenelement und $\vec{r}$ den Ortsvektor desjenigen Punktes bedeutet, in dem $\vec{E}$, bezogen auf das betrachtete Volumenelement, gemessen werden soll. Dabei erfaßt die Integration das gesamte Volumen, in dem sich die elektrische Ladung befindet.
Wenn die elektrische Ladung auf der Oberfläche eines leitenden Körpers mit einer Flächendichte σ verteilt ist, dann ist die Stärke des von dieser Ladung erzeugten elektrischen Feldes durch

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \, \pi \varepsilon} \int \frac{\sigma \, \mathrm{d}A}{r^3} \vec{r}$$

gegeben, in der $\mathrm{d}A$ das Flächenelement der Leiteroberfläche und $\vec{r}$ der Ortsvektor des Punktes, in dem die Feldstärke $\vec{E}$ herrscht, bezüglich des Flächenelements $\mathrm{d}A$ ist.
Die **Arbeit**, welche die Kräfte des elektrischen Feldes verrichten, wenn in ihm eine Ladung Q' von einem Punkt 1 zu einem anderen Punkt 2 verschoben wird, ist durch die Beziehung

$$W = W_1 - W_2$$

angegeben, in der W_1 bzw. W_2 die **potentielle Energie** der Ladung Q' in den Punkten 1 bzw. 2 darstellt. Im Falle, daß es sich um die Verschiebung einer Ladung Q' handelt, die in einem Feld erfolgt, das von einer Punktladung Q herrührt, ist

$$W = W_1 - W_2 = \frac{QQ'}{4 \, \pi \varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

r_1 und r_2 kennzeichnen den Anfangs- bzw. Endpunkt der von der Ladung Q' zurückgelegten Wegstrecke, bezogen auf den Ort der Ladung Q.
Die potentielle Energie einer Ladung Q' im elektrischen Feld einer Ladung Q wird auf unendliche Entfernung bezogen und beträgt

$$W = \frac{1}{4 \, \pi \varepsilon} \frac{QQ'}{r},$$

(r Abstand zwischen den Ladungen Q und Q').
In einem bestimmten Punkt des Feldes ist das **Potential** des elektrostatischen Feldes durch den Quotienten aus der potentiellen Energie einer Versuchsladung und dieser

Ladung Q' selbst definiert, d. h.,

$$U = \frac{W}{Q'}.$$

Wenn es sich um das elektrostatische Potential einer Punktladung Q handelt und wenn potentielle Energie und also auch das Potential selbst auf Unendlich bezogen wird (sog. *absolutes Potential*), dann kann auch geschrieben werden

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r},$$

(r Abstand des Punktes, in dem das Potential bestimmt wird, von der Ladung Q).
Wenn das elektrostatische Feld durch eine größere Anzahl von Ladungen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ erzeugt wird, so gilt für das absolute Potential in einem bestimmten Punkt des Feldes:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum\frac{Q_i}{r_i}$$

(r_i Abstand des Punktes, in dem das Potential bestimmt wird, von der Ladung Q_i).
Wenn die die Quelle des elektrostatischen Feldes bildende Ladung in einem bestimmten Volumen mit der Volumendichte ϱ bzw. auf einer bestimmten Oberfläche mit der Flächendichte σ kontinuierlich verteilt ist, können wir für das absolute Potential in einem bestimmten Punkt des elektrostatischen Feldes schreiben

$$U = \int\frac{\varrho\,\mathrm{d}\tau}{4\pi\varepsilon r}$$

bzw.

$$U = \int\frac{\sigma\,\mathrm{d}A}{4\pi\varepsilon r}.$$

Die Gesamtheit aller Punkte, die im elektrischen Feld durch das gleiche Potential ausgezeichnet sind, liegt auf einer Fläche, die wir als **Äquipotentialfläche** bezeichnen.
Für den Zusammenhang zwischen Potential und Feldstärke gilt im elektrostatischen Feld die Beziehung

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Da weiterhin

$$\mathrm{d}U = \operatorname{grad} U\,\mathrm{d}\vec{r} = -E\,\mathrm{d}\vec{r}$$

ist, kann man das Potential in einem Punkt des Feldes mit dem Ortsvektor $\vec{r}$, in dem die Feldstärke den Wert $\vec{E}$ hat, in bezug auf einen Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}_0$ gemäß

folgender Beziehung ausdrücken:

$$U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{r}.$$

Unter dem elektrischen **Kraftfluß** Ψ eines elektrostatischen Feldes der Stärke $\vec{E}$ durch eine in sich geschlossene Fläche der Größe A verstehen wir den Ansatz

$$\Psi = \int \vec{E}\, d\vec{A},$$

wobei $d\vec{A}$ den Normalenvektor des zugehörigen Flächenelements dA bedeutet. Gemäß dem **Lehrsatz von Gauß-Ostrogradski** ist der Kraftfluß Ψ eines elektrostatichen Feldes durch eine geschlossene Fläche gleich dem Quotienten aus der im Innern der Fläche enthaltenen Elektrizitätsmenge Q und der Dielektrizitätskonstante ε des Mediums, in dem das Feld erzeugt wurde, d. h.,

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Die Stärke eines elektrostatischen Feldes in der Nähe der Oberfläche eines Leiters können wir gemäß dem **Coulombschen Gesetz** als Quotient aus der Flächendichte σ der Ladung im gegebenen Punkt der Leiteroberfläche und der Dielektrizitätskonstante ε des den Leiter umgebenden Mediums bestimmen zu

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Die Gültigkeit des COULOMBschen Gesetzes kann man mit Hilfe des Lehrsatzes von GAUSS-OSTROGRADSKI nachweisen. Mit seiner Hilfe läßt sich weiterhin zeigen, daß das elektrostatische Feld in der Umgebung einer Ladung, die das Volumen einer Kugel homogen ausfüllt, genau das gleiche ist wie in der Umgebung einer elektrischen Punktladung gleicher Stärke, die in ihrem Mittelpunkt liegt. Analog verhält es sich mit dem elektrostatischen Feld in der Umgebung eines Kugelleiters, dessen Ladung sich gleichmäßig über seine Oberfläche verteilt.

Die **Verschiebungsdichte** $\vec{D}$ hängt mit der Stärke des elektrostatischen Feldes $\vec{E}$ durch die Beziehung

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = (\varepsilon_0 + \varkappa)\,\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

zusammen, in der $\varkappa$ die **elektrische Suszeptibilität** bedeutet.

Unter der **elektrischen Kapazität** C eines einzelnen Leiters verstehen wir den Quotienten

aus der Gesamtladung Q und dem Potential U des Leiters, also

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Die **Kapazität eines Kondensators** wird durch die Beziehung

$$C = \frac{Q}{U}$$

definiert, worin Q die Ladung auf einer Elektrode des Kondensators und U das Potential dieser Elektrode bezüglich der anderen Elektrode des Kondensators darstellt. Bei der *Parallelschaltung* von Kondensatoren der Kapazitäten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ finden wir die resultierende Kapazität C als Summe der Kapazitäten, d. h.,

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Für die resultierende Kapazität C einer Batterie *in Serie* geschalteter Kondensatoren gilt die Beziehung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i},$$

d. h.,

$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}.$$

Die **Energie eines elektrischen Feldes,** das durch einen geladenen Leiter erzeugt wird oder das sich zwischen den Elektroden eines Kondensators befindet, ist gegeben durch

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

(C absolute Kapazität des Leiters bzw. Kondensators, U das absolute Potential des Leiters bzw. das Potential einer Kondensatorplatte bezüglich einer anderen).

Unter der **Energiedichte** in einem elektrostatischen Feld verstehen wir die Energie, die auf eine Volumeneinheit des Mediums, in dem das Feld besteht, entfällt. Für einen aus zwei Platten der Größe A bestehenden Plattenkondensator, dessen Platten voneinander den Abstand d haben, gilt

$$\varrho_e = \frac{W}{Ad} = \frac{\varepsilon E^2}{2}.$$

Es läßt sich nachweisen, daß dieser Ausdruck für die Dichte der elektrostatischen Feldenergie nicht nur für das homogene Feld, sondern auch für jedes andere inhomogene Feld gilt.

B Beispiele

201. Zwei gleich große Kügelchen tragen die elektrischen Ladungen $Q_1 = 24 \cdot 10^{-6}$ C und $Q_2 = -18 \cdot 10^{-6}$ C.
a) Mit welcher Kraft ziehen sich die beiden Kugeln bei 6 cm Abstand im Vakuum an?
b) Mit welcher Kraft würden sie sich bei gleichem Abstand abstoßen, wenn sie vorher miteinander in Berührung gebracht worden wären?

Lösung

a) Entsprechend dem COULOMBschen Gesetz können wir schreiben

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{24 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot 18 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As V}^{-1}\,\text{m}^{-1}\,0{,}06^2\,\text{m}^2} =$$

$$= \frac{2{,}4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^5}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 3{,}6}\,\text{VAs m}^{-1} = \underline{1{,}078 \cdot 10^3\,\text{N}}.$$

b) Bei der Berührung würden sich die beiden Ladungen ausgleichen, so daß die auf beide Kugeln entfallende Gesamtladung sich zu

$$Q_{1,2} = 24 \cdot 10^{-6}\,\text{C} - 18 \cdot 10^{-6}\,\text{C} = 6 \cdot 10^{-6}\,\text{C}$$

ergibt. Nach vollzogener Trennung wird nunmehr jede die gleiche Ladung haben, nämlich

$$Q_1 = Q_2 = +3 \cdot 10^{-6}\,\text{C}.$$

Demzufolge beträgt die Kraft, mit der sich beide Kugeln im Abstand $r = 6$ cm abstoßen,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As V}^{-1}\,\text{m}^{-1}\,0{,}06^2\,\text{m}^2} = \underline{22{,}46\,\text{N}}.$$

202. Zwei positive Ladungen der Größe Q und $4Q$ wurden im Abstand l fest angeordnet. Auf der Verbindungslinie beider Ladungen soll eine dritte Ladung Q' so angeordnet werden, daß auf sie keine Kräfte ausgeübt werden. An welcher Stelle zwischen Q und $4Q$ muß ihr Ort sein?

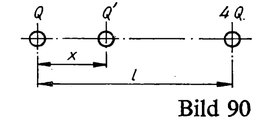


Bild 90

Lösung

Die im Beispiel angegebene Bedingung wird erfüllt, wenn die Kräfte, mit denen die beiden Ladungen Q und $4Q$ auf die Ladung Q' einwirken, von gleicher Größe und ent-

gegengesetzter Richtung sind. Gemäß Bild 90 können wir schreiben

$$\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon x^2} = \frac{Q' 4Q}{4\pi\varepsilon (l - x)^2},$$

d. h.,

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(l - x)^2}.$$

Nach einer Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 2lx - l^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-2l \pm \sqrt{4l^2 + 12l^2}}{6} = \begin{cases} \frac{l}{3} \\ -l \end{cases}.$$

Da uns der zwischen beiden Ladungen liegende Punkt interessiert, verwenden wir die Lösung $\underline{x_1 = l/3}$. Somit befindet sich der Punkt, in dem auf die Ladung Q' keine Kräfte ausgeübt werden, in $^1/_3$ des Abstands beider Ladungen, gemessen von der kleineren Ladung aus.

203. Zwei Kugeln mit gleichen elektrischen Ladungen und je $5 \cdot 10^{-4}$ kp Gewicht werden im Vakuum an einem Punkt mit zwei Fäden von je 1 m Länge befestigt. Durch gegenseitige Abstoßung entfernen sie sich voneinander auf einen Abstand $r = 4$ cm. Wie groß sind ihre Ladungen?

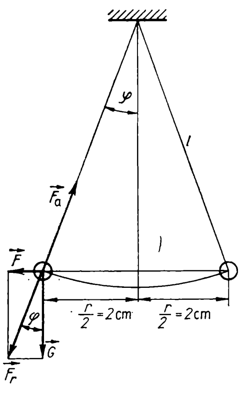


Bild 91

Lösung

Für eine in der Ruhelage befindliche Kugel hat die Resultierende $\vec{F}_r$ aus der elektrischen Kraft $\vec{F}$ und dem Gewicht der Kugel $\vec{G}$ die Richtung der Aufhängung. Die resultierende Kraft wird durch die Gegenwirkung der Aufhängung $\vec{F}_a$ kompensiert. Aus Bild 91 finden wir

$$\tan\varphi = \frac{F}{G}.$$

Gleichzeitig können wir bei nur kleinem Winkel φ schreiben

$$\tan\varphi \approx \sin\varphi = \frac{\frac{r}{2}}{l} = \frac{r}{2l}$$

und somit

$$\frac{F}{G} = \frac{r}{2l}.$$

Entsprechend dem COULOMBschen Gesetz ist die Kraft F definiert zu

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{QQ}{r^2},$$

und so ergibt sich

$$\frac{1}{G} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = \frac{r}{2l}.$$

Damit erhalten wir für die Ladung einer Kugel

$$Q = \sqrt{\frac{r^3}{2l} 4\pi\varepsilon_0 G} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}04^3\ \mathrm{m}^3}{2 \cdot 1\ \mathrm{m}} 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{As\ V^{-1}\ m^{-1}} \cdot 0{,}5 \cdot 981 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}} =$$

$$= \underline{4{,}177 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}.$$

204. Vier freie, gleich große, positive Punktladungen e befinden sich an den Eckpunkten eines Quadrats mit der Seitenlänge a (Bild 92). Welche Ladung müßte im Mittelpunkt des Quadrats angeordnet werden, damit das System aller Ladungen im Gleichgewicht ist?

Lösung

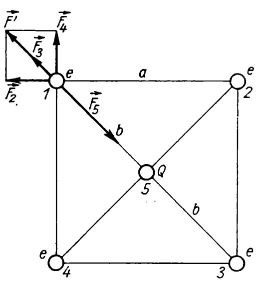


Bild 92

Die Gesamtdarstellung des Falles sehen wir in Bild 92. Auf eine Ladung e im Punkt *1* wirken die Ladungen der Punkte *2*, *3* und *4* mit den Kräften $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ und $\vec{F}_4$. Die resultierende Kraft $\vec{F}$, mit der diese drei Ladungen auf die eine Ladung im Punkt *1* wirken, ist durch die Vektorsumme der drei angegebenen Kräfte bestimmt. Die im Zentrum des Quadrats, im Punkt *5* anzuordnende Ladung soll so beschaffen sein, daß durch sie das gesamte System der Ladungen im Gleichgewicht ist. Sie muß also gegenüber den Ladungen in den Punkten *1* bis *4* entgegengesetztes Vorzeichen haben. Sie muß weiter groß genug sein, damit die Kraft $\vec{F}_5$, mit der sie auf die Ladung im Punkt *1* einwirkt, von gleicher Größe – jedoch bei umgekehrtem Vorzeichen – ist wie die Resultierende $\vec{F}$. Wir können also schreiben

$$|\vec{F}_5| = |\vec{F}|.$$

Bei Benutzung der in Bild 92 vorgenommenen Bezeichnungen können wir die vorstehende Gleichung auf die Form bringen

$$F' + F_3 = F_5, \tag{1}$$

wobei $F' = \sqrt{F_2^2 + F_4^2}$ die Resultierende der Kräfte F_2 und F_4 bedeutet. Gemäß dem COULOMBschen Gesetz ist

$$F_2 = F_4 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon a^2},$$

$$F' = \sqrt{F_2^2 + F_4^2} = \frac{e^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a^2}.$$

Weiterhin können wir nach dem COULOMBschen Gesetz schreiben

$$F_3 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon a^2}; \quad F_5 = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{eQ}{2\pi\varepsilon a^2}.$$

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in Gl. (1) erhalten wir

$$\frac{e^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a^2} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon a^2} = \frac{eQ}{2\pi\varepsilon a^2},$$

woraus für den absoluten Wert der Ladung Q, die, wie bereits erläutert, umgekehrtes Vorzeichen gegenüber den Ladungen e_{1-4} haben muß, folgt:

$$\underline{Q = \frac{e}{4}\left(1 + 2\sqrt{2}\right).}$$

Die gleiche Erwägung gilt natürlich für jede andere Ladung der Größe e in den Eckpunkten des vorgegebenen Quadrats.

205. Wie groß ist die elektrische Feldstärke in einem Punkt (Bild 93), der mitten zwischen zwei elektrischen Ladungen $Q_1 = +50\,\mu C$ und $Q_2 = +70\,\mu C$ liegt, die voneinander einen Abstand $r = 0{,}2$ m haben? Die Ladungen befinden sich vollständig in Petroleum mit der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 2$.

Lösung

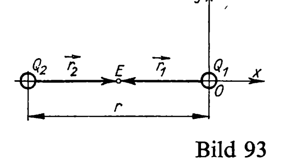


Bild 93

Die resultierende Feldstärke $\vec{E}$ in der Mitte zwischen beiden Ladungen ist gleich der Summe der beiden Feldstärken $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$, mit der die beiden Ladungen am gegebenen Ort wirken. Es ist also

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

d. h.,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi 2\varepsilon_0}\,\frac{Q_1}{r_1^3}\,\vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi 2\varepsilon_0}\,\frac{Q_2}{r_2^3}\,\vec{r}_2,$$

wobei $r_1 = r_2 = \frac{r}{2} = 0{,}1$ m und $\vec{r}_1 = -r_1\vec{\imath}$, $\vec{r}_2 = r_2\vec{\imath}$ ist, wenn $\vec{\imath}$ den Einheitsvektor in Richtung der x-Achse darstellt. Damit wird es möglich, zu schreiben

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi 2\varepsilon_0}\left(-\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2}\right)\vec{\imath},$$

woraus für den absoluten Betrag der Feldstärke folgt

$$E = \frac{1}{4\pi 2\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{r_2^2} - \frac{Q_1}{r_1^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As}\,\text{V}^{-1}\,\text{m}^{-1}}\left(\frac{70 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{0{,}1^2\,\text{m}^2} - \frac{50 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{0{,}1^2\,\text{m}^2}\right) =$$

$$= \frac{20 \cdot 10^{-6}}{8\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}\,\text{V}\,\text{m}^{-1} = \underline{8{,}983 \cdot 10^6\,\text{V}\,\text{m}^{-1}}\,.$$

Die Feldstärke hat die Richtung des Einheitsvektors $\vec{i}$.

206. Bestimmen Sie in einem im Vakuum gelegenen Punkt A die Stärke eines elektrostatischen Feldes, das durch die beiden elektrischen Punktladungen $Q_1 = -4 \cdot 10^{-7}$ C und $Q_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ C erzeugt wird (Bild 94); $r_1 = 0{,}4$ m, $r_2 = 0{,}3$ m, $r = 0{,}5$ m.

Lösung

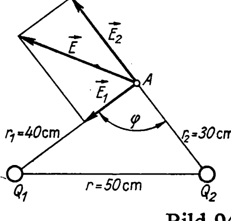


Bild 94

Für die Gesamtstärke des elektrostatischen Feldes im Punkt A können wir schreiben

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Hierbei sind $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ die Beiträge der beiden Ladungen zur Gesamtfeldstärke. Nach Bild 94 können wir für den absoluten Betrag der Gesamtfeldstärke schreiben

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos(180 - \varphi)}.$$

Da es möglich ist, den eingeschlossenen Winkel φ aus der Beziehung

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\varphi$$

zu bestimmen, finden wir

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2} = \frac{40^2 + 30^2 - 50^2}{2 \cdot 40 \cdot 30} = 0,$$

woraus sich der Winkel zu $\varphi = 90°$ ergibt. Es ist demnach

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}.$$

Der Feldanteil E_1 läßt sich errechnen zu

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As}\,\text{V}^{-1}\,\text{m}^{-1}}\,\frac{4 \cdot 10^{-7}\,\text{C}}{0{,}4^2\,\text{m}^2} = 22457\,\text{V}\,\text{m}^{-1},$$

desgleichen der Anteil E_2 zu

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_2}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As}\,\text{V}^{-1}\,\text{m}^{-1}}\,\frac{5 \cdot 10^{-7}\,\text{C}}{0{,}3^2\,\text{m}^2} = 49905\,\text{V}\,\text{m}^{-1}.$$

Daraus ergibt sich E zu

$$E = \sqrt{22457^2 + 49905^2}\ \mathrm{V\,m^{-1}} = \underline{54725\ \mathrm{V\,m^{-1}}}.$$

207. Berechnen Sie Potential und Stärke des elektrostatischen Feldes einer kreisförmigen Leiterplatte vom Radius $r = 0{,}1$ m in einem nach Bild 95 zu messenden Abstand $r_1 = 0{,}2$ m für den Fall, daß die Platte eine Ladung der Stärke $Q = 1\ \mu$C aufweist und daß sie sich im Vakuum befindet.

Lösung

Da es sich hier um das Feld einer elektrischen Ladung handelt, die gleichförmig auf der Oberfläche eines Leiters verteilt ist, können wir das Potential gemäß dem Ansatz

$$U = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma\,\mathrm{d}A}{r_2}$$

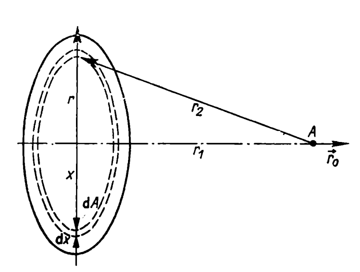


Bild 95

berechnen. Dabei bedeutet σ die Flächendichte der Ladung, für die im vorliegenden Fall gilt

$$\sigma = \frac{Q}{\pi r^2}.$$

Das Flächenelement dA stellt hier einen Kreisring der Breite dx dar, so daß $\mathrm{d}A = 2\pi x\,\mathrm{d}x$ ist. Für das im Punkt A zu messende Potential können wir also schreiben

$$U = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{Q}{\pi r^2} 2\pi x\,\mathrm{d}x}{r_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \int\limits_0^r \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r_1^2 + x^2}} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \left[\sqrt{r_1^2 + x^2}\right]_0^r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \left(\sqrt{r_1^2 + r^2} - r_1\right).$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$U = \frac{10^{-6}\ \mathrm{C}}{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}} \cdot 0{,}1^2\ \mathrm{m^2}} \left(\sqrt{0{,}2^2\ \mathrm{m^2} + 0{,}1^2\ \mathrm{m^2}} - 0{,}2\ \mathrm{m}\right)$$

$$\underline{U = 4{,}252 \cdot 10^4\ \mathrm{V}.}$$

Die Feldstärke bestimmen wir mit Hilfe der Beziehung

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Da die Feldstärke im Punkt A nur eine Funktion der Veränderlichen r_1 darstellt, können wir auch schreiben

$$\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial r_1}\vec{r}_0,$$

wobei $\vec{r}_0$ den Einheitsvektor in der in Bild 95 dargestellten Richtung bedeutet. Es wird demnach

$$\vec{E} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2\,r_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}} - 1\right)\vec{r}_0,$$

d. h.,

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{r_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}}\right)\vec{r}_0,$$

$$\vec{E} = \frac{10^{-6}\,\mathrm{C}}{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}\,0{,}1^2\,\mathrm{m}^2}\left(1 - \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{\sqrt{0{,}1^2\,\mathrm{m}^2 + 0{,}2^2\,\mathrm{m}^2}}\right)\vec{r}_0,$$

$$\underline{\vec{E} = 1{,}897 \cdot 10^5\,\vec{r}_0\,\mathrm{V\,m^{-1}}}.$$

208. Bestimmen Sie das Potential und die Feldstärke in der Umgebung eines kugelförmigen, positiv geladenen Leiters, dessen Radius die Größe r' und dessen Ladung die Flächendichte σ hat.

Lösung

Mit Hilfe des Lehrsatzes von GAUSS-OSTROGRADSKI kann man nachweisen, daß Feldstärke und Potential in der Umgebung der geladenen Kugel als Feldstärke und Potential einer in ihrem Mittelpunkt gelegenen Punktladung verstanden werden können. Deshalb ist für den Fall

a) $\quad r > r' \qquad U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma A}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma 4\pi r'^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \underline{\frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r}},$

wobei A die Kugeloberfläche und σ die Flächendichte der darauf befindlichen Ladung bedeutet.

Für die Feldstärke gilt die Beziehung

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\vec{\varrho},$$

wobei $\vec{\varrho} = \frac{\vec{r}}{r}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}$ ist. Dann gilt

$$\vec{E} = \frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r^2}\,\vec{\varrho} = \underline{\frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r^3}\,\vec{r}}.$$

b) Im Falle $r < r'$ ist das Potential im Innern des kugelförmigen Leiters das gleiche wie auf seiner Oberfläche, also für $r = r'$. Daraus ergibt sich

$$U = \frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma r'^2}{\varepsilon_0 r'} = \underline{\frac{\sigma r'}{\varepsilon_0}}.$$

Da das Potential im Kugelinnern überall gleich ist, d. h. $U = \mathrm{const}$, wird die elektrostatische Feldstärke in ihrem Innern überall den Wert $\underline{\vec{E} = -\operatorname{grad} U = 0}$ haben.

209. Eine elektrisch leitfähige Seifenblase vom Radius $r = 2$ cm ist auf ein Potential von $U = 10000$ V aufgeladen. Durch Zerplatzen bildet sie sich in einen Wassertropfen mit dem Radius $r_1 = 0{,}05$ cm um. Wie groß ist das elektrische Potential U_1 dieses Tropfens?

Lösung

Vor dem Zerplatzen hatte das Potential der Seifenblase den Wert

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Auf der Oberfläche befindet sich also die Ladung

$$Q = 4\pi\, U r \varepsilon_0.$$

Das Potential der nach dem Zerplatzen entstandenen kleinen Kugel ergibt sich dann zu

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_1} = \frac{Ur \cdot 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = U \frac{r}{r_1} = 10\,000\text{ V} \frac{0{,}02\text{ m}}{0{,}0005\text{ m}} = \underline{4 \cdot 10^5\text{ V}}.$$

210. Zwei Punktladungen $Q_1 = -3\ \mu$C und $Q_2 = +2\ \mu$C haben voneinander den Abstand $d = 5$ cm. Es ist diejenige Äquipotentialfläche des resultierenden Feldes zu bestimmen, auf der überall das Potential Null herrscht.

Lösung

Nach den in Bild 96 gewählten Bezeichnungen kann man das Potential im Punkt M wie folgt beschreiben:

$$U = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(d - x)^2 + y^2}}.$$

Wenn M auf der gesuchten Äquipotentialfläche liegen soll, dann muß dort $U = 0$ sein:

$$U = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(d - x)^2 + y^2}} = 0.$$

Nach Umformung erhalten wir daraus die Beziehung

$$(Q_1^2 - Q_2^2)\, x^2 + (Q_1^2 - Q_2^2)\, y^2 - 2Q_1^2 xd + Q_1^2 d^2 = 0. \tag{1}$$

Das ist die Gleichung einer Äquipotentialkurve des Potentials Null, die in derselben Ebene liegt, in der sich auch die beiden Ladungen Q_1 und Q_2 befinden. Es ist offenbar eine Kreislinie, deren Mittelpunkt auf der x-Achse, d. h. auf der Verbindungsgeraden der beiden Ladungen liegt. Um den Radius dieses Kreisbogens zu bestimmen, suchen wir den Punkt, in dem der Kreisbogen die x-Achse schneidet. Für $y = 0$ wird aus Gl. (1):

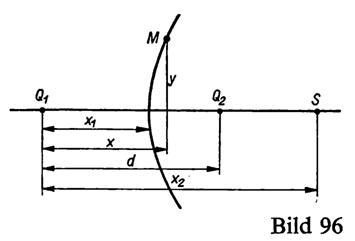


Bild 96

$$(Q_1^2 - Q_2^2)x^2 - 2Q_1^2xd + Q_1^2d^2 = 0,$$

d. h.,

$$x_1 = \frac{Q_1 d}{Q_1 - Q_2} = \frac{-3 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{-5 \cdot 10^{-6}\,\text{C}} = 3 \cdot 10^{-2}\,\text{m} = 3\,\text{cm};$$

$$x_2 = \frac{Q_1 d}{Q_1 + Q_2} = \frac{-3 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{-1 \cdot 10^{-6}\,\text{C}} = 15 \cdot 10^{-2}\,\text{m} = 15\,\text{cm}.$$

Der gesuchte Kreisradius ergibt sich dann zu

$$r = \frac{x_2 - x_1}{2} = \underline{6\,\text{cm}.}$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises befindet sich im Abstand $x_0 = x_1 + r = 9$ cm von der Ladung Q_1 entfernt. Als die gesuchte Äquipotentialfläche ergibt sich die Kugel, die durch Rotation der angegebenen Kreislinie um die x-Achse entsteht.

211. In einem elektrischen Feld besteht im Punkt A ein Potential der Größe $U_A = 300$ V, im Punkt B ein solches der Größe $U_B = 1200$ V. Welcher Arbeitsbetrag muß aufgebracht werden, um eine positive Ladung der Größe $Q = 3 \cdot 10^{-8}$ C vom Punkt A zum Punkt B zu transportieren?

Lösung

Die aufzubringende Arbeit wird dem Zuwachs an potentieller Energie gleich sein. Wir können also schreiben

$$W = W_B - W_A = QU_B - QU_A = Q(U_B - U_A) = (1200 - 300)\,\text{V} \cdot 3 \cdot 10^{-8}\text{C} = \underline{= 27 \cdot 10^{-6}\,\text{J}.}$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir den Ansatz $W = QU$ verwendet, der sich aus der Definition des Potentials ergibt.

212. Es ist die auf eine Punktladung Q wirkende Kraft zu ermitteln, die auftritt, wenn sich die Punktladung im Feld einer elektrisch geladenen, unendlich großen Metallplatte mit der Flächendichte σ befindet für den Fall, daß die Platte von einem Vakuum umgeben ist.

Lösung

Unter Benutzung der Definition der elektrostatischen Feldstärke können wir für die gesuchte Kraft schreiben

$$\vec{F} = \vec{E}Q.$$

Unter der gegebenen Voraussetzung, daß es sich um eine unendlich große, elektrisch geladene Platte handelt, wird das Feld über der Platte homogen sein. Wir können in diesem Fall die Feldstärke ermitteln, indem wir für den Wert der elektrostatischen Feldstärke, die wir im Beispiel 207 für eine Kreisscheibe bestimmten, den Grenzwert für

$r \to \infty$ bilden. Dann wird

$$\vec{E} = \lim_{r \to \infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{r_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}}\right) \vec{r}_{10} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{r}_{10},$$

wobei $\vec{r}_{10}$ den Einheitsvektor darstellt, der senkrecht auf der Plattenebene steht. Auf die Ladung Q wird dann in einem beliebigen Punkt dieses Feldes die Kraft

$$\underline{\vec{F} = \vec{E}Q = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0} \vec{r}_{10}}$$

wirken.

213. Zwei unendlich große, elektrisch leitende, ebene Wände stehen elektrisch isoliert senkrecht aufeinander (Bild 97). Wie groß ist die elektrische Feldstärke in ihrer Nähe, wenn auf der einen eine Ladungsdichte σ und auf der anderen die doppelte Ladungsdichte, also 2σ, besteht und wenn in ihrer Umgebung ein Vakuum herrscht?

Lösung

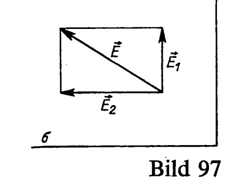


Bild 97

Die Wände werden selbständig jede für sich elektrische Felder erzeugen, die senkrecht zueinander gerichtet sind und Feldstärken mit den Beträgen

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \vec{E}_2 = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

haben. Das resultierende Feld ergibt sich in jedem Punkt aus der Vektorsumme von $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$. Unter der Voraussetzung, daß $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ senkrecht aufeinander stehen, können wir für die resultierende Feldstärke schreiben

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0^2} + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}} = \sqrt{\frac{5\sigma^2}{4\varepsilon_0^2}} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}.$$

214. Eine elektrisch leitende Kugel vom Durchmesser $2r = 1$ m hat ein negatives absolutes Potential von $U = 10^6$ V. Sie befindet sich an einem Punkt im Vakuum, wo das elektrische Erdfeld gerade die Stärke $E = 10^4$ V m^{-1} aufweist, im Schwebezustand. Wie groß ist ihr Gewicht?

Lösung

Wenn die elektrisch geladene leitfähige Kugel im Vakuum an einem bestimmten Punkt des elektrischen Erdfeldes gerade schwebt, dann müssen die beiden auf die Kugel wirkenden Kräfte Gewicht G und die Kraft F des elektrischen Erdfeldes gerade gleich groß und einander entgegengerichtet sein. Wir können deshalb schreiben

$$G = F.$$

Für F gilt dabei $F = EQ$. Die auf der Kugel enthaltene Ladung Q können wir mit dem Ansatz für das absolute Potential der Kugel ermitteln

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

woraus sich ergibt

$$Q = U \cdot 4\pi\varepsilon_0 r.$$

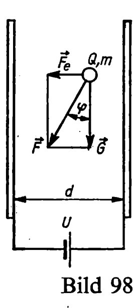


Bild 98

Wegen des negativen Potentials muß auch die Ladung Q negatives Vorzeichen haben. Der Vektor der Feldstärke des irdischen Erdfeldes ist auf den Erdmittelpunkt hin gerichtet. Deshalb hat die auf die Kugel wirkende Kraft F die Richtung senkrecht aufwärts. Für das gesuchte Gewicht der Kugel ergibt sich somit die Beziehung

$$G = F = EQ = 4\pi\varepsilon_0 r\, UE =$$
$$= 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{As V}^{-1}\,\text{m}^{-1}\ 0{,}5\ \text{m} \cdot 10^6\ \text{V} \cdot 10^4\ \text{Vm}^{-1} =$$
$$= 0{,}555\ \text{N} = \underline{56{,}74 \cdot 10^{-3}\ \text{kp}}.$$

215. Zwischen zwei ebenen, parallel zueinander vertikal im Abstand $d = 0{,}5$ cm angeordneten, elektrisch geladenen Platten befindet sich ein elektrisch geladenes Tröpfchen der Masse $m = 10^{-9}$ g (Bild 98). Wenn die Platten bis zu einer Potentialdifferenz von $U = 400$ V aufgeladen werden, fällt das Tröpfchen im freien Fall unter einem Winkel $\varphi = 7°\,25'$ gegen die Vertikale herab. Bestimmen Sie die auf dem Tröpfchen befindliche Ladungsmenge.

Lösung

Bei der Berechnung gehen wir von der Tatsache aus, daß das Tröpfchen in der Richtung der resultierenden Kraft fällt. Diese resultierende Kraft ist aus der Vektorsumme der beiden Kräfte $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ und $\vec{G} = m\vec{g}$ gebildet. Die Ladung des Tröpfchens sei Q. Da das elektrische Feld zwischen den beiden Platten bestehen soll, gilt

$$U = Ed,$$

also

$$E = \frac{U}{d}.$$

Unter Berücksichtigung der in Bild 98 gewählten Bezeichnungen können wir schreiben

$$\tan\varphi = \frac{QE}{mg} = \frac{Q\dfrac{U}{d}}{mg} = \frac{QU}{mgd},$$

d. h. also,

$$Q = \frac{mgd\tan\varphi}{U} = \frac{10^{-9}\cdot 10^{-3}\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{ms}^{-2}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot \tan 7°\,25'}{400\ \text{V}} =$$
$$= \underline{1{,}596 \cdot 10^{-17}\ \text{C}}.$$

216. Eine Kugel der Masse $m = 10\,\mathrm{g}$ trägt die elektrische Ladung $Q = {}^5/_3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$. Mit welcher Beschleunigung wird sich diese Kugel in einem elektrischen Feld der Stärke $E = 3 \cdot 10^4\,\mathrm{Vm^{-1}}$ bewegen?

Lösung

Entsprechend der Definition der elektrischen Feldstärke gilt

$$E = \frac{F}{Q}$$

und somit

$$F = EQ.$$

Andererseits gilt allgemein nach dem II. NEWTONschen Gesetz

$$F = ma.$$

Infolgedessen können wir nach Vergleich der beiden letztgenannten Gleichungen schreiben

$$FQ = ma.$$

Für den gesuchten Wert der in Feldrichtung wirkenden Beschleunigung erhalten wir demnach

$$a = \frac{EQ}{m} = \frac{300 \cdot 10^2\,\mathrm{Vm^{-1}} \cdot \frac{5}{3} \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}} = \underline{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}}}.$$

217. Zwischen den Platten eines Kondensators befindet sich ein Dielektrikum aus Glas von 0,1 cm Dicke. Wie groß muß die Belagfläche des Kondensators sein, damit er eine Kapazität von 150 pF annimmt?

Lösung

Die Kapazität des Kondensators ist durch die Beziehung $C = Q/U$ definiert. Dabei ist Q die auf einer Platte des Kondensators befindliche Ladung und die im Zähler der angegebenen Beziehung auftretende Größe U das Potential dieser Kondensatorfläche in bezug auf die gegenüberliegende Fläche. Da wir bei einem Plattenkondensator das zwischen den Platten bestehende Feld als homogen ansehen können, gilt für das Potential die Beziehung

$$U = Ed$$

(d Abstand der beiden Platten, E Stärke des homogenen elektrischen Feldes). Für die Feldstärke liefert das COULOMBsche Gesetz den Ansatz: $E = \sigma/\varepsilon = Q/\varepsilon A$ (A Fläche einer Kondensatorplatte). Für die Kapazität des Plattenkondensators können wir dann end-

gültig schreiben

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon A}d} = \frac{\varepsilon A}{d}.$$

Hieraus erhalten wir für die gesuchte Fläche des Plattenkondensators

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon} = \frac{150 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{As V}^{-1}\,\text{m}^{-1} \cdot 7} = \underline{2{,}4188 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2}.$$

218. Berechnen Sie die Kapazität eines Plattenkondensators von 200 cm² Belagfläche. Zwischen den Belägen befindet sich Glas der Dicke $d_1 = 0{,}1$ cm, das beiderseits mit einer Paraffinschicht der Dicke $d_2 = 0{,}02$ cm bedeckt ist. Die Dielektrizitätszahlen betragen für Glas $\varepsilon_1 = 7$, für Paraffin $\varepsilon_2 = 2$.

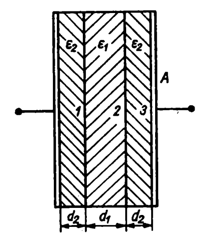




Bild 99

Lösung

Gemäß Bild 99 ist die dielektrische Verschiebung in allen Dielektrika gleich groß, so daß wir finden

$$D = \frac{Q}{A} = D_1 = D_2,$$

d. h.,

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2.$$

Wenn wir die Potentialdifferenzen zwischen den einzelnen Schichten mit Hilfe der jeweiligen elektrostatischen Feldstärken ausdrücken, erhalten wir

$$U_{01} = E_2 d_2 = E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2,$$

$$U_{12} = E_1 d_1,$$

$$U_{23} = E_2 d_2 = E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2.$$

Für die resultierende Potentialdifferenz können wir dann schreiben:

$$U = U_{01} + U_{12} + U_{23} = E_1 d_1 + 2E_2 d_2 = E_1 d_1 + 2E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2,$$

$$U = E_1 \left(d_1 + 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2\right) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}\left(d_1 + 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2\right).$$

Für die Kapazität des Plattenkondensators erhalten wir

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{AD}{\frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}\left(d_1 + 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2\right)} = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + 2\frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 A}{2\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}.$$

Da die vorletzte Gleichung auch in der Form

$$C = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 A} + 2\dfrac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 A}} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + 2\dfrac{1}{C_2}}$$

geschrieben werden kann, wird ersichtlich, daß die Kapazität eines derartigen Plattenkondensators auch als die dreier, in Serie geschalteter einzelner Plattenkondensatoren berechnet werden kann, wie es aus der Darstellung in Bild 99 hervorgeht. Die drei Einzelkondensatoren sind mit den Symbolen C_2, C_1, C_2 gekennzeichnet. Wenn wir die zugehörigen Zahlenwerte einsetzen, erhalten wir schließlich

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 A}{2\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}\; 7 \cdot 2 \cdot 200 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}}{2 \cdot 7 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} + 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} =$$

$$= \underline{516{,}8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}.}$$

219. Ein Luftkondensator mit ebenen Platten hat bei einem Plattenabstand $d = 1$ cm die Kapazität $C_0 = 10$ pF. Zwischen die beiden Kondensatorplatten werde ein Stück Blech der Dicke $\Delta = 0{,}1$ cm eingeschoben, das so groß ist, daß jegliche Randwirkungen vernachlässigt werden können. Wie groß ist die sich dann einstellende Kapazität?

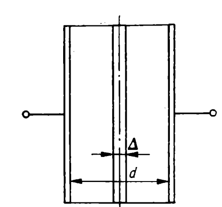
Lösung

Durch das Einschieben der Platte der vorgenannten Dicke wird der Kondensator von der ursprünglichen Kapazität

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{1}$$

in zwei Kondensatoren mit den Kapazitäten

$$C' = \frac{\varepsilon_0 A}{\dfrac{d - \Delta}{2}} = 2\frac{\varepsilon_0 A}{d - \Delta}$$



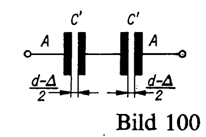


Bild 100

zerlegt, die in Serie geschaltet sind (Bild 100). Die resultierende Kapazität dieser Kombination erfüllt sodann die Bedingung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'} = \frac{2}{C'},$$

so daß sich ergibt

$$C = \frac{C'}{2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - \Delta}.$$

Aus Gl. (1) geht aber hervor, daß

$$\varepsilon_0 A = C_0 d$$

ist, so daß wir nach Einsetzen der vorgegebenen Werte erhalten

$$C = C_0 \frac{d}{d - \Delta} = 10\,\text{pF}\,\frac{1\,\text{cm}}{1\,\text{cm} - 0{,}1\,\text{cm}} = 10\,\frac{1}{0{,}9}\,\text{pF} = \underline{11{,}11\,\text{pF}}.$$

220. Auf welches Potential U_1 muß ein Kondensator der Kapazität $C_1 = 2\,\mu\text{F}$ aufgeladen werden, damit er die gleiche Ladung trägt, die von einer Leydener Flasche der Kapazität $C_2 = 900\,\text{pF}$ bei einer Spannung vom Betrag $U_2 = 30000\,\text{V}$ gespeichert wird?

Lösung

Für die Ladungen auf den Platten der beiden Kondensatoren können wir schreiben

$$Q_1 = C_1 U_1; \quad Q_2 = C_2 U_2.$$

Da entsprechend der Aufgabenstellung $Q_1 = Q_2$ sein soll, gilt

$$C_1 U_1 = C_2 U_2,$$

woraus wir für das gesuchte Potential erhalten

$$U_1 = U_2 \frac{C_2}{C_1} = 30000\,\text{V}\,\frac{900 \cdot 10^{-12}\,\text{F}}{2 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = \underline{13{,}5\,\text{V}}.$$

221. Berechnen Sie die Kapazität eines aus zwei koaxialen Zylindern bestehenden Kondensators der Abmessungen Höhe $h = 20\,\text{cm}$, Plattenradien $r_1 = 3\,\text{cm}$, $r_2 = 4\,\text{cm}$, dessen Dielektrikum ein Vakuum ist (Bild 101).

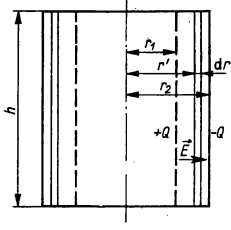


Bild 101

Lösung

Für die Berechnung der Kapazität muß zunächst das Potential zum Beispiel einer (positiven) inneren gegenüber einer äußeren Platte ermittelt werden. Dieses Potential ist gleich dem Quotienten aus der Arbeit W, die wir bei dem Transport der Ladung entgegen den Kräften dieses Feldes von der äußeren auf die innere Platte zu verrichten haben, und der übertragenen Ladung selbst. Wir können demnach schreiben

$$U = \frac{W}{Q} = \frac{1}{Q}\int_{r_2}^{r_1} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{Q}\int_{r_2}^{r_1} (-\vec{E}Q)\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_2}^{r_1} E\,\mathrm{d}r = -\int_{r_2}^{r_1} E\,\mathrm{d}r',$$

da die Feldstärke und die infinitesimale Vektorgröße $\mathrm{d}\vec{r}$ einander entgegengerichtet sind und da $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}r'$ ist. Den Wert der elektrostatischen Feldstärke erhalten wir mit Hilfe des Lehrsatzes von GAUSS-OSTROGRADSKI, wonach der Strom durch die Oberfläche eines angenommenen Zylinders vom Radius r' dem Quotienten der im Innern des Zylinders enthaltenen Ladung und der Dielektrizitätskonstante des umgebenden Me-

diums gleich ist. Es ist daher

$$E \cdot 2\pi r' h = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

da der Strom durch die Zylindergrundfläche in Richtung der Feldstärke gleich Null ist. Daraus ergibt sich

$$E = \frac{Q}{2\pi r' h \varepsilon_0}.$$

Für das Potential U erhalten wir damit

$$U = \int_{r_2}^{r_1} -E\,\mathrm{d}r' = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \int_{r_2}^{r_1} -\frac{\mathrm{d}r'}{r'} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Schließlich erhalten wir die Kapazität des Zylinderkondensators zu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m}}{2{,}3\lg\frac{0{,}04\,\mathrm{m}}{0{,}03\,\mathrm{m}}} = \underline{38{,}7 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}}.$$

222. Berechnen Sie die Kapazität eines Kugelkondensators, der aus zwei konzentrisch angeordneten, elektrisch leitenden Flächen mit den Radien r_1 und r_2 gebildet wird, zwischen denen sich ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε befindet.

Lösung

Wir gehen ganz analog wie im Beispiel des Zylinderkondensators vor, indem wir die Feldstärke E unter Anwendung des Lehrsatzes von GAUSS-OSTROGRADSKI bestimmen. Wir können also schreiben

$$4\pi r'^2 E = \frac{Q}{\varepsilon},$$

wobei r' den Radius einer beliebigen gedachten Kugelfläche zwischen den beiden Kugelelektroden bedeutet, mit denen sie den Mittelpunkt gemein hat. Das Potential bestimmen wir wie vordem gemäß der Beziehung

$$U = \int_{r_2}^{r_1} -\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_2}^{r_1} E\,\mathrm{d}r = \int_{r_2}^{r_1} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r'^2}\,\mathrm{d}r' =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

weil auch hier $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}r'$ ist.

Die Kapazität des Kugelkondensators ergibt sich damit zu

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\,.$$

223. Wie groß sind die Kapazitäten der in den Bildern 102a bis d dargestellten Kondensatorkombinationen? Die einzelnen auf den Bildern 102a bis c eingesetzten Kapazitäten haben folgende Werte:

a) $C_1 = 6\,\mu\text{F}$, $C_2 = 2\,\mu\text{F}$, $C_4 = 3\,\mu\text{F}$, $C_5 = 3\,\mu\text{F}$;

b) $C_1 = 2\,\mu\text{F}$, $C_2 = 4\,\mu\text{F}$, $C_3 = 4\,\mu\text{F}$, $C_4 = 2\,\mu\text{F}$;

c) $C_1 = 6\,\mu\text{F}$, $C_2 = 2\,\mu\text{F}$, $C_3 = 1\,\mu\text{F}$, $C_4 = 3\,\mu\text{F}$.

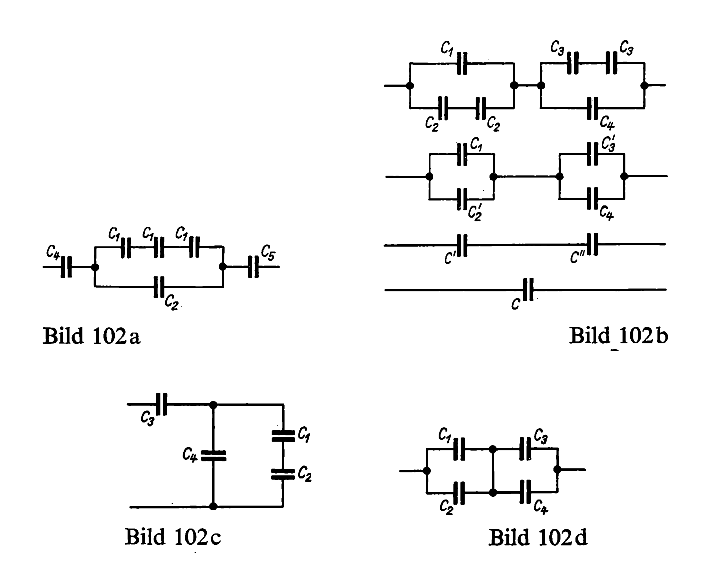


Bild 102a

Bild 102b

Bild 102c

Bild 102d

Lösung

Wir verfahren in der Weise, daß wir die in Serie oder die parallelgeschalteten Kondensatoren zusammenfassen und mit dieser Zusammenfassung ein Ersatzschaltbild schaffen, das wir weiterhin vereinfachen können. Dabei wird uns die Berechnung erleichtert, wenn uns bekannt ist, daß zwei gleiche, in Serie geschaltete Kondensatoren eine resultierende Kapazität haben, die gleich der halben Kapazität jeweils eines einzelnen ist, während zwei gleiche, parallelgeschaltete Kondensatoren eine resultierende Kapazität haben, die der doppelten Kapazität je eines der beiden Kondensatoren gleich ist. Bei

der Serienschaltung ist also

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C}; \quad C_g = \frac{C}{2},$$

und bei der Parallelschaltung

$$C_g = C + C = 2C.$$

Analog läßt sich nachweisen, daß bei drei in Serie geschalteten Kondensatoren die resultierende Kapazität $C_g = C/3$ ist, wogegen bei der Parallelschaltung $C_g = 3C$ ist. Die einzelnen in Bild 102 dargestellten Fälle werden demnach wie folgt behandelt:

a) Drei Kapazitäten von je 6 μF ergeben in Serie geschaltet $C_1' = \frac{C_1}{3} = \frac{6\,\mu\text{F}}{3} = 2\,\mu\text{F}$.

Diese resultierende Kapazität C_1' ist mit der Kapazität C_2 parallelgeschaltet, also ist $C_3' = C_1' + C_2 = (2 + 2)\,\mu\text{F} = 4\,\mu\text{F}$. Diese Kapazität C_3' ist mit den beiden außen liegenden je 3 μF großen in Serie geschaltet, so daß sich ergibt

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_3'} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{3\,\mu\text{F}} + \frac{1}{4\,\mu\text{F}} + \frac{1}{3\,\mu\text{F}} = \frac{11}{12\,\mu\text{F}};$$

$$C_g = \frac{12}{11}\,\mu\text{F} = \underline{1{,}09\,\mu\text{F}}.$$

b) Die Kapazitäten C_2 sind in Serie geschaltet, so daß ihre resultierende Kapazität den Wert $C_2' = C_2/2 = 2\,\mu\text{F}$ annimmt. Auf der linken Seite des Schaltbildes befinden sich somit die beiden parallelgeschalteten Kapazitäten C_1 und C_2', so daß deren resultierende Kapazität $C' = C_1 + C_2' = (2 + 2)\,\mu\text{F} = 4\,\mu\text{F}$ wird. Analog kann man leicht ermitteln, daß die resultierende Kapazität C'' der rechten Seite der Schaltung ebenfalls den Wert $C'' = 4\,\mu\text{F}$ annehmen muß. Da C' und C'' in Serie geschaltet sind, ist offenkundig, daß die resultierende Kapazität der gesamten Schaltung $\underline{C_g = 2\,\mu\text{F}}$ sein wird. Die Ersatzschaltbilder, die zur Berechnung herangezogen wurden, sind in dem unteren Teil des Bildes 102b dargestellt.

c) Die Kapazitäten C_1 und C_2 können wir durch die resultierende Kapazität C_1' ersetzen:

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2\,\mu\text{F}} + \frac{1}{3\,\mu\text{F}},$$

also

$$C_1' = \frac{3}{2}\,\mu\text{F} = 1{,}5\,\mu\text{F}.$$

Da die Kapazitäten C_1' und C_4 parallelgeschaltet sind, können wir sie durch die resultierende Kapazität

$$C_2' = C_1' + C_4 = 1{,}5\,\mu\text{F} + 3\,\mu\text{F} = 4{,}5\,\mu\text{F}$$

ersetzen. Die Kapazitäten C_3 und C_2' sind nunmehr in Serie geschaltet, so daß die gesuchte resultierende Kapazität C_g der gesamten Schaltung sich ergibt zu

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{4{,}5\,\mu\text{F}} + \frac{1}{1\,\mu\text{F}} = \frac{5{,}5}{4{,}5\,\mu\text{F}},$$

d. h.,

$$C_g = \frac{4{,}5\ \mu\text{F}}{5{,}5} = \underline{0{,}82\ \mu\text{F}}.$$

d) C_1 ist mit C_2 parallelgeschaltet, ebenso sind C_3 und C_4 parallel angeordnet. Das Kapazitätenpaar C_1 und C_2 und das Paar C_3 und C_4 sind in Serie geschaltet, so daß für die resultierende Kapazität gilt

$$\frac{1}{C_g} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} = \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)},$$

d. h.,

$$\underline{C_g = \frac{C_1C_3 + C_1C_4 + C_2C_3 + C_2C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}}.$$

224. Ein luftgefüllter Plattenkondensator besteht aus zwei Platten mit dem Flächeninhalt $A = 1000\ \text{cm}^2$, die voneinander in einem Abstand $x = 0{,}1$ cm angeordnet sind. Mit welcher Kraft ziehen sich die beiden Platten an, wenn sie auf ein Potential von $U = 1000$ V aufgeladen werden?

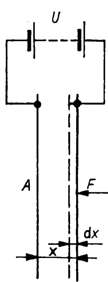


Bild 103

Lösung

a) Das angegebene Beispiel betrachten wir zunächst unter dem Gesichtspunkt energetischer Vorstellungen. Wir bezeichnen die Kraft, mit der sich die beiden Platten anziehen, mit dem Symbol F. Aus dem Gesetz von der Erhaltung der Energie ergibt sich, daß die Arbeit, welche die Kraft F bei einer Annäherung der beiden Platten um das infinitesimale Wegelement dx verrichtet, genau der Abnahme der Energie des zwischen den beiden Platten liegenden elektrostatischen Feldes gleich sein muß. (Das Feld soll vollständig zwischen den Kondensatorplatten gelegen sein.) Nach Bild 103 können wir schreiben

$$F\,\mathrm{d}x = \frac{W_e}{V} A\,\mathrm{d}x,$$

wobei W_e die Energie des elektrostatischen Feldes im Gesamtvolumen des Dielektrikums und V das Volumen des Dielektrikums bedeutet, so daß die Energiedichte des elektrostatischen Feldes mit W_e/V angegeben wird. Für die Energie des elektrostatischen Feldes eines Kondensators gilt jedoch die Beziehung $W_e = {}^1/_2\, CU^2$, so daß wir finden

$$F\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2} CU^2}{Ax} A\,\mathrm{d}x,$$

wenn wir auch das Volumen durch die Beziehung $V = Ax$ ausdrücken. Für die gesuchte Kraft finden wir dann

$$F = \frac{CU^2}{2x}$$

und nach einer Umformung

$$F = \frac{\frac{\varepsilon A}{x} U^2}{2x} = \frac{\varepsilon A U^2}{2x^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A U^2}{2x^2}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich schließlich

$$F = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}} \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} \cdot 1000^2\,\mathrm{V^2}}{2(1 \cdot 10^{-3})^2\,\mathrm{m^2}} =$$

$$= \frac{8{,}854 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N\,m^2}}{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2}} = \underline{0{,}4427\,\mathrm{N}}.$$

b) Das Beispiel läßt sich auch durch die direkte Berechnung der gesuchten Kraft bearbeiten. Die Ladung $+Q$ der einen wirkt auf die Ladung $-Q$ der anderen Platte durch eine Anziehungskraft vom Betrag

$$F = E_0 Q,$$

wobei E_0 die elektrische Feldstärke des nur durch die eine Ladung $+Q$ erregten Feldes darstellt. Das homogene Feld zwischen beiden Kondensatorplatten wird durch die Feldstärke $E = 2E_0$ gekennzeichnet, da das resultierende Feld sowohl durch die Ladung $+Q$ als durch die $-Q$ gleicherweise erregt wird und beide Ladungen am Entstehen des Gesamtfeldes durch gleiche Beiträge beteiligt sind. Da weiterhin (entspr. Beispiel 217) $E = \sigma/\varepsilon$ ist, können wir auch schreiben

$$F = E_0 Q = \frac{E}{2} Q = \frac{\sigma}{2\varepsilon} Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon A} = \underline{\frac{1}{2} \frac{CU^2}{x}}$$

unter der Voraussetzung, daß wir bei der Umformung des Ausdrucks für die Kraft F die Beziehungen $\sigma = Q/A$, $Q = CU$ und $C = \varepsilon A/x$ verwenden.

225. Ein luftgefüllter Plattenkondensator der Kapazität $C_1 = 500$ pF ist auf eine Spannung $U_1 = 5000$ V aufgeladen. Der Kondensator enthält als Dielektrikum eine Platte, deren Material durch die Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 5$ charakterisiert ist. Welche Arbeit muß man verrichten, um diese Platte aus dem Kondensator zu entfernen, und wie verändert sich nach Entfernen der Isolierplatte die am Kondensator anliegende Spannung?

Lösung

Wir stellen zunächst fest, um welchen Betrag sich die Kapazität des Kondensators durch das Entfernen der Isolierplatte verringert. Da die Dielektrizitätszahl das Verhältnis der beiden Kapazitäten des Kondensators mit und ohne Dielektrikum angibt, also C_1 bzw. C_2, können wir schreiben

$$\varepsilon_r = \frac{C_1}{C_2},$$

d. h.,

$$C_1 = \varepsilon_r C_2.$$

Da weiter die auf den Kondensatorplatten enthaltene Ladungsmenge durch die Entfernung der Isolierplatte nicht verändert wird, gilt

$$C_1 U_1 = C_2 U_2 .$$

Somit wird sich nach Herausziehen der Platte aus dem Kondensator die neue Spannung

$$U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2} = \varepsilon_r\, U_1 = 5 \cdot 5000\ \mathrm{V} = \underline{25000\ \mathrm{V}}$$

einstellen.
Die für das Herausziehen der Isolierplatte erforderliche Arbeit bestimmen wir als die Differenz der Energie des elektrostatischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten mit und ohne Isolierplatte, so daß sich ergibt

$$W = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r U_1)^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} C_1 U_1^2 \varepsilon_r - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 (\varepsilon_r - 1) =$$

$$= \frac{1}{2} 500 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} \cdot 5000^2\ \mathrm{V}^2 (5 - 1) = \underline{25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}} .$$

226. Zwischen den beiden Platten eines Kondensators mit dem Flächeninhalt $A = 500\ \mathrm{cm}^2$, die voneinander einen Abstand $d = 1$ cm haben, besteht eine Spannung der Größe $U_1 = 5000$ V. Welche Arbeit muß verrichtet werden, damit sich der Abstand der beiden Kondensatorplatten auf $d' = 4$ cm vergrößert?

Lösung

Die gesuchte Arbeit muß gleich der Energiedifferenz des zwischen den beiden Kondensatorplatten bestehenden elektrostatischen Feldes bei den Abständen $d' = 4$ cm und $d = 1$ cm sein. In den beiden Stellungen sind diese Energien gegeben durch

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2; \quad W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 .$$

Die Kapazität C_2 können wir mittels C_1 und die Spannung U_2 mittels U_1 ausdrücken. Wir erhalten dann

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d'} = \frac{\varepsilon_0 A}{4d} = \frac{C_1}{4} .$$

Da sich die auf den Kondensatorplatten enthaltene Ladung bei einer Veränderung des Abstands nicht mit ändert, sondern konstant bleibt, ist

$$C_1 U_1 = C_2 U_2 ,$$

d. h.,

$$U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2} = U_1 \frac{C_1}{\frac{C_1}{4}} = 4 U_1 .$$

Daraus ergibt sich

$$W = W_1 - W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} C_1 \frac{1}{4} (4U_1)^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 =$$

$$= \frac{16}{8} C_1 U_1^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{3}{2} C_1 U_1^2 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} U_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{As \cdot V^{-1}\, m^{-1}} \cdot 500 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}}{0{,}01\ \mathrm{m}} 5000^2\ \mathrm{V^2} = \underline{1{,}661 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}}.$$

A Aufgaben

258. Zwei gleich große, auf zwei kleinen Kugeln aufgebrachte Ladungen sind 10 cm voneinander entfernt und wirken im Vakuum durch eine Kraft von $5 \cdot 10^{-5}$ kp aufeinander. Berechnen Sie die Größe der beiden Ladungen.
259. Zwei Ladungen wirken in einem Medium mit der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 1$ im Abstand 11 cm mit der gleichen Kraft aufeinander wie in Terpentin in einem Abstand von nur 7,4 cm. Berechnen Sie die Dielektrizitätszahl des Terpentins.
260. In den Eckpunkten eines ebenen gleichseitigen Dreiecks sind Punktladungen der Größe e angeordnet. Wie groß müßte eine im Mittelpunkt des Dreiecks liegende Punktladung sein, damit sich die Ladungen im Gleichgewicht befinden?
261. Welche Ladungen Q müssen auf zwei gleich großen Kugeln von je 10 g Masse angebracht werden, damit die zwischen den Kugeln wirkenden Massenanziehungskräfte durch die elektrostatischen Abstoßungskräfte kompensiert werden?
262. Vergleichen Sie die zwischen zwei Elektronen wirkenden Massenanziehungs- und elektrostatischen Abstoßungskräfte.
263. Bestimmen Sie die Flächendichte der auf einer Kugel von 5 cm Radius enthaltenen Ladung $Q = 0{,}1\ \mu$C.
264. Welche Stärke hat das elektrische Feld einer Punktladung $Q = 144 \cdot 10^{-6}$ C in einem Abstand von $r = 6$ cm, 12 cm, 18 cm im Vakuum?
265. Zwei Punktladungen gleichen Vorzeichens der Stärken $Q_1 = 8\ \mu$C und $Q_2 = 5\ \mu$C haben voneinander den Abstand $d = 20$ cm.
   a) In welchem auf ihrer Verbindungslinie gelegenen Punkt ist die elektrostatische Feldstärke gleich Null?
   b) In welchem auf ihrer Verbindungslinie gelegenen Punkt sind die durch beide Ladungen hervorgerufenen Potentiale gleich groß?
266. Eine Ladung $Q = 5 \cdot 10^{-7}$ C erregt im Vakuum ein elektrostatisches Feld. Die Punkte A und B liegen mit der Ladung Q auf einer Geraden und haben von Q den Abstand $r_1 = 2$ cm bzw. $r_2 = 10$ cm. Wie groß ist die zwischen A und B bestehende Spannung?
267. Wie groß müßte der Radius einer Kugel gewählt werden, auf die eine Ladung $Q = 1$ C gebracht werden kann, ohne daß Sprüheffekte auftreten? (Die maximale Feldstärke, bei der in Luft gerade noch kein Sprühen beobachtet wird, beträgt 25 kV cm^{-1}.)
268. Auf welches absolute Potential würde sich die Erde ($r = 6378$ km) aufladen,

wenn auf ihre Oberfläche gleichmäßig eine Ladung von einem Coulomb aufgebracht würde?

269. Wie groß ist die Spannung zwischen zwei Punkten in einem homogenen elektrostatischen Feld der Stärke $E = 150\ \mathrm{V\,cm^{-1}}$, deren Abstand in Richtung der Feldlinien 6 cm beträgt?

270. Wie groß müßte der Radius einer Kugel sein, die sich durch das Aufbringen einer elektrischen Ladung $Q = 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$ auf das absolute Potential $U = 100000\ \mathrm{V}$ auflädt?

271. Wie groß ist das absolute Potential in einem Abstand $s = 10\ \mathrm{cm}$ von der Oberfläche einer leitfähigen Kugel mit dem Radius $r = 5\ \mathrm{cm}$, auf die eine Ladung der Größe $Q = 2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$ gebracht wurde?

272. Es ist die elektrostatische Feldstärke zwischen zwei koaxialen kreiszylindrischen Flächen mit den Radien r_1 und r_2, die praktisch unendlich lang sind, zu berechnen, wenn der innere Zylinder auf das Potential U_0 gegenüber dem geerdeten äußeren Zylinder aufgeladen ist.

273. Ein Leiter, der in die Form einer ebenen Kreislinie mit dem Radius r gebogen wurde, trägt die Ladung Q. Berechnen Sie die Feldstärke des durch diese Ladung erregten elektrostatischen Feldes für

a) den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r,

b) einen Punkt auf der zur Kreislinie senkrechten Mittelpunktsachse, der vom Mittelpunkt den Abstand s hat.

274. Es sind die Potentiale U_1, U_2, U_3, U_4 in vier nebeneinander gelegenen Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, bekannt. Wie bestimmen wir die Feldstärke im ersten dieser Punkte, der von den drei anderen mit bekanntem Potential jeweils die Abstände x_{12}, x_{13}, x_{14} hat, wenn wir mit $\vec{e}_{12}$, $\vec{e}_{13}$, $\vec{e}_{14}$ die Einheitsvektoren jeweils in den Richtungen von Punkt 1 zu den Punkten 2, 3 und 4 bezeichnen?

275. Ein Punkt A hat von einer unendlich ausgedehnten, leitenden ebenen Fläche, die mit einer Ladung der Flächendichte σ aufgeladen und von Vakuum umgeben ist, den Abstand d. Wie groß ist das Potential des elektrischen Feldes im Punkt A in bezug auf die geladene ebene Fläche?

276. Eine ebene Platte der Fläche A ist mit einer elektrischen Ladung der Größe $+2\,e$ aufgeladen. Ihr gegenüber befindet sich im Abstand d eine zweite von gleicher Größe, die, von der ersten durch ein Vakuum getrennt, die Ladung $+e$ trägt. Wie groß ist das Potential der erstgenannten Platte gegenüber der zweiten?

277. Auf einem kugelförmigen Leiter mit dem Radius $r = 10\ \mathrm{cm}$ befindet sich eine elektrische Ladung der Größe $Q = 60\ \mu\mathrm{C}$. Bestimmen Sie die Radien der Äquipotentialflächen des durch diese Ladung erregten elektrischen Feldes, deren Potentiale sich um jeweils $1 \cdot 10^5\ \mathrm{V}$ unterscheiden. Als erste Äquipotentialfläche betrachten wir die Oberfläche des Leiters selbst.

278. Berechnen Sie die auf der Erdoberfläche enthaltene Gesamtladung und deren Flächendichte, wenn der Potentialgradient des elektrischen Feldes der Erdatmosphäre an der Erdoberfläche den Wert $100\ \mathrm{V\,m^{-1}}$ hat. Der Erdradius beträgt 6378 km.

279. Die Platten eines Kondensators sind durch eine Porzellanscheibe von 0,5 cm Dicke und eine Luftschicht gleicher Dicke voneinander isoliert. Es sind die elektrostatischen Feldstärken in der Luft und im Porzellan ($\varepsilon_r = 6$) zu berechnen, wenn bekannt ist, daß die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten 10 kV beträgt. Wie groß ist die Spannung in der Luftschicht und in der Porzellanscheibe?

280. Zwei Platten eines Kondensators haben den Abstand $d = 1{,}05$ cm. Zwischen beide Platten bringen wir, parallel zu beiden liegend, eine weitere Metallscheibe der Dicke $\Delta = 0{,}05$ cm, die von der nächstgelegenen Kondensatorplatte den Abstand $d_1 = 0{,}4$ cm haben soll. Das Potential der nächstgelegenen Kondensatorplatte habe den Wert $U_1 = +50$ V, das der anderen den Wert $U_2 = -60$ V. Berechnen Sie das Potential der eingeschobenen Metallscheibe.

281. Welche Kraft wirkt auf ein Elektron im homogenen elektrischen Feld zwischen zwei Kondensatorplatten, die im Abstand $d = 1$ cm angeordnet sind und zwischen denen eine Spannung $U = 10000$ V besteht?

282. Welche Arbeit muß verrichtet werden, um eine Elektrizitätsmenge $Q = 5$ C von einem Punkt des Potentials $U_1 = -5$ V zu einem anderen mit dem Potential $U_2 = +5$ V zu übertragen?

283. Welche Arbeit wird gewonnen, wenn eine Ladung $Q = 4$ C auf einem Wege verschoben wird, zwischen dessen Endpunkten eine Potentialdifferenz von $U = 6$ V besteht?

284. Welche Arbeit verrichten die Kräfte eines homogenen elektrostatischen Feldes der Feldstärke $E = 200000 \text{ V m}^{-1}$, wenn in ihm eine Ladung $Q = 4$ C in Richtung der Feldlinien um einen Weg $s = 0{,}3$ m verschoben wird?

285. Welche Arbeit muß verrichtet werden, um in einem homogenen elektrostatischen Feld der Stärke $E = 200000 \text{ V m}^{-1}$ eine Ladung $Q = 5$ C längs eines Weges $s = 0{,}15$ m zu verschieben, wenn der Weg mit der Richtung der Feldlinien den Winkel $\varphi = 45°$ einschließt?

286. Wie groß ist die auf das Unendliche bezogene potentielle Energie einer Ladung $Q_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ C, die von einer anderen Ladung $Q_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ C den Abstand $s = 4$ cm hat?

287. Um das Wievielfache verändert sich die zwischen zwei Kondensatorplatten wirkende Anziehungskraft, wenn statt Vakuum Äthylalkohol ($\varepsilon_r = 26$) zwischen ihnen ist?

288. Welche Kapazität hat der Erdkörper, dessen Radius die Größe $r = 6378$ km hat?

289. Welche Kapazität hat ein Körper, der sich durch die Ladung $Q = 0{,}5$ C auf ein Potential $U = 3000$ V auflädt? Welchen Radius hat eine Kugel der gleichen Kapazität, wenn das umgebende Medium ein Vakuum ist?

290. Ein Leiter der Kapazität $C = 1\ \mu$F wird mit einer Ladung $Q = 100 \cdot 10^{-6}$ C aufgeladen. Wie groß ist sein Potential?

291. Wie groß ist die Kapazität eines Plattenkondensators der Flächengröße $A = 200 \text{ cm}^2$, zwischen dessen Belägen Glas der Dicke $d = 0{,}2$ cm und der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 7$ liegt?

292. Wie groß muß die Belagfläche eines Plattenkondensators sein, zwischen dessen Platten sich als Dielektrikum eine Glasschicht von 0,1 cm Dicke befindet, damit der Kondensator eine Kapazität von 150 pF hat? Die Dielektrizitätszahl des Glases ist $\varepsilon_r = 7$.

293. Eine Leydener Flasche hat folgende Abmessungen: äußerer Bodendurchmesser $d = 15$ cm, Höhe der Beläge $h = 20$ cm, Dicke der Glaswand $d_1 = 0{,}2$ cm. Berechnen Sie die Kapazität dieser Leydener Flasche gemäß der für den Plattenkondensator angegebenen Formel. (Da die Dicke der Glaswandung gegenüber dem Flaschendurchmesser vernachlässigt werden kann, ist es nicht erforderlich, die genauere Formel des Zylinderkondensators anzuwenden.)

294. Ein Kondensator besteht aus drei Metallplättchen, deren jedes eine Fläche von 6 cm² hat. Die Plättchen sind durch zwei Glimmerschichten getrennt, die je eine Dicke von 0,01 cm haben. Die

beiden außen liegenden Metallplättchen sind leitend miteinander verbunden. Die Dielektrizitätszahl des Glimmers ist $\varepsilon_r = 7$. Welche Kapazität hat der solcherart aufgebaute Kondensator?

295. Wie groß ist die Kapazität eines Kondensators, der aus $n = 20$ Platten besteht, die auf einer Fläche von 20 cm^2 Inhalt so übereinanderliegen, daß zwischen jeweils zweien ein Vakuumspalt von 0,1 cm Dicke bleibt?

296. Zwei Leydener Flaschen mit den Kapazitäten $C_1 = 300$ pF und $C_2 = 500$ pF haben hintereinandergeschaltet eine Spannung von $U = 12000$ V. Berechnen Sie die auf die erste und auf die zweite Flasche entfallenden Spannungsanteile.

297. Ein Kondensator der Kapazität $C = 1\,\mu$F ist auf eine Spannung $U = 200$ V aufgeladen. Bestimmen Sie den Energieinhalt des elektrischen Feldes dieses Kondensators.

298. Eine Kugel mit dem Radius r trägt die elektrische Ladung Q. Sie hat im Vakuum eine bestimmte potentielle Energie. Es ist zu untersuchen, wie sich die potentielle Energie der Kugel verändert, wenn sie in eine Flüssigkeit mit der Dielektrizitätszahl ε_r gebracht wird.

299. Zwei Kondensatoren mit $C_1 = 1\,\mu$F und $C_2 = 10\,\mu$F sind in Serie geschaltet. An die Klemmen der Kondensatorbatterie wird eine Spannung $U = 200$ V angelegt. Wie groß ist der Energieinhalt jedes Kondensators?

300. Welche elektrische Energie ist in einem Volumen von einem Kubikkilometer der Erdatmosphäre enthalten, wenn der Gradient des elektrischen Erdfeldes den Wert 10^4 V m^{-1} aufweist?

3.2. Elektrodynamik

Unter dem Begriff **elektrischer Strom** I verstehen wir diejenige Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch einen Leiterquerschnitt fließt,

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},$$

wobei $\mathrm{d}Q$ die infinitesimale Elektrizitätsmenge darstellt, die in der gleichfalls infinitesimalen Zeit $\mathrm{d}t$ durch den Leiterquerschnitt fließt.

Der Ausdruck

$$\mathrm{d}I = \vec{\imath}\,\mathrm{d}\vec{A}$$

bedeutet diejenige Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch ein infinitesimales Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ senkrecht zu seiner Orientierung fließt, wobei das Symbol $\vec{\imath}$ den sog. **Vektor der Stromdichte** darstellt. Wenn beide Vektoren in die gleiche Richtung weisen, kann man die Stromdichte aus der Beziehung berechnen:

$$i = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}.$$

Wenn die Dichte im gesamten, vom Strom I durchflossenen Querschnitt A gleich groß ist, dann gilt

$$i = \frac{I}{A}.$$

Nach dem **Ohmschen Gesetz** gilt:

Der elektrische Strom I, der durch einen Leiter fließt, ist gleich dem Quotienten aus der Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ (der Spannung U) an den Leiterenden und dem elektrischen Widerstand des Leiters:

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{U}{R}.$$

Der **elektrische Widerstand eines Leiters** hängt von seinen geometrischen Abmessungen (der Länge l und dem Querschnitt A) und dem spezifischen Widerstand ϱ gemäß folgender Beziehung ab:

$$R = \varrho \frac{l}{A}.$$

Nach den SI-Einheiten (Einheiten des „Système International d'Unités") hat der spezifische Widerstand ϱ die Maßeinheit Ω m. Dagegen setzte sich in der Praxis die Gewohnheit durch, die Länge l in Metern und den Querschnitt A in Quadratmillimetern (mm^2) anzugeben. Da auch in diesem Fall der Widerstand R in Ω angegeben werden muß, folgt für den spezifischen Widerstand die Maßeinheit $\Omega\,mm^2\,m^{-1}$.
Die Abhängigkeit des elektrischen Widerstands eines Leiters von der herrschenden Temperatur wird innerhalb eines nicht allzu breiten Temperaturbereichs mit ausreichender Genauigkeit durch die Beziehung dargestellt:

$$R_t = R_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

(R_t Widerstand bei der Temperatur t, R_0 Widerstand bei der Temperatur t_0 und α Temperaturkoeffizient).
Unter der **elektromotorischen Kraft** E (auch abgekürzt EMK) verstehen wir den Wert des Integrals

$$E = \int \vec{E}_i \,\mathrm{d}s,$$

wobei $\vec{E}_i$ die elektrische Feldstärke bedeutet. Die Integration wird längs des Weges vorgenommen, auf dem die EMK bestimmt werden soll. Die EMK einer offenen Spannungsquelle (einer Spannungsquelle, aus der kein elektrischer Strom entnommen wird) ist ihrer elektrischen Spannung gleich.

Zur Behandlung komplizierter elektrischer Stromkreise verwenden wir die **Kirchhoffschen Gesetze.**
Das 1. KIRCHHOFFsche Gesetz besagt:
In jedem Verzweigungspunkt eines Leiternetzes ist die algebraische Summe aller Ströme gleich Null, also

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0.$$

Das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz besagt:
In jedem geschlossenen Kreis eines Leiternetzes ist die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der Summe der Spannungsabfälle in diesem Kreis, also

$$\sum_{k=1}^{m} E_k = \sum_{k=1}^{m} I_k R_k.$$

Bei der Bearbeitung der konkreten Beispiele werden wir uns an die folgenden Abmachungen halten:
1. Wir zeichnen den Richtungspfeil des Stroms so ein, wie er wahrscheinlich fließen wird. Wenn sich aus unserer Berechnung ein negativer Strom ergibt, so bedeutet das, daß der Strom entgegengesetzt zu der von uns gewählten Richtung fließt.
2. Wir wählen die positive Umlaufrichtung eines Stromkreises beliebig.
3. Wir geben jeweils die Richtung der EMK an. In einer Gleichung wird die EMK dann positiv sein, wenn die Umlaufrichtung des Kreises und die Richtung der EMK gleich sind.
4. Bei der Addition der ohmschen Spannungen wird sich dann ein positives Vorzeichen ergeben, wenn die Umlaufrichtung des Kreises und die Richtung des Stroms, der den ohmschen Widerstand hervorruft, übereinstimmen.

Bei der Serienschaltung von ohmschen Widerständen gilt für den resultierenden Widerstand

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

Dagegen gilt bei der Parallelschaltung der ohmschen Widerstände für den resultierenden Widerstand

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

d.h.,

$$R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}.$$

Die **Arbeit,** die beim Durchgang des elektrischen Stromes I durch einen Leiter in der infinitesimalen Zeitspanne $\mathrm{d}t$ verrichtet wird, ist, wenn an den Leiterenden die Spannung U besteht, durch die Beziehung gegeben:

$$\mathrm{d}W = UI\,\mathrm{d}t.$$

Bei konstanter Spannung U und konstanter Stromstärke I können wir für die Arbeit auch schreiben

$$W = UIt.$$

Für die **Leistung** eines Stromes I, der durch einen Widerstand R fließt, an dessen Enden die Spannung U besteht, gilt

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = UI = \frac{U^2}{R} = I^2R.$$

Die Wärmeaufnahme eines Leiters, der vom Strom durchflossen wird, können wir durch Umrechnen der Stromarbeit

$$W = UIt$$

in Kalorien gemäß der Definition

$$1\ \mathrm{cal} = 4{,}1868\ \mathrm{J}$$

bestimmen.

Die Menge des durch Elektrolyse an einer Elektrode ausgeschiedenen Stoffes ist entsprechend dem **Faradayschen Gesetz** durch

$$m = \ddot{A}Q = \ddot{A}It$$

gegeben (m Masse des ausgeschiedenen Stoffes, Q die durch den Elektrolyten fließende Ladung, I die Stromstärke und t die Dauer des Elektrolyseprozesses). Das **elektrochemische Äquivalent** $\ddot{A}$ des betreffenden Stoffes wird in kg $\mathrm{A^{-1}s^{-1}}$ angegeben.

Wenn das elektrochemische Äquivalent eines Stoffes nicht angegeben ist, können wir es mit Hilfe des zweiten FARADAYschen Gesetzes aus

$$k = \frac{\alpha}{v}\frac{1}{F}$$

berechnen (α/v das Verhältnis der Masse eines Grammatoms und der Wertigkeit des Elements bzw. der Masse eines Grammoleküls und der Wertigkeit des Radikals, $F = 96494$ C die sog. **Faraday-Konstante**).

Unter dem Begriff **Klemmenspannung** U verstehen wir die Potentialdifferenz an den Klemmen eines galvanischen Elements (der Quelle der EMK), wenn ihm der Strom I

entnommen wird, also

$$U = E - R_i I,$$

(E elektromotorische Spannung eines Elements, R_i innerer Widerstand).

B Beispiele

227. Welche Menge an elektrischer Ladung Q fließt während der Zeitspanne $t = 10$ s durch einen Leiter, wenn
a) der Strom den konstanten Wert $I = 5$ A hat,
b) der Strom gleichmäßig vom Wert Null auf den Endwert von 3 A steigt?

Lösung

a) In Übereinstimmung mit der Definition der Stromstärke können wir schreiben

$$Q = It = 5\,\text{A} \cdot 10\,\text{s} = \underline{50\,\text{C}}.$$

b) Die infinitesimale elektrische Ladung dQ, die während der Zeit dt durch einen Leiter fließt, ist bei einem Strom I

$$\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t,$$

wobei I eine lineare Zeitfunktion $I = kt$ (Bild 104) darstellt, in der

$$k = \frac{3\text{A}}{10\,\text{s}} = 0{,}3\,\text{A}\,\text{s}^{-1}$$

ist. Nach Einsetzen dieser Größe in den Ausdruck für dQ erhalten wir

$$\mathrm{d}Q = kt\,\mathrm{d}t$$

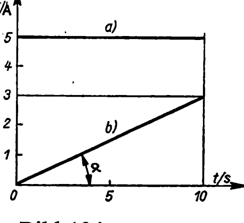


Bild 104

und durch Integration

$$Q = k\int_0^{10\,\text{s}} t\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\,[t^2]_0^{10\,\text{s}} = \frac{0{,}3\,\text{A}\,\text{s}^{-1}}{2}\,10^2\,\text{s}^2 = \underline{15\,\text{C}.}$$

228. Ein Akkumulator wird in der Zeit $t_l = 10$ h mit dem Strom der Stärke $I_l = 7$ A aufgeladen. Wie lange dauert seine Entladung, wenn ihm kontinuierlich ein Entladestrom $I_e = 0{,}5$ A entnommen wird und wenn wir den Wirkungsgrad des Akkus mit 100% annehmen?

Lösung

Die Berechnung setzt voraus, daß wir wegen des 100%igen Wirkungsgrades des Akkus die beim Aufladen zugeführte elektrische Ladung im Entladevorgang wieder zurück-

erhalten. Es gilt also

$$I_1 t_1 = I_e t_e .$$

Demnach finden wir für die gesamte Entladungszeit des Akkus

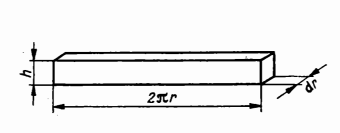
$$t_e = t_1 \frac{I_1}{I_e} = \underline{140\ \text{h}.}$$

229. Aus einer Platte von sehr geringer Dicke h, die aus einem Werkstoff mit dem spezifischen Widerstand ϱ gefertigt wurde, wird ein Kreisring mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 herausgeschnitten. Wie groß ist der Widerstand dieses Kreisrings, wenn wir
a) den Kreisring auseinanderschneiden und als Zuführung die beiden Schnittränder belassen und wenn
b) als Stromzuführungen die beiden begrenzenden Kreislinien benutzt werden?

Lösung

a) Wenn wir den Kreisring radial aufschneiden und als Zuführung die Schnittränder verwenden (Bild 105), dann hat das dort dargestellte differentielle Leiterelement die Länge $2\pi r$ und den Querschnitt $h\,\mathrm{d}r$. Sein elektrischer Leitwert ist dann

$$\mathrm{d}G = \frac{1}{\mathrm{d}R} = \frac{1}{\varrho \frac{2\pi r}{h\,\mathrm{d}r}} = \frac{h\,\mathrm{d}r}{\varrho 2\pi r}.$$



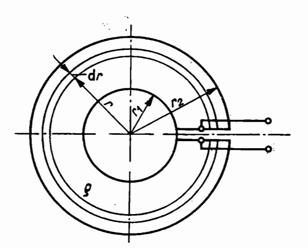


Bild 105

Durch Integration erhalten wir den gesamten Leitwert des Kreisrings

$$G = \frac{h}{2\pi\varrho} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{h}{2\pi\varrho} \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

Als Widerstand des angegebenen Kreisrings erhalten wir dann den reziproken Wert des Leitwerts

$$\underline{R = \frac{1}{G} = \frac{2\pi\varrho}{h} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.}$$

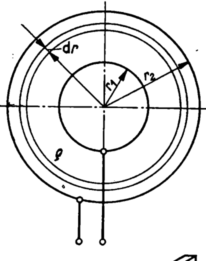
b) Zunächst ermitteln wir den Widerstand des infinitesimalen Kreisrings wie in Bild 106. Es ist dies der Widerstand eines Leiters der Länge dr und der Querschnittsfläche $2\pi rh$

$$\mathrm{d}R = \varrho \frac{\mathrm{d}r}{2\pi rh}.$$

Den Gesamtwiderstand erhalten wir durch Integration von r_1 bis r_2:

$$R = \frac{\varrho}{2\pi h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\varrho}{2\pi h} (\ln r_2 - \ln r_1) = \underline{\frac{\varrho}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

230. Berechnen Sie den Temperaturkoeffizienten für den Widerstand eines Leiters, der sich aus einem Aluminiumdraht mit dem Widerstand $R_{10} = 3\,\Omega$ ($\alpha_1 = 4{,}2 \cdot 10^{-3}$ grd^{-1}) und aus einem Eisendraht mit dem Widerstand $R_{20} = 2\,\Omega$ ($\alpha_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ grd^{-1}) zusammensetzt, indem beide Drähte hintereinandergeschaltet sind. (Die angegebenen Widerstandswerte beziehen sich auf eine Temperatur von 0 °C.)



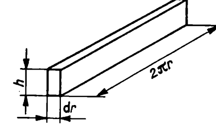


Bild 106

Lösung

Die hintereinandergeschalteten Widerstände aus Aluminium R_{10} und aus Eisen R_{20} ergeben bei einer Temperatur von 0 °C einen resultierenden Widerstand R_0 gemäß

$$R_0 = R_{10} + R_{20}.$$

Beim Ansteigen der Temperatur um den Wert Δt können wir für denselben resultierenden Widerstand auch schreiben

$$R = R_1 + R_2,$$

wobei R_1 und R_2 die Widerstände des Aluminium- bzw. des Eisendrahtes nach Eintreten einer Temperaturerhöhung um den Wert Δt darstellen. Wir können daher auch schreiben

$$R_0(1 + \alpha\Delta t) = R_{10}(1 + \alpha_1\Delta t) + R_{20}(1 + \alpha_2\Delta t),$$

d. h.,

$$R_0 + R_0\alpha\Delta t = R_{10} + R_{10}\alpha_1\Delta t + R_{20} + R_{20}\alpha_2\Delta t.$$

Da die Summe der Widerstände $R_{10} + R_{20}$ auf der rechten Seite der Gleichung gleich dem Widerstand R_0 auf der linken Seite ist, können wir weiterhin schreiben

$$R_0\alpha\Delta t = R_{10}\alpha_1\Delta t + R_{20}\alpha_2\Delta t.$$

Daraus ergibt sich dann

$$\alpha = \frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_0} = \frac{3\,\Omega \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{grd}^{-1} + 2\,\Omega \cdot 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{grd}^{-1}}{(3 + 2)\,\Omega} =$$

$$= \underline{4{,}92 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{grd}^{-1}}.$$

231. Zwei Stäbchen von gleichem Durchmesser, das eine aus Kohlenstoff ($\varrho_C = 4 \cdot 10^{-3}\ \Omega\,\text{cm}$, $\alpha_C = -8 \cdot 10^{-3}\ \text{grd}^{-1}$) und das andere aus Eisen ($\varrho_{Fe} = 12 \cdot 10^{-6}\ \Omega\,\text{cm}$, $\alpha_{Fe} = 6 \cdot 10^{-3}\ \text{grd}^{-1}$), sind miteinander verbunden. Es ist das Verhältnis beider Längen zu ermitteln, bei dem die so gebildete Kombination einen temperaturunabhängigen Widerstand hat.

Lösung

Da beide Stäbchen hintereinandergeschaltet sind, addieren sich ihre Widerstände. Unter der angegebenen Voraussetzung, daß sich der resultierende Widerstand mit der Temperatur nicht verändert, kann man die Summe der Widerstände bei einer beliebigen Temperatur und die Summe der Widerstände bei einer Temperatur von 0 °C gleichsetzen (die Indizes bedeuten C für Kohlenstoff, Fe für Eisen), so daß sich ergibt

$$R_c(1 + \alpha_c \Delta t) + R_{Fe}(1 + \alpha_{Fe}\Delta t) = R_c + R_{Fe},$$

d. h.,

$$R_c + R_{Fe} + R_c\alpha_c\Delta t + R_{Fe}\alpha_{Fe}\Delta t = R_c + R_{Fe}.$$

Nach einer Vereinfachung der Gleichung drücken wir die Widerstände des Kohlenstoffs R_C und des Eisens R_{Fe} mit Hilfe der spezifischen Widerstände ϱ_C, ϱ_{Fe}, der Längen s_C, s_{Fe} und der Querschnitte $A_C = A_{Fe} = A$ aus:

$$\varrho_c \frac{s_c}{A} \alpha_c \Delta t = -\varrho_{Fe} \frac{s_{Fe}}{A} \alpha_{Fe} \Delta t.$$

Aus dieser Gleichung entnehmen wir das Längenverhältnis

$$\frac{s_{Fe}}{s_c} = -\frac{\varrho_c}{\varrho_{Fe}} \frac{\alpha_c}{\alpha_{Fe}} = -\frac{4 \cdot 10^{-3}\ \Omega\,\text{cm}\,(-8 \cdot 10^{-3})\ \text{grd}^{-1}}{12 \cdot 10^{-6}\ \Omega\,\text{cm} \cdot 6 \cdot 10^{-3}\ \text{grd}^{-1}} = \frac{32 \cdot 10^{-6}}{72 \cdot 10^{-9}} = \underline{444.}$$

Die Eisenstange muß 444mal so lang wie das Stäbchen aus Kohlenstoff sein.

232. Ein Normalwiderstand wurde so hergestellt, daß sein Wert genau 0,102 Ω beträgt. Durch Anschließen eines geeigneten Nebenschlußwiderstands soll er auf den exakten Wert von 0,1 Ω einreguliert werden. Welcher Nebenschlußwiderstand wird dazu erforderlich sein?

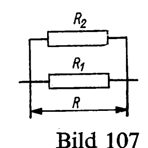


Bild 107

Lösung

Wir gehen von der Beziehung für die Parallelschaltung von Widerständen aus, wonach gilt (Bild 107):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};$$

daraus folgt

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}} = \frac{1}{\frac{R_1 - R}{R R_1}} = \frac{R R_1}{R_1 - R} = \frac{0{,}1\ \Omega \cdot 0{,}102\ \Omega}{0{,}102\ \Omega - 0{,}1\ \Omega} = \underline{5{,}1\ \Omega.}$$

233. Der Gesamtwiderstand zweier parallelgeschalteter Leiter beträgt $^1/_7\,\Omega$. Wenn wir die beiden Leiter hintereinanderschalten, so ergibt sich ein resultierender Widerstand von 0,7 Ω. Berechnen Sie den Widerstand jedes der beiden Leiter.

Lösung

Für die Parallelschaltung der beiden Widerstände R_1 und R_2 gilt

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{1}{7}\,\Omega, \tag{1}$$

und für die gleichen, in Serie geschalteten Widerstände gilt

$$R_1 + R_2 = 0{,}7\,\Omega. \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$R_1 = \frac{R_2}{7\,\Omega^{-1}R_2 - 1}.$$

Das erlaubt uns die Eliminierung von R_1 in (2):

$$\frac{R_2}{7\,\Omega^{-1}R_2 - 1} + R_2 = 0{,}7\,\Omega.$$

Nach einer Umformung erhalten wir für R_2 die quadratische Gleichung

$$10R_2^2\,\Omega^{-2} - 7R_2\,\Omega^{-1} + 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$(R_2)_{1,2} = \begin{cases} 0{,}5\,\Omega \\ 0{,}2\,\Omega \end{cases}.$$

Für R_1 erhalten wir gleichfalls zwei Wurzeln, und zwar $(R_1)_{1,2} = 0{,}2\,\Omega;\ 0{,}5\,\Omega$. Die gesuchten Widerstände sind demnach <u>0,2 Ω</u> und <u>0,5 Ω</u>.

234. Berechnen Sie den Widerstand eines Drahtgestells, das die Form eines Rechtecks mit den Seiten a und b hat und das diagonal durchströmt wird (Bild 108a), indem der Strom von dem einen Eckpunkt A zum gegenüberliegenden B fließt. Der Widerstand einer Längeneinheit des verwendeten Drahtes ist durch den Wert γ gegeben.

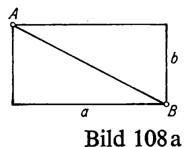


Bild 108a

Lösung

Da wir den Widerstand zwischen den beiden Punkten A und B berechnen wollen, kann man die Situation in Bild 108a vereinfacht wie in Bild 108b darstellen. Die angeführten Widerstände R_1, R_2, R_3 sind also parallel zueinander geschaltet, so daß sich der resultierende Widerstand R errechnen läßt aus

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}.$$

Wenn wir die Ausdrücke für R_1, R_2 und R_3 in die letztgenannte Beziehung einsetzen, ergibt sich

$$R = \frac{\gamma(a+b)\gamma\sqrt{a^2+b^2}\,\gamma(a+b)}{\gamma^2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+\gamma^2(a+b)^2+\gamma^2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \gamma\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)+2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bild 108b

235. Das Gerüst eines Würfels setzt sich aus gleich großen Widerständen vom Wert $R_0 = 6\,\Omega$ so zusammen, daß jede Kante des Würfels einen solchen Widerstand darstellt. Berechnen Sie den Widerstand R zwischen den beiden gegenüberliegenden Würfelecken A und B gemäß Bild 109a.

Lösung

Der Würfel stellt ein räumliches Gebilde dar. Wenn wir ihn nach Bild 109b auf eine ebene Darstellung umskizzieren, dann wird ersichtlich, daß wir in Hinsicht auf Stromverzweigung und Widerstandsverteilung ein symmetrisches Gebilde erhalten. Der in die

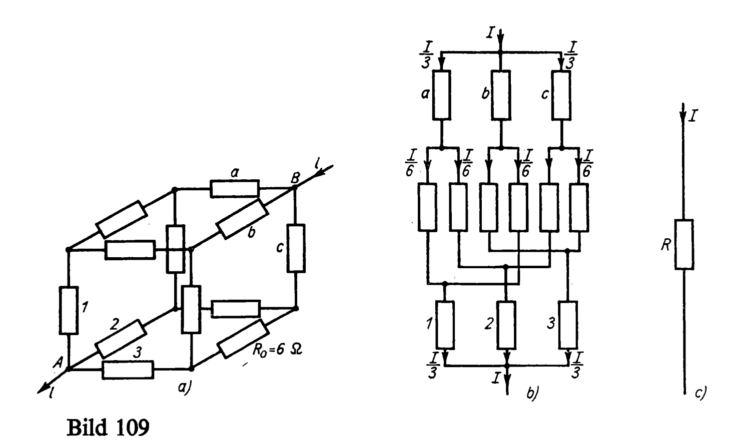


Bild 109

Widerstände a, b, c eintretende Strom I verzweigt sich dreimal auf jeweils $I/3$ und danach nochmals sechsfach auf je $I/6$. Beim Austritt aus dem Würfel vereinigen sich die Zweigströme wieder auf dreimal $I/3$. Die Berechnung des zwischen den beiden Würfelecken resultierenden Widerstands gründen wir auf die Überlegung, daß die Leistung eines beliebigen Stroms I, der durch eine Kombination von Widerständen fließt, ebenso groß sein muß wie die desselben Stroms, der durch einen Ersatzwiderstand R fließt (Bild 109c).

Wegen des Umstands, daß der Strom $I/3$ durch 6 Widerstände und der Strom $I/6$ ebenfalls durch 6 Widerstände fließt, können wir schreiben (Bild 109b)

$$RI^2 = 6R_0\left(\frac{I}{3}\right)^2 + 6R_0\left(\frac{I}{6}\right)^2,$$

d. h.,

$$RI^2 = \frac{6R_0I^2}{9} + \frac{6R_0I^2}{36}.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir den resultierenden Widerstand

$$R = \frac{2}{3}R_0 + \frac{1}{6}R_0 = \frac{5}{6}\cdot 6\,\Omega = \underline{5\,\Omega.}$$

236. In einer Schaltung (Bild 110) ist der Strom I zu bestimmen, wenn $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 10\,\Omega$ und $U = 24\,\text{V}$ betragen. Der innere Widerstand der Stromquelle ist zu vernachlässigen.

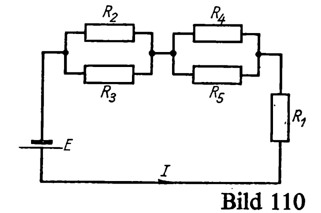


Bild 110

Lösung

Wir setzen die einzelnen Gruppen der parallelen Widerstände des Stromkreises zusammen, wodurch wir erhalten

$$R' = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = \frac{5\,\Omega\cdot 10\,\Omega}{5\,\Omega + 10\,\Omega} = \frac{50}{15}\,\Omega = 3{,}33\,\Omega,$$

$$R'' = \frac{R_4R_5}{R_4 + R_5} = \frac{10\,\Omega\cdot 10\,\Omega}{10\,\Omega + 10\,\Omega} = \frac{100}{20}\,\Omega = 5\,\Omega.$$

Die Widerstände R', R'' und R_1 sind in Serie geschaltet. Daher wird der Widerstand dieses Kreises

$$R = R' + R'' + R_1 = 3{,}33\,\Omega + 5\,\Omega + 10\,\Omega = 18{,}33\,\Omega.$$

Für den Strom I erhalten wir damit

$$I = \frac{U}{R} = \frac{24\,\text{V}}{18{,}33\,\Omega} = \underline{1{,}31\,\text{A}.}$$

237. Ein Gleichstrommotor nimmt den Strom $I = 10$ A auf und benötigt zu seinem Betrieb eine Spannung von 220 V. Welche Spannung U_0 muß man am Leitungsanfang haben, wenn der Gesamtwiderstand der Zuleitung den Wert $R = 1\,\Omega$ annimmt?

Lösung

Die am Leitungsanfang anliegende Spannung muß nicht nur die für den Betrieb des Motors notwendige Größe U haben, sondern auch den durch die Zuleitung bedingten

Spannungsabfall berücksichtigen (Bild 111):

$$U_0 = U_m + RI = 220\ \text{V} + 1\ \Omega \cdot 10\ \text{A} = \underline{230\ \text{V}}.$$

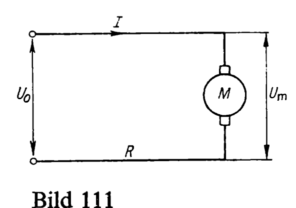


Bild 111

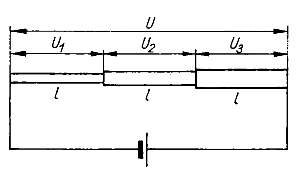


Bild 112

238. Ein elektrischer Stromkreis enthält drei Leiter gleicher Länge l, die, aus gleichem Material bestehend, hintereinandergeschaltet sind (Bild 112). Die Querschnitte der drei Leiter sind $A_1 = 1\ \text{mm}^2$, $A_2 = 2\ \text{mm}^2$, $A_3 = 3\ \text{mm}^2$. Die Potentialdifferenz an den Enden des Systems beträgt $U = 12$ V. Bestimmen Sie den Spannungsabfall in jedem einzelnen Leiter.

Lösung

Es ist zunächst der Widerstand der einzelnen Leiter aus der Beziehung zwischen geometrischen Größen (l, A) und dem spezifischen Widerstand ϱ zu bestimmen

$$R_1 = \varrho \frac{l}{A_1}; \quad R_2 = \varrho \frac{l}{A_2}; \quad R_3 = \varrho \frac{l}{A_3}.$$

Der Gesamtwiderstand aller drei in Serie geschalteten Leiter ist demnach

$$R = \varrho \frac{l}{A_1} + \varrho \frac{l}{A_2} + \varrho \frac{l}{A_3} = \varrho l \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} \right) =$$

$$= \varrho l \frac{A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3}{A_1 A_2 A_3}.$$

Durch jeden Leiter fließt gemäß Bild 112 der Strom

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U A_1 A_2 A_3}{\varrho l (A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_1 A_3)}.$$

Die Spannungsabfälle (ohmsche Verluste) längs der einzelnen Leiter sind entsprechend dem Ohmschen Gesetz durch die folgende Beziehung gegeben:

$$U_1 = R_1 I = \frac{\varrho l}{A_1} \frac{U A_1 A_2 A_3}{\varrho l (A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3)} = \frac{1}{A_1} \frac{U A_1 A_2 A_3}{A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3},$$

$$U_1 = \frac{1}{1\ \text{mm}^2} \frac{12\ \text{V} \cdot 1\ \text{mm}^2 \cdot 2\ \text{mm}^2 \cdot 3\ \text{mm}^2}{1\ \text{mm}^2 \cdot 2\ \text{mm}^2 + 1\ \text{mm}^2 \cdot 3\ \text{mm}^2 + 2\ \text{mm}^2 \cdot 3\ \text{mm}^2} =$$

$$= \frac{72\ \text{V}}{11} = \underline{6{,}545\ \text{V}},$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{72}{11} \text{V} = \frac{36}{11} \text{V} = \underline{3{,}273\ \text{V}}, \quad U_3 = \frac{1}{3} \frac{72}{11} \text{V} = \frac{24}{11} \text{V} = \underline{2{,}182\ \text{V}}.$$

239. Zwei Elemente haben je eine EMK von 1,5 V und einen inneren Widerstand $R_i = 1{,}4\,\Omega$. Sie sollen so miteinander verbunden werden, daß sie an einen Stromkreis mit dem Widerstand $R = 0{,}2\,\Omega$ einen möglichst großen Strom abgeben können.

Lösung

Bei einer Serienschaltung wird die EMK der gesamten Batterie

$$E_B = 2E,$$

und der innere Widerstand wird

$$R_{Bi} = 2R_i.$$

Es ergibt sich demnach ein Strom

$$I = \frac{2E}{2R_i + R} = \frac{2 \cdot 1{,}5\,\text{V}}{2 \cdot 1{,}4\,\Omega + 0{,}2\,\Omega} = 1\,\text{A}.$$

Bei einer Parallelschaltung ergeben sich die folgenden Verhältnisse:

$$E_B = E, \quad R_{Bi} = \frac{R_i}{2},$$

$$I = \frac{E}{\frac{R_i}{2} + R} = \frac{1{,}5\,\text{V}}{0{,}7\,\Omega + 0{,}2\,\Omega} = \underline{1{,}66\,\text{A}}.$$

Es ist also ersichtlich, daß man zur Erfüllung der in der Aufgabe gestellten Bedingung die beiden Elemente parallelschalten muß.

240. Auf welche Höchstspannung lädt sich ein Kondensator C auf, wenn die an das Netz geschaltete konstante EMK mit dem Wert E angegeben ist (Bild 113)?

Lösung

Durch den Kreis $E - R_1 - R_2$ fließt der Strom

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2},$$

der an den Klemmen des Widerstands R_2 (Klemmen $a - b$) die Ohmsche Spannung

$$U = IR_2 = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

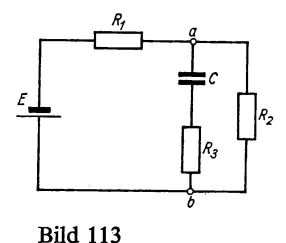


Bild 113

hervorruft. Auf die gleiche Spannung lädt sich auch der Kondensator C auf, da der Widerstand R_3 keinerlei Spannungsverlust bedingt, denn der Kondensator C unterbricht den Stromkreis, so daß zwischen den Klemmen a und b kein Strom fließt.

241. Ein prismatischer Körper aus Retortenkohle vom Querschnitt $bc = 3\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm}$ und einer Länge $a = 10\,\text{cm}$ ist an eine Spannung vom Wert $U = 10\,\text{V}$ angeschlossen (Bild 114). Es ist die elektrische Feldstärke und die Stromdichte im Innern des Prismas zu bestimmen. (Die spezifische Leitfähigkeit der Retortenkohle wird mit $\varkappa = 160\,\Omega^{-1}\,\text{cm}^{-1}$ angegeben.)

Lösung

Die elektrostatische Feldstärke berechnen wir als den auf die Längeneinheit bezogenen Spannungsabfall

$$E = \frac{U}{a} = \frac{10\,\text{V}}{0{,}1\,\text{m}} = \underline{100\,\text{Vm}^{-1}}.$$

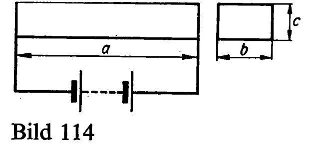


Bild 114

Die Stromdichte ist im Sinne ihrer Definition durch

$$i = \frac{I}{A} = \frac{I}{bc}$$

gegeben. Für den Strom selbst können wir schreiben

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\frac{1}{\varkappa}\frac{a}{bc}} = \frac{\varkappa U bc}{a}.$$

Für die Stromdichte erhalten wir dann

$$i = \frac{I}{bc} = \frac{\varkappa U bc}{abc} = \frac{\varkappa U}{a} = \frac{160\,\Omega^{-1}\,\text{cm}^{-1} \cdot 10\,\text{V}}{10\,\text{cm}} = \underline{160\,\text{A}\,\text{cm}^{-2}}.$$

242. Wieviel Trockenbatterien, deren jede eine EMK von $E = 4{,}5\,\text{V}$ bei einem inneren Widerstand $R_i = 3\,\Omega$ hat, muß man in Serie schalten, damit ein im Stromkreis enthaltenes Relais mit dem Widerstand $R = 3000\,\Omega$ anspricht, wenn dazu eine Stromstärke des Wertes $I = 0{,}025\,\text{A}$ erforderlich ist?

Lösung

Für den angegebenen Stromkreis können wir entsprechend dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz schreiben

$$nE = IR + InR_i$$

und nach Umformung

$$n(E - IR_i) = IR,$$

d. h.,

$$n = \frac{IR}{E - IR_i} = \frac{0{,}025\,\text{A} \cdot 3000\,\Omega}{4{,}5\,\text{V} - 0{,}025\,\text{A} \cdot 3\,\Omega} = \frac{75}{4{,}5 - 0{,}075} = \underline{16{,}95}.$$

Für die Realisierung der gestellten Aufgabe sind also 17 Trockenbatterien erforderlich.

243. Welchen Widerstand R_L muß man mit einer Akkumulatorenbatterie in Serie schalten, die sich aus $n = 20$ Elementen mit der jeweiligen EMK $E = 1{,}9$ V und dem inneren Widerstand $R_i = 0{,}01\ \Omega$ zusammensetzt und die mit einem Gleichstrom der Spannung $U = 110$ V aufgeladen werden soll, wobei der vorgeschriebene Ladestrom den Wert $I = 4$ A annimmt (Bild 115)?

Lösung

Für die EMK bzw. den inneren Widerstand der gesamten Batterie können wir schreiben

$$E_g = nE, \quad R_{gi} = nR_i.$$

Gemäß dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz gilt für den Stromkreis in Bild 115

$$IR_{gi} + IR_L = U - E_g.$$

Daraus erhalten wir den gesuchten Widerstand

$$R_L = \frac{U - E_g - IR_{gi}}{I} = \frac{U - nE - InR_i}{I} =$$

$$= \frac{110\ \text{V} - 20 \cdot 1{,}9\ \text{V} - 4\ \text{A} \cdot 20 \cdot 0{,}01\ \Omega}{4\ \text{A}} = \underline{17{,}8\ \Omega}.$$

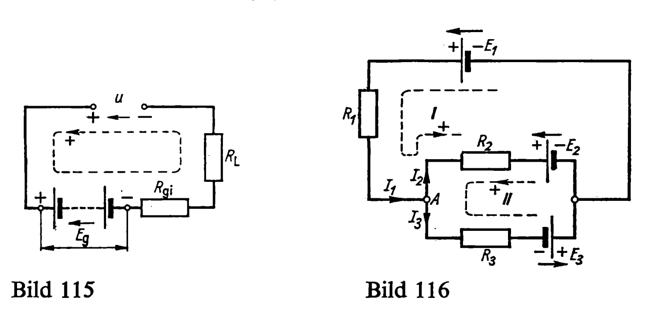


Bild 115 Bild 116

244. Es sind die Ströme in den einzelnen Verzweigungspunkten eines Stromkreises zu berechnen für den Fall, daß $E_1 = 12$ V, $E_2 = 4$ V, $E_3 = 6$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$ und $R_3 = 10\ \Omega$ beträgt (Bild 116).

Lösung

Wir wählen die positive Umlaufrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn für die Schleifen I und II. Weiterhin wählen wir die wahrscheinliche Richtung der Ströme I_1, I_2, I_3 und bezeichnen die positiven Richtungen der EMK so, daß sie im Kreis einen Strom vom positiven zum negativen Pol hervorrufen. Dann schreiben wir das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz so um, daß die Spannungen und die Ströme in der Richtung des gewählten positiven Umlaufs der betreffenden Schleife positiv sind. Das bedeutet für die Schleife I

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2,$$

Schleife II

$$E_2 + E_3 = R_3 I_3 - R_2 I_2,$$

Stromverzweigungspunkt A

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \text{ (1. Kirchhoffsches Gesetz)}$$

Wenn wir die vorgegebenen Zahlenwerte einsetzen, ergibt sich:
Schleife I

$$12\,\mathrm{V} - 4\,\mathrm{V} = 20\,\Omega\, I_1 + 12\,\Omega\, I_2,$$

Schleife II

$$4\,\mathrm{V} + 6\,\mathrm{V} = 10\,\Omega\, I_3 - 12\,\Omega\, I_2.$$

In der Beziehung für die Schleife I drücken wir den Strom I_1 mittels I_2, in der Beziehung für Schleife II den Strom I_3 ebenfalls mittels I_2 aus:

$$I_1 = \frac{8\,\mathrm{V} - 12\,\Omega\, I_2}{20\,\Omega} = 0{,}4\,\mathrm{A} - 0{,}6\, I_2,$$

$$I_3 = \frac{10\,\mathrm{V} + 12\,\Omega\, I_2}{10\,\Omega} = 1\,\mathrm{A} + 1{,}2\, I_2$$

und setzen die so erhaltenen Werte in die Beziehung für den Verzweigungspunkt A ein wodurch wir eine Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Größe I_2 erhalten:

$$0{,}4\,\mathrm{A} - 0{,}6\, I_2 - I_2 - (1\,\mathrm{A} + 1{,}2\, I_2) = 0,$$

woraus folgt

$$\underline{I_2 = -0{,}2143\,\mathrm{A}.}$$

Das negative Vorzeichen deutet an, daß der Strom tatsächlich in umgekehrter Richtung fließt, als wir zu Anfang annahmen. Die übrigen Ströme berechnen wir, indem wir den so gewonnenen Wert für I_2 in die entsprechenden Ausdrücke für I_1 und I_3 einsetzen, also

$$I_1 = 0{,}4\,\mathrm{A} - 0{,}6(-0{,}2143)\,\mathrm{A} = \underline{0{,}5286\,\mathrm{A},}$$

$$I_3 = 1\,\mathrm{A} + 1{,}2(-0{,}2143)\,\mathrm{A} = \underline{0{,}7429\,\mathrm{A}.}$$

245. Welchen Wert muß der Widerstand eines Shunts haben, durch den der Meßbereich eines Amperemeters mit dem inneren Widerstand $R_i = 0{,}2\,\Omega$ auf das $n = 5$fache vergrößert wird?

Lösung

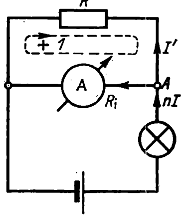


Bild 117

Wir können für den Verzweigungspunkt mit Hilfe des 2. Kirchhoffschen Gesetzes schreiben (Bild 117)

$$nI = I + I'.$$

Für die Schleife I gilt entsprechend dem 2. Kirchhoffschen Gesetz

$$0 = R_i I - R I'.$$

Aus beiden Beziehungen ergibt sich nach erfolgter Umstellung

$$R_i I = RI' = R(nI - I),$$

$$R_i I = I(n-1)R,$$

$$R_i = (n-1)R,$$

$$R = \frac{R_i}{n-1},$$

wobei n bedeutet, einen wieviel mal so großen Strom wir messen wollen, als das Instrument selbst es ermöglichen würde. Daher hat der erforderliche Shunt den Widerstand

$$R = \frac{R_i}{n-1} = \frac{0{,}2\,\Omega}{5-1} = \underline{0{,}05\,\Omega}.$$

246. Wie kann man den Meßbereich eines Voltmeters, das einen Innenwiderstand von $R_i = 100\,\Omega$ hat, so erweitern, daß der Grundmeßbereich mit dem Maximalwert $U = 10\,\text{V}$ auf den zehnfachen Wert $U' = 100\,\text{V}$ gesteigert wird?

Lösung

Wir wollen eine n mal so große Spannung ($U' = nU$) messen, als durch U angegeben wird. Dabei ist U diejenige Spannung, für die das Voltmeter berechnet ist. Dazu ist es notwendig, einen solchen Widerstand R mit dem Gerät in Serie zu schalten, der es erlaubt, in Übereinstimmung mit dem OHMschen Gesetz die Beziehung

$$nU = IR + IR_i \quad \text{(Bild 118)}$$

zu erfüllen. Da wir die Spannung U des Voltmeters mit dem Meßbereich von 10 V und einem inneren Widerstand R_i im OHMschen Gesetz durch die Beziehung

$$U = R_i I$$

ausdrücken, können wir weiter schreiben

$$nR_i I = IR + IR_i$$

und erhalten also

$$R = (n-1)R_i.$$

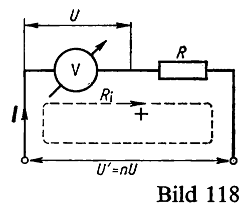


Bild 118

Da wir im vorliegenden Fall den Meßbereich des Voltmeters um

$$n = \frac{U'}{U} = \frac{100}{10} = 10$$

erweitern wollen, ist ein in Serie zu schaltender Widerstand

$$R = (10-1)\,100\,\Omega = \underline{900\,\Omega}$$

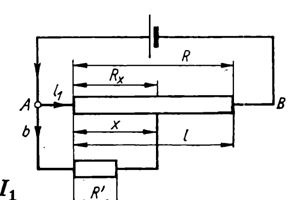
erforderlich.

247. Ein Rheostat mit dem Gesamtwiderstand R, an den eine Spannung U angelegt wurde, soll als Potentiometer zur Speisung eines Stromverbrauchers mit dem Widerstand R' verwendet werden. Eine Verschiebung des Schleifkontakts um die Strecke x verursacht bei einer Gesamtlänge l eine lineare Veränderung des Widerstands, nämlich

$$R_x = \frac{x}{l} R.$$

Es muß demnach (Bild 119) die am Stromverbraucher R' anliegende Spannung als Verhältnis der Strecken x/l zu bestimmen sein:

$$U_x = f\left(\frac{x}{l}\right),$$



$l_1 = I_1$
$b = I_2$

Bild 119

oder das Potentiometer muß so geeicht werden, daß an einer bestimmten Stellung des Schleifkontakts die am Verbraucher anliegende Spannung abgelesen werden kann.

Lösung

Unter Verwendung der Bezeichnungen in Bild 119 können wir gemäß dem OHMschen und dem KIRCHHOFFschen Gesetz schreiben

$$U = I_1 R_x + I(R - R_x),$$
$$0 = I_2 R' - I_1 R_x,$$
$$I = I_1 + I_2.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung drücken wir I, mit der zweiten I_2 aus und setzen die so gewonnenen Ausdrücke in die dritte Gleichung ein, wodurch wir erhalten

$$I = \frac{U - I_1 R_x}{R - R_x}, \qquad I_2 = \frac{I_1 R_x}{R'},$$

$$\frac{U - I_1 R_x}{R - R_x} = I_1 + \frac{I_1 R_x}{R'}.$$

Daraus folgt

$$I_1 = U \frac{R'}{(R' + R_x)(R - R_x) + R_x R'}$$

und schließlich

$$U_x = I_1 R_x = U \frac{R' R_x}{(R' + R_x)(R - R_x) + R_x R'}.$$

Wenn wir hier für R_x den Ausdruck $R_x = Rx/l$ einsetzen, erhalten wir nach Umformung schließlich als Endergebnis

$$U_x = U \frac{R' \dfrac{x}{l}}{R' + R\dfrac{x}{l} - R\left(\dfrac{x}{l}\right)^2}.$$

248. Welche Bedingungen müssen die in Bild 120 dargestellten Widerstände R_1, R_2, R_3 und R_4 erfüllen, damit in der WHEATSTONEschen Brücke durch den in der Diagonalen liegenden Widerstand R_5 kein Strom fließt?

Lösung

Für die beiden Stromkreise I und II in Bild 120, in denen wir die jeweils positive Umlauf richtung der Schleife entgegen dem Uhrzeigersinn gewählt haben, wenden wir da 2. KIRCHHOFFsche Gesetz an. Wir setzen dabei voraus, daß der durch den Widerstand R fließende Strom ein Nullstrom ist, d. h., daß hier $I = 0$ ist. Demnach gilt für den Strom kreis I

$$0 = R_3 I_3 - R_1 I_2 + R_5 \cdot 0,$$

für den Stromkreis II

$$0 = R_4 I_3 - R_2 I_2 + R_5 \cdot 0.$$

Daraus erhalten wir zwei weitere Gleichungen

$$R_1 I_2 = R_3 I_3; \quad R_2 I_2 = R_4 I_3$$

und durch deren gegenseitige Division

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Das ist nunmehr die Bedingung, die erfüllt sein muß, damit durch den Widerstand R_5 kein Strom fließt.

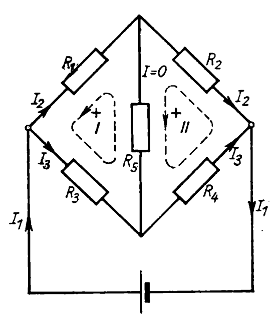
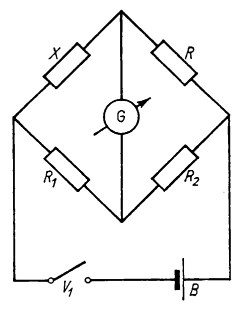


Bild 120

249. Wie kann der Widerstand R_G eines Galvanometers G, das entsprechend Bild 121 a in einer WHEATSTONEschen Brücke sitzt, gemessen werden, wenn kein anderes Galvanometer zur Verfügung steht?

Lösung

Die üblicherweise verwendete Schaltung der WHEATSTONEschen Brücke in Bild 121 a verändern wir nach Bild 121 b, oder wir schließen das Galvanometer dort an, wo sich



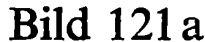


Bild 121 a

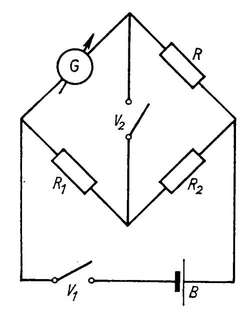


Bild 121 b

sonst der unbekannte Widerstand X befindet, und ordnen dafür in der Diagonalen einen weiteren Schalter V_2 an.
Wenn wir die Widerstände R_1 und R_2 so verändern, daß sich der Ausschlag des Galvanometers G beim Ein- und Ausschalten des Schalters V_2 nicht ändert, dann fließt in der Diagonalen offensichtlich kein Strom, und es gilt – wie das vorhergegangene Beispiel zeigt – die Beziehung

$$\frac{R_G}{R_1} = \frac{R}{R_2}.$$

Daraus ergibt sich für den Widerstand des Galvanometers die folgende Beziehung:

$$R_G = R\frac{R_1}{R_2}.$$

250. An einer Netzspannung von $U = 220$ V sind in einem Schulhaus $n = 20$ Glühlampen installiert, deren jede eine Leistung von $P = 60$ W aufnimmt. Die Anschlußleitung hat eine Länge $l = 25$ m. Wie groß muß die Querschnittsfläche A des Anschlußkabels sein, damit der von ihm hervorgerufene Spannungsabfall $p = 1{,}5\%$ nicht übersteigt? Die Leitung soll aus Kupfer bestehen.

Lösung

Der am Widerstand R der Zuleitung auftretende Spannungsabfall ΔU kann mit Hilfe des hindurchfließenden Stroms ausgedrückt werden

$$\Delta U = RI.$$

Dabei berechnen wir den Widerstand der Anschlußleitung aus der doppelten Länge der Leitung (Bild 122)

$$R = \varrho\frac{2l}{A}$$

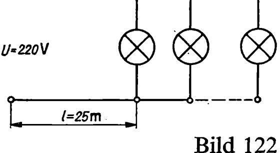


Bild 122

(l Länge, A Querschnitt, ϱ spezifischer Widerstand). Der Strom I kann wie folgt definiert werden:

$$I = \frac{P_g}{U} = \frac{nP}{U},$$

wobei P_g die Gesamtleistungsaufnahme aller Stromverbraucher darstellt, so daß wir nach dem Einsetzen von R und I für die Spannungsabnahme die Beziehung

$$\Delta U = \varrho\frac{2l}{A}\frac{Pn}{U}$$

erhalten. Die Spannungsabnahme ΔU können wir auch mit Hilfe der Prozentangabe p durch die Beziehung ausdrücken

$$\Delta U = U\frac{p}{100}.$$

Wenn wir beide die Spannungsabnahme enthaltenden Ausdrücke gleichsetzen, finden wir

$$\varrho \frac{2l}{A} \frac{Pn}{U} = U \frac{p}{100}.$$

Daraus ergibt sich

$$A = \frac{\varrho\, 2lPn}{U^2 p} \cdot 100 = \frac{0{,}0178\ \Omega\ \text{mm}^2\ \text{m}^{-1} \cdot 2 \cdot 25\ \text{m} \cdot 60\ \text{W} \cdot 20}{220^2\ \text{V}^2 \cdot 1{,}5} \cdot 100 =$$
$$= \underline{1{,}47\ \text{mm}^2}.$$

In der Praxis würden wir den nächsthöheren serienmäßig produzierten Querschnitt von 1,5 mm² verwenden.

251. Der Widerstand der Heizspirale in einem elektrischen Kocher hat den Wert $R = 16\ \Omega$. Nach wieviel Minuten beginnt eine Wassermenge der Masse $m = 0{,}6$ kg im Kocher zu sieden, wenn die Anfangstemperatur des Wassers mit $\vartheta_1 = 10$ °C angegeben ist? Der Wirkungsgrad des Kochers wird mit $\eta = 60\%$ und die Netzspannung mit $U = 120$ V angegeben.

Lösung

Die Wärmemenge, die für das Erhitzen von 600 g Wasser um eine Temperaturdifferenz von $\Delta\vartheta = 100\ °\text{C} - 10\ °\text{C} = 90$ grd bei hundertprozentigem Wirkungsgrad des Kochers benötigt würde, ist

$$Q' = cm\Delta\vartheta,$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität des Wassers darstellt. Bei einem nur 60%igen Wirkungsgrad des Kochers ist die Gesamtwärme, die vom Kocher geliefert wird, größer, nämlich

$$Q = \frac{Q'}{\eta} = \frac{cm\Delta\vartheta}{\eta}. \tag{1}$$

Andererseits berechnen wir die elektrische Energie aus

$$W = UIt = U\frac{U}{R}t = \frac{U^2}{R}t. \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen von Gl. (1) u. Gl. (2) und Berücksichtigung von

$$1\,\frac{\text{V}^2}{\Omega} = 1\ \text{W} = \frac{1}{4{,}1868}\ \text{cal s}^{-1} = 0{,}239\ \text{cal s}^{-1}$$

ergibt sich

$$t = \frac{cm\Delta\vartheta R}{\eta U^2} = \frac{1\ \text{cal g}^{-1}\ \text{grd}^{-1} \cdot 600\ \text{g} \cdot 90\ \text{grd} \cdot 16\ \Omega}{0{,}6 \cdot 120^2\ \text{V}^2 \cdot 0{,}239\ \text{cal W}^{-1}\ \text{s}^{-1}} = 419\ \text{s} \approx \underline{7\ \text{min}}.$$

252. Wenn eine Glühlampe bei einer Spannung $U = 120$ V mit einer Leistungsaufnahme $P = 100$ W betrieben wird, so ist der Widerstand ihres Glühfadens zehnmal so groß wie bei einer Temperatur von 0 °C. Wie groß ist der Widerstand der Glühlampe bei 0 °C,

und welcher Wert ergibt sich für den Temperaturkoeffizienten des Widerstands, wenn die Betriebstemperatur des Glühfadens bei $t = 2000$ °C liegt und wenn wir eine lineare Temperaturabhängigkeit des Widerstands annehmen können?

Lösung

Den Ausdruck für die Leistung eines elektrischen Stroms können wir mit Hilfe des OHMschen Gesetzes wie folgt umformen:

$$P = UI = U\frac{U}{R_t} = \frac{U^2}{R_t}.$$

Daraus ergibt sich der Widerstand des Glühfadens der Lampe im Betriebszustand zu

$$R_t = \frac{U^2}{P} = \frac{120^2\,\mathrm{V}^2}{100\,\mathrm{W}} = \frac{14400}{100}\,\Omega = 144\,\Omega.$$

Da der Widerstand des Glühfadens bei 0 °C nur ein Zehntel dieses Wertes betragen soll, gilt

$$R_0 = \frac{R_t}{10} = \frac{144}{10}\,\Omega = \underline{14{,}4\,\Omega.}$$

Den Temperaturkoeffizient α des Widerstands erhalten wir aus der bekannten Beziehung zwischen den Widerständen R_t und R_0

$$R_t = R_0\,(1 + \alpha t).$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $R_t = 10\,R_0$ ist, gilt

$$10R = R\,(1 + \alpha \cdot 2000\,\mathrm{grd})$$

und daraus

$$\alpha = \frac{10 - 1}{2000\,\mathrm{grd}} = \underline{4{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{grd}^{-1}.}$$

253. Ein Staubsauger, dessen Typenschild eine Netzspannung von $U' = 110$ V und eine Leistung von $P = 190$ W angibt, soll an ein Netz mit der Spannung $U = 220$ V angeschlossen werden. Wie groß muß der vorgeschaltete Widerstand sein (Bild 123)?

Lösung

Bild 123

Durch den Motor des Staubsaugers darf nur ein Strom vom Betrag

$$I = \frac{P}{U'} \tag{1}$$

fließen. Er soll am gesuchten Widerstand R den Spannungsabfall RI bewirken, der seinerseits gleich der Differenz zwischen Netzspannung U und Betriebsspannung U' sein muß, also

$$U - U' = R\,I.$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) folgt

$$U - U' = R\,\frac{P}{U'}\,.$$

Daraus erhalten wir den Wert des Widerstands zu

$$R = \frac{(U - U')U'}{P} = \frac{(220\ \text{V} - 110\ \text{V})\ 110\ \text{V}}{190\ \text{W}} = \underline{63{,}68\ \Omega}.$$

254. In welcher Weise muß man $n = 24$ Elemente mit jeweils einer EMK vom Wert $E = 1{,}5$ V und dem inneren Widerstand $R_i = 0{,}8\ \Omega$ in einem Stromkreis mit dem Widerstand $R = 1{,}2\ \Omega$ schalten, damit ein angeschlossener Stromverbraucher eine maximale Leistung aufnimmt? Welcher Strom fließt dann durch den Verbraucher?

Lösung

Wir setzen voraus, daß die resultierende Anordnung einer Batterie entspricht, die aus insgesamt m Reihen besteht, die zueinander parallelgeschaltet sind. Jede Reihe besteht ihrerseits aus n in Serie geschalteten Elementen (Bild 124). Die unbekannten Zahlenwerte m und n wird man unter Berücksichtigung der in der Aufgabe gestellten Bedingung ermitteln müssen.

Jede Reihe wird dann durch die EMK

$$E_E = nE \qquad (1)$$

und den inneren Widerstand

$$R_i^* = nR_i$$

gekennzeichnet sein.

Da die einzelnen Reihen parallelgeschaltet sind, wird auch die resultierende EMK der gesamten Batterie durch Gl. (1) angegeben sein. Jedoch wird der resultierende innere Widerstand der gesamten Batterie

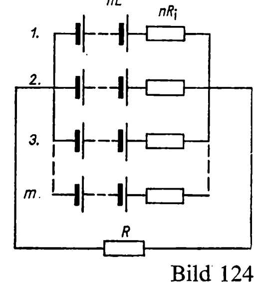


Bild 124

$$R_{ig} = \frac{R_i^*}{m} = \frac{nR_i}{m}\,.$$

Die Batterie wird imstande sein, an einen Stromkreis den Strom

$$I = \frac{nE}{R_{ig} + R} = \frac{nE}{\dfrac{nR_i}{m} + R} = \frac{nE}{\dfrac{n^2}{N} R_i + R} = \frac{nNE}{n^2R_i + NR}$$

abzugeben.

Die Leistung am Stromverbraucher wird durch folgende Beziehung ausgedrückt:

$$P = RI^2 = \frac{n^2N^2E^2R}{(n^2R_i + NR)^2}\,.$$

Für das Maximum der Leistung gilt

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0.$$

Demnach ist auch

$$\frac{(n^2R_i + NR)^2\, 2nN^2E^2R - n^2N^2E^2R\,(4n^3R_i^2 + 4nR_iNR)}{(n^2R_i + NR)^4} = 0.$$

Daraus folgt

$$-n^4R_i^2 + N^2R^2 = 0;$$

$$n^4 = \frac{N^2R^2}{R_i^2}; \quad n = \sqrt{\frac{NR}{R_i}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 1{,}2}{0{,}8}} = \underline{6};$$

$$m = \frac{N}{n} = \frac{24}{6} = \underline{4}.$$

Unter diesen Bedingungen ergibt sich für die Stromstärke

$$I = \frac{nNE}{n^2R_i + NR} = \frac{4 \cdot 24 \cdot 1{,}5\ \mathrm{V}}{16 \cdot 0{,}8\ \Omega + 24 \cdot 1{,}2\ \Omega} = \underline{3{,}75\ \mathrm{A}}.$$

255. Welche Kupfermenge wird innerhalb einer Zeit von 24 h durch einen Strom von 100 A Stärke aus einer Kupfervitriollösung ausgeschieden? (Das elektrochemische Äquivalent des Kupfers wird mit $\ddot{A} = 0{,}328$ mg A^{-1} s^{-1} angegeben.)

Lösung

Durch Verwenden des ersten FARADAYschen Gesetzes und Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir

$$m = \ddot{A}It = 0{,}328\ \mathrm{mg\ A^{-1}\ s^{-1}} \cdot 100\ \mathrm{A} \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s} = 2833920\ \mathrm{mg} = \underline{2{,}834\ \mathrm{kg}}$$

(I Stromstärke, t Zeit, m Masse des abgeschiedenen Stoffes, $\ddot{A}$ elektrochemisches Äquivalent des abzuscheidenden Stoffes).

256. Ein Metallgegenstand, der eine Oberfläche von 120 cm^2 hat, wurde galvanisch vernickelt, wobei ein Strom von 0,3 A während einer Zeit von 5 h floß. Berechnen Sie die Dicke der aufgetragenen Nickelschicht. (Nickel ist zweiwertig.)

Lösung

Wir wenden das FARADAYsche Gesetz an:

$$m = \ddot{A}It.$$

$\ddot{A}$ läßt sich durch die folgende Beziehung ausdrücken:

$$\ddot{A} = \frac{\alpha}{\nu F}$$

(α relative Atommasse, ν Wertigkeit, F FARADAYsche Zahl). Der Quotient α/ν ist das chemische Grammäquivalent.

Für die Masse des abgeschiedenen Metalls gilt

$$m = \frac{\alpha}{\nu F} It = \frac{58{,}69 \text{ g}}{2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^4 \text{ C}} 0{,}3 \text{ A} \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} \cdot 5 = \frac{316\,926 \text{ g}}{193000} = 1{,}643 \text{ g}.$$

Da wir die Masse m (in Gramm) als das Produkt aus der bekannten Fläche A (in cm^2), der spezifischen Dichte ϱ (in $g\,cm^{-3}$) und der gesuchten Schichtdicke d (in cm) ausdrücken können, wird

$$m = Ad\varrho,$$

so daß wir schließlich die gesuchte Schichtdicke erhalten

$$d = \frac{m}{A\varrho} = \frac{1{,}643 \text{ g}}{120 \text{ cm}^2 \cdot 8{,}8 \text{ g cm}^{-3}} = \underline{1{,}557 \cdot 10^{-3} \text{ cm}}.$$

257. Ein Gegenstand mit der Oberfläche $A = 20\ dm^2$ soll auf galvanischem Wege mit einer Silberschicht von $d = 0{,}2$ mm Dicke versehen werden. Wieviel Silber muß dazu aufgebracht werden, und wie lange wird der Galvanisierungsprozeß dauern, wenn man jeden Quadratdezimeter der Fläche mit einem Strom der Dichte $i = 0{,}4\ A\,dm^{-2}$ belasten kann?

Lösung

Zunächst ermitteln wir die notwendigerweise abzuscheidende Masse des Silbers. Für sie gilt

$$m = Ad\varrho = 20 \text{ cm}^2 \cdot 10^2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-1} \text{ cm} \cdot 10{,}5 \text{ g cm}^{-3} = 420 \text{ g} = \underline{420000 \text{ mg}}.$$

Die für den Galvanisierungsprozeß notwendige Zeitspanne bestimmen wir nach dem FARADAYschen Gesetz aus

$$t = \frac{m}{\ddot{A}iA} = \frac{420000 \text{ mg}}{1{,}118 \text{ mg A}^{-1} \text{ s}^{-1} \cdot 0{,}4 \text{ A dm}^{-2} \cdot 20 \text{ dm}^2} = \underline{46958 \text{ s}}.$$



Aufgaben

301. Welche elektrische Ladungsmenge liefert ein galvanisches Element, dem 20 h lang ein Strom von $I = 0{,}5$ A entnommen wird?
302. Wie lange dauert es, bis durch einen Strom von $I = 1{,}5$ A eine elektrische Ladung von 7000 C transportiert wird?
303. Die Wicklung eines elektrischen Gerätes wurde aus einem Leiter mit dem Querschnitt A hergestellt und soll den Strom $I = 3$ A aufnehmen. Wie groß muß der Querschnitt des Leiters sein, wenn die Stromdichte in ihm den Wert $i = 2{,}5\ A\,mm^{-2}$ nicht überschreiten soll?
304. Es soll ein Rheostat mit einem Widerstand von $0{,}2\ \Omega$ gebaut werden. Als Werkstoff steht ein Nickelinstreifen von 10 mm Breite und 0,5 mm Dicke zur Verfügung. Welche Länge muß der Nickelinstreifen erhalten? ($\varrho = 4 \times 10^{-5}\ \Omega$ cm)
305. Wie groß ist der spezifische Widerstand eines Leiters von 6 mm^2 Querschnitt, wenn wir auf $l = 500$ m Länge beim

Durchfluß des Stroms $I = 6$ A eine Spannung von $U = 14$ V messen?

306. Zur Herstellung einer elektrischen Leitung wurden 400 m Kupferdraht von 6 mm^2 Querschnitt verwendet. Welchen Widerstand hat diese Leitung?

307. Eine Leitung aus Kupferdraht hat bei einem Querschnitt von 0,1 mm^2 eine Masse von 0,3 kg. Berechnen Sie den Widerstand dieses Leiters, wenn der spezifische Widerstand des Kupfers mit $1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ cm und die Dichte mit 8,9 g cm^{-3} angegeben wird.

308. In welchem Verhältnis stehen die Massen einer Kupfer- und einer Aluminiumleitung, die bei gleicher Länge gleichen elektrischen Widerstand aufweisen sollen?

309. Eine Kupferleitung hat einen Querschnitt $A_1 = 25\ mm^2$. Welchen Querschnitt A_2 muß eine Aluminiumleitung haben, damit sie den gleichen elektrischen Widerstand bekommt?

310. Bei einer Temperatur von 15 °C hat eine Kupferleitung einen Widerstand von 21 Ω. Wie groß ist ihr Widerstand bei 30 °C?

311. Damit ein elektrischer Kocher die geforderte Leistung erreicht, muß er bei einer Betriebstemperatur $t = 700$ °C einen Widerstand $R = 24\ \Omega$ haben. Wie groß ist der Widerstand der Heizspirale bei $t_0 = 20$ °C, wenn der Temperaturkoeffizient des Widerstands den Wert $\alpha = 0{,}00002\ grd^{-1}$ hat?

312. Welche Temperatur hat eine Spule, die aus Kupferdraht von 350 m Länge und 1 mm^2 Querschnitt gewickelt wurde, wenn sie im Betriebszustand einen Widerstand von $R_t = 10{,}5\ \Omega$ aufweist?

313. Die Wicklung des Elektromagneten einer Dynamomaschine ist aus Kupferdraht hergestellt, der bei einer Temperatur $t_1 = 10$ °C einen Widerstand $R_1 = 14{,}2\ \Omega$ hat. Im Betriebszustand vergrößert sich der Widerstand der Wicklung auf den Wert $R_2 = 16{,}5\ \Omega$. Wie hoch ist die Betriebstemperatur?

314. a) Es ist die Differenz des Widerstands einer Telegrafenleitung für maximale Sommer- und minimale Wintertemperatur von +30 °C bzw. −30 °C zu errechnen. Der Leiter besteht aus einem 100 km langen Eisendraht von 10 mm^2 Querschnitt mit dem spezifischen Widerstand $\varrho = 8{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ cm, der Temperaturkoeffizient beträgt $\alpha = 6 \times \times 10^{-3}\ grd^{-1}$.
b) Wie ändert sich das Resultat der vorhergehenden Rechnung, wenn wir die bei der Erwärmung im Sommer eintretende Verlängerung des Drahtes berücksichtigen, die unter dem Einfluß eines Längenausdehnungskoeffizienten von $\alpha' = 12 \cdot 10^{-6}\ grd^{-1}$ erfolgt?

315. Vier Widerstände mit den Werten $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = = 4\ \Omega$ sind einmal in Serie, einmal parallel zu schalten. Es ist der jeweils resultierende Widerstand zu bestimmen.

316. Wie groß ist der resultierende Widerstand von 7 nach Bild 125 geschalteten Widerständen?
($R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = R_4 = = 100\ \Omega$, $R_5 = R_6 = R_7 = 5\ \Omega$)

317. Wie groß ist der Gesamtwiderstand der in Bild 126 dargestellten Widerstandskombination?

318. Ein 6-V-Autoakku versorgt eine Lampe mit 12 Ω, die Hupe mit 2 Ω und einen Scheinwerfer mit 1 Ω Widerstand. Wel-

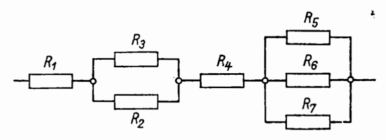


Bild 125

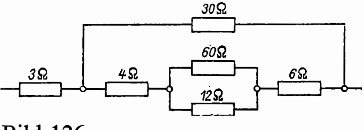


Bild 126

cher Gesamtstrom wird dem Akku bei gleichzeitiger Betätigung der drei parallelgeschalteten Verbraucher entnommen?

319. Eine Klingelbatterie versorgt über eine 85 m lange Doppelleitung von 0,9 mm Durchmesser (Kupferdraht) einen Wecker, dessen Spule einen Widerstand von 6 Ω hat und dabei einen Strom von 0,35 A aufnimmt. Wie groß muß die Spannung der Klingelbatterie sein?

320. Eine aus 50 hintereinandergeschalteten Elementen bestehende Batterie speist ein äußeres Netz, das aus einem 20 km langen Eisendraht von 3 mm² Querschnitt besteht und das einen Verbraucher mit einem Widerstand von 90 Ω enthält. Die EMK und der innere Widerstand jedes einzelnen Batterieelements betragen 1,4 V bzw. 0,4 Ω. Zu berechnen ist die Stromstärke unter der Maßgabe, daß Eisendraht vom spezifischen Widerstand $8{,}7 \cdot 10^{-6}$ Ω cm verwendet wird.

321. Die Pole eines LECLANCHÉ-Elements sind über einen Widerstand $R_0 = 3{,}1\,\Omega$ miteinander verbunden. Der innere Widerstand des Elements hat den Wert $R_i = 0{,}5\,\Omega$, und seine EMK beträgt 1,5 V. Welche Stromstärke stellt sich ein?

322. Eine Doppelleitung aus Kupferdraht mit einem Querschnitt $A = 10\,\text{mm}^2$ überträgt auf eine Entfernung von $l = 500$ m einen Strom von $I = 5$ A. Die Klemmenspannung am Anfang der Leitung hat den Wert $U = 220$ V. Wie groß ist die Klemmenspannung am Verbraucher? Wie groß ist der Spannungsverlust?

323. Ein Kupferseil besteht aus sieben Einzeldrähten von je 1,7 mm Durchmesser.
a) Wie groß ist der gesamte Widerstand des Seils bei einer Länge von 1000 m?
b) Aus dem Seil wird eine Doppelleitung hergestellt, die an ihrem Anfang eine Spannung von $U_1 = 220$ V aufweist. Wie groß wird die Spannung U_2 am Leitungsende sein, wenn durch den Leiter ein Strom von 10 A fließt?
c) Welche Stromstärke I_k wird diese Doppelleitung aufnehmen, wenn an ihrem Ende ein Kurzschluß eintritt?

324. Ein Voltmeter, das mit einem Widerstand $R = 10^4\,\Omega$ in Serie geschaltet wird, zeigt, an eine Spannungsquelle von $U_0 = 120$ V angeschlossen, eine Spannung vom Betrag $U_1 = 50$ V an. Wenn das gleiche Voltmeter mit einem unbekannten Widerstand R_x an gleicher Spannungsquelle in Serie geschaltet wird, zeigt es nur noch eine Spannung $U_2 = 10$ V an. Berechnen Sie den unbekannten Widerstand R_x.

325. Zwei Voltmeter mit gleichem Meßbereich, aber unterschiedlichem inneren Widerstand, und zwar $R_{i1} = 17300\,\Omega$ und $R_{i2} = 5200\,\Omega$, sind hintereinandergeschaltet und an eine Spannung von 220 V angeschlossen. Welche Ausschläge werden die beiden Voltmeter zeigen?

326. Eine Salzlösung mit dem Widerstand $R_1 = 1\,\Omega$ ist durch Kupferdrähte, deren Gesamtwiderstand $R_2 = 2\,\Omega$ beträgt, an ein DANIELL-Element mit einer EMK von 1,1 V und dem inneren Widerstand $R_i = 0{,}5\,\Omega$ angeschlossen. Welcher Strom fließt im Stromkreis, und wie groß ist die Klemmenspannung des Elements?

327. Drei galvanische Elemente mit den Urspannungen $E_1 = 1{,}3$ V, $E_2 = 1{,}5$ V und $E_3 = 2$ V haben die inneren Widerstände $R_{i1} = R_{i2} = R_{i3} = 0{,}2\,\Omega$ und sind gemäß Bild 127 miteinander verbunden. Der Widerstand beträgt $R = 0{,}55\,\Omega$. Es sind die Teilströme I_1, I_2, I_3 zu ermitteln.

328. Welche Ströme fließen durch die einzelnen Widerstände der in Bild 128 dargestellten Schaltanordnung, wenn $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 4\,\Omega$ und $E_1 = 4{,}5$ V, $E_2 = 2$ V groß ist? Welche Spannung liegt am Widerstand R_3 an?

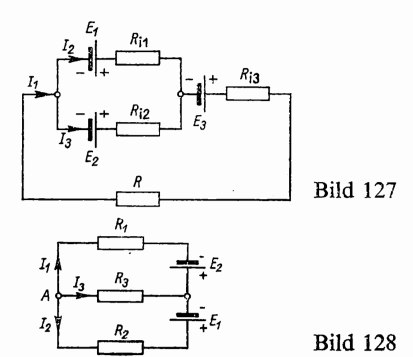


Bild 127

Bild 128

329. Ermitteln Sie die Stromstärken in den Verzweigungen der Schaltanordnung in Bild 129, wenn die EMK eines Elements den Wert $E_1 = 1{,}5$ V hat und wenn die drei Elemente in Serie geschaltet sind. Der innere Widerstand eines Elements beträgt 0,5 Ω. Die Widerstände in den Abzweigungen sind $R_1 = 4\,\Omega$ und $R_2 = 12\,\Omega$.

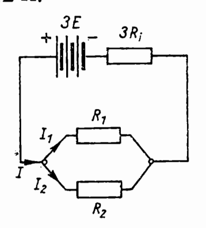


Bild 129

330. Ein Milliamperemeter, dessen Skale 100 Teilstriche enthält, hat einen inneren Widerstand $R_i = 10\,\Omega$ und soll bei einer Stromstärke $I' = 10$ mA a) als Voltmeter bis zur Spannung $U = 300$ V und b) als Amperemeter bis zur Stromstärke $I = 20$ A verwendet werden. Welcher Vorschaltwiderstand bzw. Shunt wird dazu erforderlich?
331. Ein Amperemeter hat einen Innenwiderstand von 0,02 Ω und erlaubt, Ströme bis zu 1,2 A Stärke zu messen. Wie muß ein Nebenwiderstand bemessen sein, damit man mit dem so veränderten Instrument Ströme bis zu einer Stärke von 6 A messen kann?
332. Ein Voltmeter mit einem Innenwiderstand von 3000 Ω hat einen Meßbereich bis 150 V und eine in 150 Teilstriche unterteilte Skale. Welcher Strom fließt durch das Voltmeter bei vollem Zeigerausschlag? Welcher Widerstand müßte vorgeschaltet werden, um den Meßbereich des Instruments auf 600 V zu erweitern? Welchen Wert zeigt dann ein einzelner Teilstrich noch an?
333. Welche Ladungsmenge fließt durch einen Leiter mit dem Widerstand $R = 10\,\Omega$ innerhalb einer Zeit von 20 s, wenn zwischen den Leiterenden eine Spannung von 12 V besteht? Welche Arbeit verrichtet dabei der Strom?
334. In einer Wohnung wird eine 25-W-Lampe täglich für die Dauer von vier Stunden betrieben. Was muß dafür monatlich bezahlt werden, wenn wir den Monat mit 30 Tagen ansetzen und der Preis für die Kilowattstunde Elektroenergie 0,08 M beträgt?
335. Welche Wärmemenge setzt ein elektrischer Kocher frei, der, an 120 V Spannung angeschlossen, drei Stunden lang von einem Strom der Stärke $I = 8{,}3$ A durchflossen wird?
336. Zwei Glühlampen von 100 bzw. 60 W Leistung sind an die gleiche Spannung angelegt. Welche von ihnen hat den größeren Widerstand?
337. Wie lange war ein elektrischer Kocher von 600 W Leistungsaufnahme eingeschaltet, wenn der Zähler einen Stromverbrauch von 1,8 kWh anzeigt?
338. Wie groß muß die Leistung eines elektrischen Kochers sein, wenn er zwei Liter Wasser von 10 °C innerhalb von 25 min auf 100 °C erhitzen soll, wobei von der vom Kocher aufgenommenen elektrischen Leistung nur 70% für die Erwärmung des Wassers wirksam werden?
339. Wie groß muß der Widerstand eines Stromverbrauchers sein, der bei einer Spannung von 220 V stündlich 880 kcal Wärme freisetzen soll?
340. Welcher Strom fließt durch einen elek-

trischen Kocher, der, mit einer Spannung von 120 V betrieben, innerhalb von drei Stunden 25 l Wasser um 50 °C erwärmt, wenn der Wirkungsgrad des Kochers mit 100% angenommen wird?

341. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines elektrischen Kochers, der, mit 220 V betrieben, bei einem Strom von 3 A einen Liter Wasser innerhalb 11 min von 18 °C bis zum Sieden erhitzt?

342. Die Leistung eines unbekannten Elektromotors soll ohne Verwendung eines Wattmeters bestimmt werden. Der Motor war im Gleichstrombetrieb 10 min angeschlossen, und ein Zähler zeigte einen Stromverbrauch von 0,1 kWh an.

343. Ein Elektromotor hat eine Leistung von 1,5 PS. Bei einer Spannung von 120 V nimmt er einen Strom von $I = 10$ A auf. Wie groß ist sein Wirkungsgrad? Was kostet der Stromverbrauch bei 8 h Betrieb, wenn für die Kilowattstunde ein Preis von 0,08 M berechnet wird?

344. Wie groß ist die Stromstärke, die ein 8-PS-Motor bei 220 V dem Netz entnimmt, wenn er voll belastet wird und sein Wirkungsgrad 82% erreicht?

345. Ein Elektromotor ist einem 440-V-Netz angeschlossen, dem er einen Strom von 20 A entnimmt. Wie groß ist seine Leistung, und was wird ein fünfstündiger Betrieb kosten, wenn eine Kilowattstunde mit 0,04 M berechnet wird?

346. An ein elektrisches Gleichstromnetz von 220 V Spannung ist ein 100-Ω-Widerstand angeschlossen. Welche Leistung nimmt er auf, und welche Menge Wasser könnte theoretisch innerhalb einer Stunde damit von 18 °C bis zum Sieden erhitzt werden?

347. Die zulässige Belastung eines Widerstands von 2000 Ω beträgt laut Angabe des Herstellerbetriebes $P = 4$ W. Welchen Strom darf man durch den Widerstand leiten?

348. Was kostet die elektrische Erwärmung eines Liters Wasser von 10 auf 100 °C, wenn der Preis für eine Kilowattstunde mit 0,08 M angegeben ist und der Wirkungsgrad der Vorrichtung 90% beträgt?

349. Wie muß man 48 gleichartige Elemente, jedes mit einem inneren Widerstand von 0,2 Ω, zu einer Batterie vereinigen, damit ein Außenwiderstand von 2,4 Ω eine maximale Leistung aufnehmen kann?

350. Welche Kupfermenge wird elektrolytisch aus einer Kupfervitriollösung ausgeschieden, durch die 24 h lang ein Strom von 100 A fließt?

351. Welche Stromstärke fließt durch einen Elektrolyten der Art $CuSO_4$, wenn innerhalb von 15 min 3 g Kupfer ausgeschieden werden?

352. Es sollen 25 Löffel, jeder mit einer Oberfläche von 0,8 dm², auf elektrolytischem Wege versilbert werden, wobei jeder Löffel eine Silbermenge von 5 g aufnimmt. Die zulässige Stromdichte beträgt 0,3 A dm⁻². Mit welcher Stromstärke muß gearbeitet werden, und wie lange dauert der Prozeß?

353. Ein zu versilbernder Gegenstand hat eine Oberfläche von 200 cm². Es wird mit einer Stromstärke von $I = 0{,}5$ A gearbeitet. Nach welcher Zeit erreicht die Silberschicht eine Dicke von 0,02 cm?

3.3. Elektromagnetismus

Die Kraft F_{12}, mit der zwei stromdurchflossene Leiter aufeinander wirken, kann man entsprechend den Vorstellungen von AMPÈRE aus der Beziehung errechnen (Bild 130):

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \vec{r}_{1,2})}{r^3},$$

($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs $A^{-1}m^{-1}$ **magnetische Feldkonstante**, bisher auch absolute Permeabilität oder Induktionskonstante genannt; I_1 und I_2 die Ströme in den beiden Leitern, $d\vec{s}_1$ und $d\vec{s}_2$ Leiterelemente, $\vec{r}_{1,2}$ der Ortsvektor des einen Leiters in bezug auf das entsprechende Element des anderen Leiters).

Dabei muß die Integration vollständig um beide Leiter ausgeführt werden.

Die **magnetische Induktion**, die der Strom I in einem bestimmten Raumpunkt, der durch den Ortsvektor $\vec{r}$ bezeichnet wird, erzeugt, wenn sich dieser Raumpunkt im Vakuum befindet, wird durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

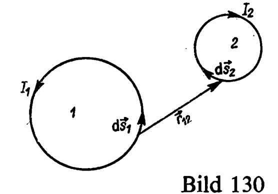


Bild 130

angegeben, das sog. **Biot-Savart-Laplacesche Gesetz.**

Dabei ergibt sich für die Größe $\vec{B}$ die Einheit $Vs\,m^{-2} = Wb\,m^{-2} = T$ (Tesla), wenn die einzelnen eingehenden Größen im Internationalen Einheitensystem ausgedrückt werden. Die Beziehung zwischen $Wb\,m^{-2}$ und der bislang oft angewendeten Einheit des CGS-Systems Gauß (G) ist wie folgt definiert:

$$1\,G = 10^{-4}\,Wb\,m^{-2}.$$

Auf das Element $d\vec{s}$ eines Leiters, das vom Strom I durchsetzt wird, wirkt ein Magnetfeld mit der Induktionsflußdichte (Induktion) $\vec{B}$ durch die Kraft

$$d\vec{F} = I\,d\vec{s} \times \vec{B}.$$

Der Zusammenhang zwischen dem Vektor der **magnetischen Induktion** $\vec{B}$ und dem Vektor der **magnetischen Feldstärke** $\vec{H}$ wird durch die Beziehung

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

angegeben, wobei μ die *Permeabilität* des betreffenden Stoffes

$$\mu = \mu_0\left(1 + \frac{\varkappa}{\mu_0}\right) = \mu_0\mu_r,$$

$\varkappa$ die *magnetische Suszeptibilität* des Mediums und μ_r die *Permeabilitätszahl* (bisher auch relative Permeabilität genannt) des Mediums bedeutet.

Im Internationalen Einheitensystem ist die Einheit der magnetischen Feldstärke das Am^{-1}. Jedoch wird oft auch noch die aus dem CGS-System stammende Einheit Oersted (Kurzzeichen Oe) verwendet, wobei der Zusammenhang beider Einheiten wie folgt definiert ist:

$$1\,Oe = \frac{10^3}{4\pi}\,A\,m^{-1}.$$

Unter dem Begriff **magnetischer Fluß** (Induktionsfluß) durch eine bestimmte Fläche verstehen wir die Größe

$$\Phi = \int \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{A}$$

wobei $\vec{B}$ die magnetische Induktion und $\mathrm{d}\vec{A}$ der Flächenvektor ist, der zum Flächenelement $\mathrm{d}A$ gehört. Wenn der Vektor $\vec{B}$ senkrecht zum Flächenelement $\mathrm{d}A$ gerichtet ist (d. h. parallel mit dem Vektor $\mathrm{d}\vec{A}$ verläuft), kann man schreiben

$$\mathrm{d}\Phi = B\, \mathrm{d}A.$$

Für den Fall, daß die magnetische Induktion B in jedem Punkt der Fläche A denselben Wert hat, gilt

$$\Phi = BA.$$

Dabei ergibt sich, wenn wir B und A gemäß dem Internationalen Einheitensystem einsetzen, für Φ die Einheit Weber (Wb). Bisher wurde auch noch die aus dem CGS-System stammende Einheit Maxwell (Mx) verwendet, für die gilt

$$1\ \mathrm{Mx} = 10^{-8}\ \mathrm{Wb}.$$

Wenn ein geschlossener Integrationsweg mit einem geschlossenen elektrischen Stromleiter gekoppelt ist, gilt die Durchflußgleichung

$$\oint \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{s} = N\mu_0 I$$

($\mathrm{d}\vec{s}$ Wegelement, I Stromstärke im Leiter, μ_0 magnetische Feldkonstante, wenn der Leiter im Vakuum angeordnet ist, N Zahl, die ausdrückt, wie oft der Integrationsweg den Leiter umschließt).

Die **Durchflußgleichung** kann man auch in der Form

$$\oint H\, \mathrm{d}s = NI$$

schreiben, wobei H die magnetische Feldstärke bedeutet. Den Wert des angegebenen Integrals bezeichnen wir auch als *magnetomotorische Kraft*.

Den **magnetischen Widerstand** R_m eines magnetischen Kreises berechnen wir nach der HOPKINSschen Formel

$$R_\mathrm{m} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$$

(μ Permeabilität des Mediums, aus dem der magnetische Kreis gebildet wurde, l seine Länge, A sein Querschnitt). Wenn ein Leiter der Länge l sich mit der Geschwindig-

keit v in einem homogenen magnetischen Feld der Induktion $\vec{B}$ senkrecht zu dieser bewegt, wird in ihm eine elektrische Spannung induziert, die gegeben ist durch

$$U_i = Blv.$$

Allgemein wird in einem geschlossenen Leiter immer dann eine Spannung induziert, wenn sich der Induktionsfluß, der durch die vom Leiter umschlossene Fläche strömt, verändert. Dabei ist die induzierte Spannung gleich dem negativen Wert der zeitlichen Ableitung des Induktionsflusses, der durch die vom Leiter umschlossene Fläche hindurchtritt, also

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Beim Anwenden dieser Beziehung muß man in Übereinstimmung mit ihrer Ableitung den magnetischen Induktionsfluß dann als negativ bezeichnen, wenn er auf die Seite der vom Leiter umschlossenen Fläche fließt, von der aus gesehen der Strom im Leiter entgegen dem Uhrzeigersinn gerichtet ist. Im anderen Fall ist der Induktionsfluß positiv.

Die **Selbstinduktionsspannung**, die durch zeitliche Änderung der Stromstärke I induziert wird, berechnen wir entsprechend der Beziehung

$$U_{si} = -L\frac{dI}{dt},$$

wobei L die *Induktivität* des Leiters ist, in dem die Selbstinduktion auftritt. Wir berechnen sie aus der Formel

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

so daß L eigentlich die Proportionalitätskonstante zwischen dem magnetischen Induktionsfluß Φ durch die von einem Leiter umschlossene Fläche und dem Strom I, der durch diesen Leiter fließt, darstellt.

Wenn in der Nähe eines Leiters *1* ein anderer Leiter *2* angeordnet ist, so wird in diesem eine Induktionsspannung U_{12} auftreten, wenn sich im Leiter *1* der Strom I_1 zeitlich ändert:

$$U_{12} = -L_{12}\frac{dI_1}{dt},$$

wobei L_{12} die *Wechselinduktivität* ist; sie ist eigentlich die Proportionalitätskonstante zwischen dem magnetischen Induktionsfluß Φ_{12}, der infolge der Existenz des Stroms I_1 im Leiter *1* durch die von Leiter *2* umschlossene Fläche tritt, und dem Strom I_1 selbst.

Deshalb gilt

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}.$$

Völlig analog wird im Leiter *1* bei einer Änderung des Stromes im Leiter *2* infolge der Wechselinduktivität die Spannung

$$U_{21} = -L_{21}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\,; \quad L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

induziert, wobei

$$L_{12} = L_{21}$$

ist.

Die **Energie des Magnetfeldes** eines elektrischen Stromes I, der durch einen Leiter fließt, dessen Induktivität mit L angegeben wird, berechnen wir aus

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

B Beispiele

258. Bestimmen Sie die magnetische Induktionsflußdichte und die magnetische Feldstärke im Abstand $l = 5$ cm von einem sehr langen, geraden Leiter, durch den ein Strom $I = 5$ A fließt.

Lösung

Wir gehen zunächst von der Definition der magnetischen Induktion aus

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}.$$

Da es sich um einen theoretisch unendlich langen Leiter handeln soll, können wir in Übereinstimmung mit den in Bild 131 verwendeten Bezeichnungen für den Wert der magnetischen Induktion schreiben:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s\sin\varphi}{r^2}.$$

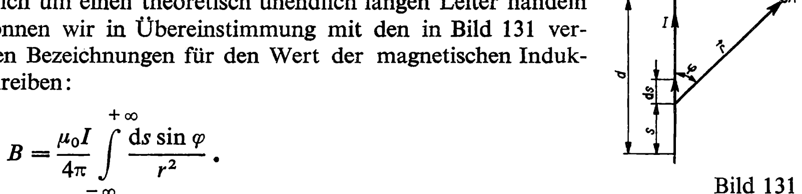


Bild 131

Aus Bild 131 folgt, daß

$$s = d - l\cot\varphi,$$

woraus sich ergibt

$$ds = \frac{l}{\sin^2 \varphi} \, d\varphi.$$

Des weiteren finden wir

$$r = \frac{l}{\sin \varphi},$$

so daß wir für den Wert der magnetischen Induktion erhalten:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{l}{\sin^2 \varphi} \, d\varphi \sin \varphi}{\frac{l^2}{\sin^2 \varphi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \, \mathrm{Vs \, A^{-1} \, m^{-1}} \cdot 5 \, \mathrm{A}}{2\pi \cdot 0{,}05 \, \mathrm{m}} = \underline{200 \cdot 10^{-7} \, \mathrm{Wb \, m^{-2}}}.$$

Die magnetische Feldstärke im Punkt A wird damit

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{I}{2\pi l} = \frac{5\mathrm{A}}{2\pi \, 0{,}05 \, \mathrm{m}} = \frac{100}{2\pi} \, \mathrm{A \, m^{-1}} = \underline{15{,}915 \, \mathrm{A \, m^{-1}}}.$$

Magnetische Induktion und Feldstärke sind senkrecht zur Zeichenebene orientiert und weisen im Punkt A in die Richtung hinter die Zeichenebene.

259. Bestimmen Sie die Werte der magnetischen Induktion und der Feldstärke im Zentrum eines ebenen, kreisförmigen Leiters vom Radius $r = 5$ cm, in dem ein Strom $I = 5$ A fließt.

Bild 132

Lösung

In Bild 132 betrachten wir zunächst die magnetische Induktion in einem Punkt A (= Kreismittelpunkt), die von einem infinitesimalen Leiterelement $d\vec{s}$ herrührt:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Da der Vektor des infinitesimalen Ringelements $d\vec{s}$ und der Ortsvektor $\vec{r}$ immer denselben Winkel von 90° einschließen, können wir schreiben

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{r^2}.$$

Die vom gesamten Leiter im Punkt A erzeugte Induktion nimmt den Wert

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

an und ist senkrecht zur Zeichenebene gerichtet.
Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs \cdot A^{-1}\ m^{-1} \cdot 5\ A}}{2 \cdot 0{,}05\ \mathrm{m}} = 0{,}2\pi \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Wb\,m^{-2}} =$$

$$= \underline{628 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}}.$$

Die magnetische Feldstärke im Punkt A beträgt

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2r} = \frac{5\ \mathrm{A}}{2 \cdot 0{,}05\ \mathrm{m}} = \underline{50\ \mathrm{A\,m^{-1}}}.$$

260. Berechnen Sie den Wert der magnetischen Induktion im Mittelpunkt einer einzigen Drahtwindung, welche die Form eines ebenen Quadrats mit der Seitenlänge l hat, durch die der Strom $I = 5$ A fließt.

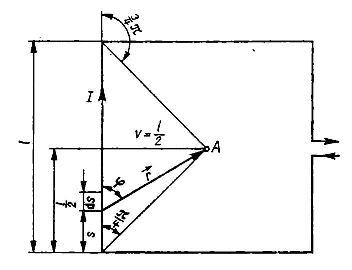


Bild 133

Lösung

Wir gehen wieder von der allgemeinen Beziehung für die Definition der magnetischen Induktion in Hinsicht auf einen Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ aus, wobei die magnetische Induktion von einem infini esimalen Leiterelement $\mathrm{d}\vec{s}$ herrührt:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Wenn wir den Winkel, den die beiden Vektoren $\mathrm{d}\vec{s}$ und $\vec{r}$ einschließen, mit φ bezeichnen, wird

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{r \sin\varphi\, \mathrm{d}s}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\sin\varphi\, \mathrm{d}s}{r^2}.$$

Aus Bild 133 wird ersichtlich, daß

$$s = \frac{l}{2} - v \cot\varphi; \quad \mathrm{d}s = \frac{v}{\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{l\,\mathrm{d}\varphi}{2\sin^2\varphi};$$

$$\sin\varphi = \frac{v}{r}; \quad r = \frac{v}{\sin\varphi} = \frac{l}{2\sin\varphi}.$$

Damit nimmt der von einer Seitenlänge l des Quadrats herstammende Anteil an der Gesamtinduktion den Wert an:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin\varphi \dfrac{l\,\mathrm{d}\varphi}{2\sin^2\varphi}}{\dfrac{l^2}{4\sin^2\varphi}} = \frac{2\mu_0}{4\pi l} I \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\left[-\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi},$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}.$$

Aus Gründen der Symmetrie können wir für die von dem ganzen Quadrat erzeugte Gesamtinduktion auch schreiben

$$B_{\text{ges}} = 4B = 4\,\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l} = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi l}.$$

Daraus erhalten wir nach dem Einsetzen der vorgegebenen Werte das Ergebnis für die im Zentrum des Quadrats wirkende Gesamtinduktion zu

$$B_{\text{ges}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 4\,\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Vs A}^{-1}\,\text{m}^{-1}\cdot 5\ \text{A}}{\pi\cdot 0{,}1\ \text{m}} = \underline{0{,}56\cdot 10^{-4}\ \text{Wb m}^{-2}}.$$

Die magnetische Induktion ist senkrecht zur Zeichenebene orientiert und zielt hinter diese.

261. Durch einen kreisförmigen Leiter mit dem Radius $r = 10$ cm fließt ein Strom $I = 2$ A. Berechnen Sie die Induktion des Magnetfeldes in einem Punkt A, der auf der Achse des kreisförmigen Leiters in einem Abstand $l = 10$ cm von diesem entfernt liegt (Bild 134).

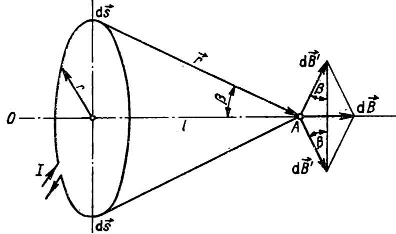


Bild 134

Lösung

Wir gehen wieder von der Beziehung

$$\mathrm{d}\vec{B}' = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}'}{4\pi\,r'^3}$$

aus. Da der Vektor $\mathrm{d}\vec{s}$ und der Ortsvektor $\vec{r}'$ stets einen Winkel von 90° einschließen, können wir schreiben

$$\mathrm{d}B' = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}s\,r'\sin 90°}{4\pi\,r'^3} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}s}{4\pi\,r'^2}.$$

Der angegebene Ausdruck gilt für die magnetische Induktion, die von einem im oberen Teil des kreisförmigen Leiters befindlichen Leiterelement ds ausgeht. Da die Vektoren der magnetischen Induktion, die im kreisförmigen Leiter zu symmetrisch liegenden Längenelementen ds gehören, gleich groß und symmetrisch zueinander sind, können wir den auf sie entfallenden Beitrag zur Induktion zusammenfassen im Ausdruck

$$\mathrm{d}B = 2\,\mathrm{d}B' \sin\beta = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}s \sin\beta}{2\pi\, r'^2}.$$

Aus Bild 134 wird auch die Richtung der resultierenden Induktion erkenntlich.
Die vom gesamten kreisförmigen Leiter herrührende Induktion erhalten wir durch Integration, wobei wir die aus dem Bild ersichtlichen Beziehungen

$$r' = \sqrt{r^2 + l^2} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

verwenden. Dann finden wir

$$B = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{2\pi\, r'^2} \int_0^{\pi r} \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{2\pi\, r'^2}\, \pi r$$

$$B = \frac{\mu_0 I \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}}{2(r^2 + l^2)}\, r = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} \cdot 2\,\mathrm{A} \cdot 0{,}1^2\,\mathrm{m^2}}{2\,(0{,}1^2\,\mathrm{m^2} + 0{,}1^2\,\mathrm{m^2})^{3/2}} = \underline{4{,}444 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}}.$$

262. Es ist die magnetische Induktion und die Feldstärke in der Mitte (Punkt 0) und an einem Ende (Punkt B) einer Spule der Länge $l = 1$ m zu berechnen, wenn die Anzahl der Windungen $N = 2000$ beträgt, der Radius der Windung $r = 2$ cm ist und ein Stromfluß von $I = 5$ A angenommen wird (Bild 135).

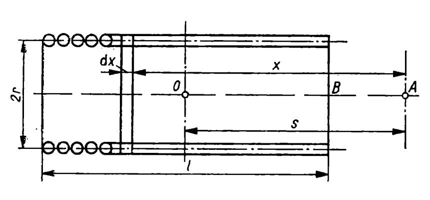


Bild 135

Lösung

Gemäß der im vorherigen Beispiel resultierenden Beziehung für die magnetische Induktion eines kreisförmigen Leiters können wir ansetzen, daß ein Spulenelement der Dicke dx in einem beliebigen, auf der Spulenachse gelegenen Punkt A eine magnetische Induktion von der Größe

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I r^2}{2\,(r^2 + x^2)^{3/2}}\, \frac{N}{l}\, \mathrm{d}x$$

hervorruft. Dabei ist x die Entfernung des Punktes A vom Ort des Spulenelements dx, auf der Spulenachse gemessen, und N/l stellt die auf die Längeneinheit der Spule ent-

fallende Zahl von Windungen dar. Die gesamte Spule erzeugt mithin im Punkt A, dessen Abstand vom Spulenmittelpunkt mit s angegeben ist, eine magnetische Induktion vom Betrag

$$B = \int\limits_{-\frac{l}{2}+s}^{+\frac{l}{2}+s} \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \frac{N}{l} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mu_0 IN}{2l} \left[\frac{\frac{l}{2} - s}{\sqrt{r^2 + \left(-\frac{l}{2} + s\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + s}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2} + s\right)^2}} \right].$$

Wenn wir die Formel für die resultierende Induktion in einem allgemeinen Punkt $s = 0$ bzw. $s = l/2$ einsetzen, so erhalten wir die entsprechenden Ausdrücke für die magnetische Induktion an den Orten O bzw. B.

a) $s = 0$:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{l\sqrt{1 + \left(\frac{2r}{l}\right)^2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} \cdot 5\,\mathrm{A} \cdot 2000}{1\,\mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)^2}} \approx \underline{4\pi \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}};$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{IN}{l\sqrt{1 + \left(\frac{2r}{l}\right)^2}} = \frac{5\,\mathrm{A} \cdot 2000}{1\,\mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)^2}} \approx \underline{10^4\,\mathrm{A\,m^{-1}}};$$

b) $s = \frac{l}{2}$:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2l\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} \cdot 5\,\mathrm{A} \cdot 2000}{2 \cdot 1\,\mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}02\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)^2}} \approx$$

$$\approx \frac{2\pi}{10^3} \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = \underline{2\pi \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb\,m^{-2}}};$$

$$H = \frac{IN}{2l\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} = \frac{5\,\mathrm{A} \cdot 2000}{2 \cdot 1\,\mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}02\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}\right)^2}} \approx \underline{0{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{A\,m^{-1}}}.$$

Es ist ersichtlich, daß im Falle b) die Werte für die magnetische Induktion bzw. die Feldstärke annähernd halb so groß sind wie in der Spulenmitte.

263. Eine Tangentenbussole mit $z = 5$ Windungen und einem Radius $R = 10$ cm befindet sich im Magnetfeld der Erde, das eine Horizontalkomponente der Stärke $H_2 = 0{,}2$ Oe hat. Dabei ist die Tangentenbussole so angeordnet, daß die Richtung der irdischen Horizontalkomponente gerade in die Ebene der Bussolenwicklung fällt. Nach Ein-

schalten des Stroms weicht die Magnetnadel aus ihrer ursprünglichen Lage um einen Winkel $\varphi = 45°$ ab (Bild 136). Berechnen Sie den Strom, der durch die Windungen der Bussolenwicklung fließt.

Lösung

In dem Moment, wo durch die Bussolenwicklung ein Strom fließt, wirkt auf die in ihrem Innern gelagerte Magnetnadel außer der Horizontalkomponente $\vec{H}_2$ der Feldstärke des irdischen Magnetfeldes auch noch ein Magnetfeld der Stärke H_1, das durch den Strom hervorgerufen wird, der die Wicklung der Bussole durchfließt.
Der Feldstärkevektor $\vec{H}_1$ des Magnetfeldes ist senkrecht zur Ebene der Windungen orientiert und damit auch senkrecht zur irdischen Horizontalkomponente $\vec{H}_2$. Die Magnetnadel richtet sich also in die Richtung der resultierenden Gesamtfeldstärke $\vec{H}$ aus.
Sie weicht aus ihrer Anfangslage um einen Winkel φ ab, für den gilt

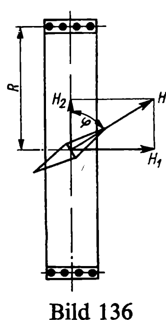


Bild 136

$$\tan\varphi = \frac{H_1}{H_2}\,.$$

In Beispiel 262 haben wir für die Feldstärke im Innern einer Spule ($s = 0$) die Beziehung

$$H = \frac{IN}{l\sqrt{1+\left(\dfrac{2r}{l}\right)^2}} = \frac{IN}{\sqrt{l^2+(2r)^2}}$$

abgeleitet. Für eine sehr kurz gebaute Spule können wir aber die Größe l^2 gegenüber $(2r)^2$ vernachlässigen. Wir finden deshalb

$$H_1 = \frac{IN}{2r}$$

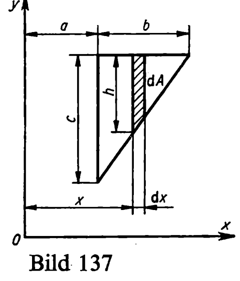


Bild 137

(N Zahl der Windungen, I durch die Bussole fließender Strom, r Spulenradius). Für den gesuchten Strom erhalten wir demnach den Ausdruck

$$I = \frac{2H_2 r\tan\varphi}{N} = \frac{2\cdot 0{,}2\,\dfrac{10^3}{4\pi}\,\dfrac{\text{A}}{\text{m}}\cdot 0{,}1\,\text{m}\cdot\tan 45°}{5} = \underline{0{,}636\,\text{A}}.$$

264. Wie groß ist der magnetische Induktionsfluß Φ durch eine Fläche von der Form eines rechtwinkligen Dreiecks, die sich in einem Magnetfeld befindet, dessen Induktionsflußdichte $\vec{B}$ sich mit dem Abstand gemäß der Beziehung $B = C/x$ (Bild 137) ändert? Das Dreieck habe die Katheten $b = 10$ cm und $c = 10$ cm. Die Kathete c ist $a = 8$ cm von der Ordinatenachse entfernt. Es ist $C = 10^{-4}$ Vs m^{-1}. Das Magnetfeld soll senkrecht zur x,y-Ebene, in der das Dreieck liegt, orientiert sein.

Lösung

Da die magnetische Induktion sich hier von Punkt zu Punkt ändert, müssen wir von der Beziehung ausgehen

$$\mathrm{d}\vec{\Phi} = \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}.$$

Der Vektor $\vec{B}$ und der Vektor $\mathrm{d}\vec{A}$ (senkrecht zur Dreiecksfläche gerichtet) verlaufen parallel zueinander, so daß wir schreiben können

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}A \cos 0° = B\,\mathrm{d}A.$$

Da gemäß Bild 137 $B = C/x$ und $\mathrm{d}A = h\,\mathrm{d}x$ ist, können wir auch schreiben

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{C}{x} h\,\mathrm{d}x.$$

Die Größe h ermitteln wir aus der Proportion

$$h:c = (a + b - x):b,$$

d. h.,

$$h = \frac{c(a + b - x)}{b},$$

so daß sich ergibt

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{C}{x}\,\frac{c(a + b - x)}{b}\,\mathrm{d}x.$$

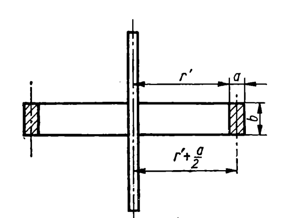


Bild 138

Damit können wir jetzt den gesamten Induktionsfluß, der durch die Dreiecksfläche tritt, bestimmen:

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{C}{x}\,\frac{c(a + b - x)}{b}\,\mathrm{d}x = \frac{Cc(a + b)}{b}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{Cc}{b}\int_a^{a+b}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{Cc(a + b)}{b}\ln\frac{a + b}{a} - \frac{Cc}{b}b = Cc\left(\frac{a + b}{b}\ln\frac{a + b}{a} - 1\right) =$$

$$= 10^{-4}\,\mathrm{Wb\,m^{-2}} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}\left(\frac{0{,}08\,\mathrm{m} + 0{,}1\,\mathrm{m}}{0{,}1\,\mathrm{m}}\,2{,}3\lg\frac{0{,}08\,\mathrm{m} + 0{,}1\,\mathrm{m}}{0{,}08\,\mathrm{m}} - 1\right) =$$

$$= \underline{0{,}458 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb}}.$$

265. Es ist der magnetische Induktionsfluß zu bestimmen, der durch die Querschnittsfläche eines Stahlreifens tritt, wenn dieser nach Bild 138 die Abmessungen $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $r' = 49$ cm hat. Der Induktionsfluß soll durch einen Kurzschlußstrom von $I = 300$ A hervorgerufen werden, der durch einen Leiter in der Symmetrieachse des Reifens fließt. Im gesamten Reifenquerschnitt soll die magnetische Feldstärke denselben Wert haben, den sie auch in der Reifenmitte hat.

Lösung

Wir bestimmen zunächst die magnetische Feldstärke in der Umgebung eines Leiters, durch den ein Strom I fließt, für einen Punkt, der vom Stromleiter den Abstand $(r' + a/2)$ hat, also für einen Punkt in der Mitte der Reifendicke:

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi\left(r' + \frac{a}{2}\right)} = \frac{300\ \mathrm{A}}{2\pi\,(0{,}49\ \mathrm{m} + 0{,}01\ \mathrm{m})} = 95{,}54\ \mathrm{A\ m^{-1}}.$$

Bei dieser Feldstärke entsteht im Stahl eine magnetische Induktion $B \approx 0{,}2\ \mathrm{Wb\ m^{-2}} = 2000\ \mathrm{G}$. Diesen Wert erhalten wir aus der Magnetisierungskurve des entsprechenden Werkstoffs (Bild 139). Damit finden wir den magnetischen Induktionsfluß zu

$$\Phi = BA = 0{,}2\ \mathrm{Wb\ m^{-2}} \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} \cdot 0{,}03\ \mathrm{m} = \underline{1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Wb}}$$

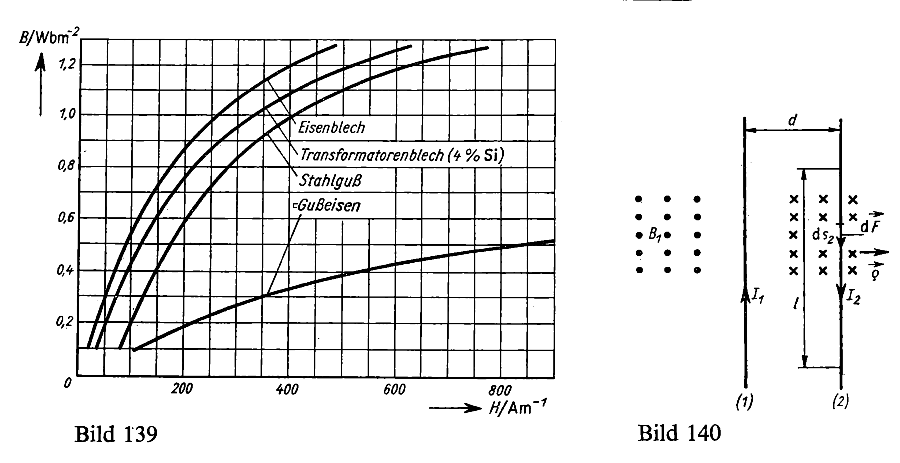


Bild 139 Bild 140

266. Durch zwei lange, gerade, parallel zueinander verlaufende elektrische Leiter fließen zwei gleich große Ströme mit entgegengesetzter Richtung, jeder vom Betrag $I = 400$ A. Die beiden Leiter haben voneinander den Abstand $d = 0{,}3$ m. Bestimmen Sie die Größe und die Richtung der jeweils auf eine Drahtlänge von 10 m wirkenden Kraft.

Lösung

Ausgehend von Bild 140 lösen wir die Aufgabe so, daß wir zunächst die auf den Leiter *2* wirkende Kraft bestimmen, die auftritt, wenn durch ihn der Strom I_2 fließt, während er sich in einem Magnetfeld mit der Induktion $\vec{B}$ befindet, die durch den im Leiter *1* fließenden Strom I_1 hervorgerufen wird. Für diesen Fall ist die auf ein Leiterelement $d\vec{s}_2$ wirkende Kraft durch folgende Beziehung angegeben:

$$d\vec{F} = (I_2\, d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1).$$

Weiter ist uns bekannt, daß die magnetische Induktion in der Umgebung eines sehr langen Leiters (vgl. Beispiel 258) den Wert

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

annimmt. Das in der Formel für die Kraft stehende Vektorprodukt können wir ausrechnen, wenn wir berücksichtigen, daß die kreisförmigen magnetischen Feldlinien in der Umgebung des Leiters *1* senkrecht zum Leiter *2* orientiert sind, also daß auch $d\vec{s}_2$ und $\vec{B}_1$ senkrecht aufeinander stehen, so daß sich ergibt

$$\vec{F} = \int_0^l (I_2\, d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1) = \int_0^l I_2\, ds_2 B_1 \sin 90^\circ\, \vec{\varrho} = \mu_0 I_1 I_2 \frac{l}{2\pi d}\, \vec{\varrho},$$

wobei $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor in Richtung der wirkenden Kraft ist. Da die Ströme gleich sind, $I_1 = I_2 = 400$ A betragen, erhalten wir nach Einsetzen aller Größen

$$F = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs A}^{-1}\ \text{m}^{-1} \cdot 400\ \text{A} \cdot 400\ \text{A} \frac{10\ \text{m}}{2\pi \cdot 0{,}3\ \text{m}} = \underline{1{,}066\ \text{N}}.$$

Die Richtung der Kraft und ihres Einheitsvektors ist durch die Richtung des Resultats der Vektormultiplikation gegeben

$$I_2\, d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1,$$

d. h., die resultierende Kraft ist senkrecht sowohl zum Leiterelement $d\vec{s}_2$ als auch senkrecht zu $\vec{B}_1$ gerichtet, was auch mit der „Linke-Hand-Regel" übereinstimmt. Die Richtung der Kraft ist also derart, daß die beiden stromdurchflossenen Leiter auseinandergedrückt werden.

267. Welche Kraft wirkt auf einen Leiter der effektiven Länge $s = 0{,}3$ m, der in einem homogenen Magnetfeld mit der Induktionsflußdichte $B = 0{,}8\ \text{Vs m}^{-2}$ von einem Strom $I = 150$ A durchflossen wird, wenn er senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion angeordnet ist?

Lösung

Die Kraft, mit der ein Magnetfeld der Induktion $\vec{B}$ auf ein Leiterelement der Länge $d\vec{s}$ wirkt, das von einem Strom I durchflossen ist, wird durch die Beziehung

$$d\vec{F} = I\, d\vec{s} \times \vec{B}$$

angegeben. Wenn der gerade Leiter senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld angeordnet ist, vereinfacht sich die Beziehung zu

$$F = BIs.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir

$$F = 0{,}8 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} 150\ \text{A} \cdot 0{,}30\ \text{m} = \underline{36\ \text{N}}.$$

268. In einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion $B = 2000$ G befindet sich eine flache, rechteckige Spule, die 50 Windungen trägt. Die Abmessungen der Spule sind $a = 3$ cm, $b = 2$ cm. Das Magnetfeld verläuft parallel zur kürzeren Spulenseite (Bild 141). Wie groß ist das Moment des auf die Spule einwirkenden Kräftepaares, wenn durch die Spule ein Strom der Stärke $I = 4$ A fließt?

Lösung

Die auf die einzelnen Leiterabschnitte wirkende Kraft ist

$$d\vec{F} = I\, d\vec{s} \times \vec{B}.$$

Auf die Leiter der Länge b wirkt keinerlei Kraft ein, da sie genau in Feldrichtung gelegen sind. Aber auf die Leiter der Länge a wirken gleich große Kräfte aus entgegengesetzten Richtungen, wodurch ein Kräftepaar entsteht, das die Spule um die Achse *00*, die durch die Mitten der Seitenlängen b verläuft, zu drehen bestrebt ist.
Die auf den Leiter der Länge a, der senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion orientiert ist, wirkende Kraft hat den Wert

$$F = BIa,$$

und auf 50 solcher Leiter wirkt dann insgesamt

$$F_{50} = 50\, BIa.$$

Die Größe des Moments eines Kräftepaares ist durch das Produkt einer Kraft und des senkrecht gemessenen Abstands zweier Kräfte gegeben, also in unserem Falle

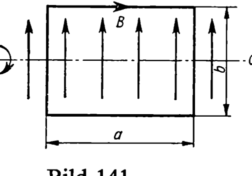


Bild 141

$$M = F_{50}b = 50\, BIab.$$

Da $1\text{ G} = 10^{-4}\text{ Wb m}^{-2}$ ist, wird

$$M = 50\, BIab = 50 \cdot 2000 \cdot 10^{-4}\text{ Vs m}^{-2} \cdot 4\text{ A} \cdot 0{,}03\text{ m} \cdot 0{,}02\text{ m} =$$

$$= 240 \cdot 10^{-4}\text{ Nm} = 0{,}024\text{ Nm}.$$

Und da weiterhin $1\text{ N} = {}^{1}/_{9,81}$ kp ist, ergibt sich das Moment zu

$$M = \frac{0{,}024}{9{,}81}\text{ kp m} \approx \underline{0{,}0024\text{ kpm}}.$$

269. Eine kreisförmige Leiterwindung vom Radius $r = 6$ cm wird vom Strom $I = 50$ A durchflossen, während sie sich in einem Magnetfeld der Stärke $H = 6000$ Oe befindet. Es ist das auf die Spule wirkende Drehmoment für zwei verschiedene Stellungen zu bestimmen:
a) die Spulenebene liegt parallel zur Feldrichtung,
b) die Normale der Spulenebene schließt mit der Feldrichtung einen Winkel $\beta = 30°$ ein.

Lösung

Wir gehen wieder von der Beziehung

$$d\vec{F} = I\, d\vec{s} \times \vec{B}$$

aus bzw. von

$$dF = I\, ds\, B \sin \varphi.$$

Aus Bild 142a entnehmen wir $ds \cdot \sin \varphi = dx$, können also weiter schreiben

$$dF = IB\, dx.$$

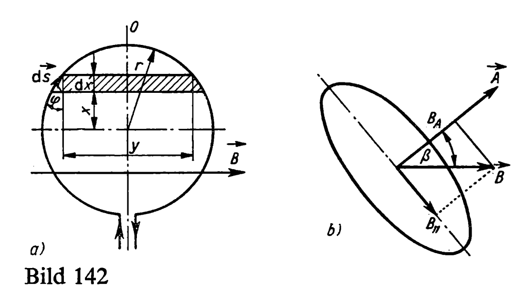


Bild 142

Da eine gleich große Kraft von entgegengesetzter Richtung auf das bezüglich der O-Achse symmetrisch gelegene Leiterelement wirkt, das vom gleichen Strom in umgekehrter Richtung durchflossen wird, wirkt auf beide mechanisch verbundene Leiterelemente ein Kräftepaar mit dem Moment

$$dM = dFy = IBy\, dx = IB\, dA,$$

wobei $dA = y\, dx$ die in Bild 142a schraffiert gezeichnete Fläche ist.
Das Moment der auf die gesamte Windung wirkenden Kräfte erhalten wir durch Integration zu

$$M = IBA = \mu_0 HIA,$$

wobei A die gesamte, von der Leiterschleife umschlossene Fläche darstellt. Der abgeleitete Ausdruck gilt für den Fall, daß die Windungsebene in die Richtung der magnetischen Induktion fällt.
Wenn aber der Vektor der magnetischen Induktion $\vec{B}$ mit dem Normalenvektor $\vec{A}$ der Fläche den Winkel β einschließt (Bild 142b), müssen wir den Vektor der Induktion in zwei Komponenten zerlegen: in die Richtung des Normalenvektors ($\vec{B}_A$) und in die Richtung der Fläche selbst ($\vec{B}_{||}$). Während die Komponente $\vec{B}_A$ solche Kräfte hervorruft, welche die Windung einem allseitigen Druck aussetzen, also keinerlei Drehwirkung auslösen, gilt für die Komponente $\vec{B}_{||}$

$$|\vec{B}_{||}| = B \sin \beta.$$

Den Wert dieser Komponente setzen wir an Stelle von B in den Ausdruck für das Drehmoment M ein und erhalten

$$M = IAB \sin \beta = \mu_0 HIA \sin \beta.$$

Durch Einsetzen der gegebenen Werte ergeben sich für die beiden in der Aufgabe genannten Sonderfälle folgende Rechnungen:

a) $$M = \mu_0 HIA = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs A}^{-1}\ \text{m}^{-1} \cdot 6000 \frac{10^3}{4\pi} \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 50\ \text{A} \cdot \pi \cdot 0{,}06^2\ \text{m}^2 =$$

$$= 0{,}339\ \text{Nm} = \frac{0{,}339}{9{,}81}\ \text{kp m} \approx \underline{0{,}0346\ \text{kp m}};$$

b) $$M = \mu_0 HIA \sin\beta = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs A}^{-1}\ \text{m}^{-1} \cdot 6000 \frac{10^3}{4\pi} \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 50\ \text{A} \cdot \pi \times$$

$$\times\ 0{,}06^2\ \text{m}^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}169\ \text{Nm} = \frac{0{,}169}{9{,}81}\ \text{kp m} = \underline{0{,}0173\ \text{kp m}}.$$

270. Ein Leiter in Gestalt zweier kreisförmiger Windungen mit dem Radius $r = 5$ cm liegt in einem Magnetfeld, dessen Induktion den Wert $B = 0{,}6\ \text{Wb m}^{-2}$ hat, senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion. Welche Spannung wird in einem solchen Leiter induziert, wenn das Magnetfeld innerhalb einer Zeitspanne von 0,5 s gleichförmig abgebaut wird?

Lösung

Da entsprechend dem Induktionsgesetz die induzierte Spannung gleich der negativen Änderung des Induktionsflusses in der Zeit ist, wird

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi - \Phi_0}{\Delta t}.$$

Nach Ablauf der Zeit Δt ist $\Phi = 0$. Zu Beginn des Vorgangs, da die beiden Windungen sich noch im vollen Magnetfeld befinden, gilt

$$\Phi_0 = NAB$$

(N Windungszahl, A Fläche der Windung). Es ergibt sich somit

$$\Phi_0 = 2\pi r^2 B = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}05^2\ \text{m}^2 \cdot 0{,}6\ \text{Wb m}^{-2} = 0{,}00942\ \text{Wb}.$$

Für den Wert der induzierten Spannung erhalten wir schließlich

$$U_i = -\frac{(0 - 0{,}00942)\ \text{Wb}}{0{,}5\ \text{s}} = \underline{0{,}01884\ \text{V}}.$$

271. Eine rechteckig geformte Leiterschleife (Bild 143) wird, in einem Magnetfeld der Feldstärke $H = 5000$ Oe liegend, mit einer Frequenz $f = 30\ \text{s}^{-1}$ um ihre Seite a gedreht. Welche mittlere Spannung wird während einer halben Umdrehung in der Leiterschleife induziert? ($a = 0{,}3$ m, $b = 0{,}2$ m)

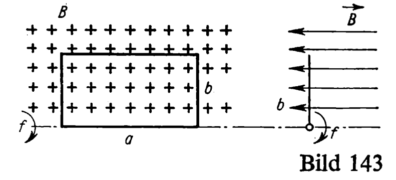


Bild 143

Lösung

Eine halbe Umdrehung wird in der Zeit

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\frac{1}{f} = \frac{1}{2f}$$

ausgeführt. Während dieser Zeitspanne ändert sich der Induktionsfluß vom Wert Φ_m auf den Wert $-\Phi_m$, also um den Betrag

$$\Delta\Phi = \Phi_m - (-\Phi_m) = 2\Phi_m,$$

so daß wir, entsprechend dem Induktionsgesetz, die gesuchte mittlere Induktionsspannung wie folgt erhalten:

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{dt} = -\frac{2\Phi_m}{0 - \frac{1}{2f}} = 4f\,\Phi_m.$$

Da $\Phi_m = B_m A$ und die Gesamtfläche $A = ab$ ist, erhalten wir für die mittlere induzierte Spannung

$$U_i = 4fB_m ab = 4abf\mu_0 H = 4 \cdot 30\,\text{s}^{-1} \cdot 0{,}3\,\text{m} \cdot 0{,}2\,\text{m} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{Vs A}^{-1}\text{m}^{-1} \times$$
$$\times\, 5000\frac{10^3}{4\pi}\frac{\text{A}}{\text{m}} = \underline{3{,}6\,\text{V}}.$$

272. Ein Trommelanker, der sich in einem Magnetfeld mit der Induktion $B = 0{,}8\,\text{Wb m}^{-2}$ dreht, enthält in einer Rille 20 in Serie geschaltete Leiter von je $s = 20$ cm Länge. Der Trommelanker hat einen Durchmesser $d = 10$ cm und rotiert mit einer Tourenzahl $n = 1300\,\text{min}^{-1}$. Es soll bestimmt werden, welche Maximalspannung in der gesamten Ankerwicklung induziert wird. Es ist weiter die Richtung der Spannung zu ermitteln für den Fall, daß die Trommel eine Rechtsdrehung im senkrecht gerichteten Magnetfeld ausführt (Bild 144).

Bild 144

Lösung

Wir gehen von der Beziehung

$$U_i = Blv$$

aus, welche die Größe der induzierten Spannung in einem Leiter, der sich mit der Geschwindigkeit v im Magnetfeld der Induktion B bewegt, angibt. Da die einzelnen Leiter am Trommelumfang angeordnet sind, ist die Geschwindigkeit, mit der der Leiter durch das Magnetfeld bewegt wird, gleich der Umfangsgeschwindigkeit, die der Trommelanker mit dem Durchmesser d bei gleichförmiger Kreisbewegung hat, nämlich

$$v = \pi dn = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1\,\text{m} \cdot 1300\,\text{min}^{-1}}{60\,\text{s min}^{-1}} = 6{,}807\,\text{m s}^{-1}.$$

Demnach wird die maximale, in einem Leiter induzierte Spannung den Wert

$$U_{i1} = Blv = 0{,}8\ \mathrm{Vs\,m^{-2}} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot 6{,}8\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 1{,}089\ \mathrm{V}$$

annehmen. Da die einzelnen Leiter in Serie geschaltet sind, addieren sich die induzierten Spannungen, so daß die gesamte maximale Induktionsspannung, die der Dynamo erzeugt, den Wert

$$U_i = 20\ U_{i1} = 20 \cdot 1{,}089\ \mathrm{V} = \underline{21{,}78\ \mathrm{V}}$$

hat. Die Richtung der induzierten Spannung bestimmen wir entsprechend der Ableitung des Induktionsgesetzes aus dem Vektorprodukt

$$(\vec{v} \times \vec{B})$$

oder entsprechend der bekannten Rechte-Hand-Regel, die eigentlich aus dem angeführten Vektorprodukt von Geschwindigkeit und Induktionsflußdichte resultiert. Die Richtung der in den einzelnen Leitern induzierten Spannung entspricht der in Bild 144 angegebenen. Dabei bedeutet das Symbol (+) den Strom, der in Richtung vom Betrachter wegfließt.

273. Ein gerader Leiter der Länge $l = 15$ cm rotiert in einem homogenen Magnetfeld, dessen Induktion den Wert $B = 5000$ G hat, mit einer Frequenz $f = 60\ \mathrm{s^{-1}}$ in einer senkrecht zur magnetischen Feldrichtung gelegenen Ebene um eine durch seinen Endpunkt verlaufende Achse (Bild 145). Welche Spannung wird dabei in ihm induziert?

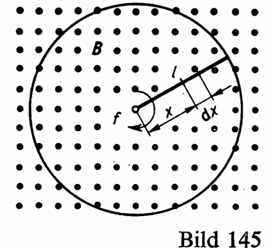


Bild 145

Lösung

Wir wenden das Induktionsgesetz an in der Form

$$U_i = B\,x\,v$$

(B magnetische Induktion, x Länge des Leiters, v seine Geschwindigkeit). In Bild 145 hat das im Abstand x von der Drehachse liegende Leiterelement dx bei der Frequenz f eine Geschwindigkeit, die der Umfangsgeschwindigkeit einer Kreisbewegung gleich ist, nämlich

$$v = 2\pi x f.$$

Daher nimmt die im Leiterelement dx induzierte Spannung den Wert

$$\mathrm{d}U_i = Bv\,\mathrm{d}x = B \cdot 2\pi x n\,\mathrm{d}x$$

an. Für die gesamte im Leiter der Länge l induzierte Spannung erhalten wir demnach

$$U_i = 2\pi\,nB \int_0^l x\,\mathrm{d}x = \pi fBl^2 = 3{,}14 \cdot 60\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 5000 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Vs\,m^{-2}} \cdot 0{,}15^2\ \mathrm{m^2} =$$
$$= \underline{2{,}12\ \mathrm{V}.}$$

274. Es soll die mit einer FORBESschen Maschine erzeugte Induktionsspannung berechnet werden. Es handelt sich hierbei um eine Metallscheibe, die in einem durch einen Spezial-

magneten geschaffenen homogenen Magnetfeld rotiert. Der homogene Bereich des Magnetfeldes erstreckt sich auf einen Streifen zwischen $r = 5$ cm und $r' = 15$ cm, von der Drehachse aus gemessen. Die Induktion hat hier den Wert $B = 1\ \text{Wb m}^{-2}$. Die Scheibe rotiert mit einer Tourenzahl $n = 2000\ \text{min}^{-1}$ (Bild 146).

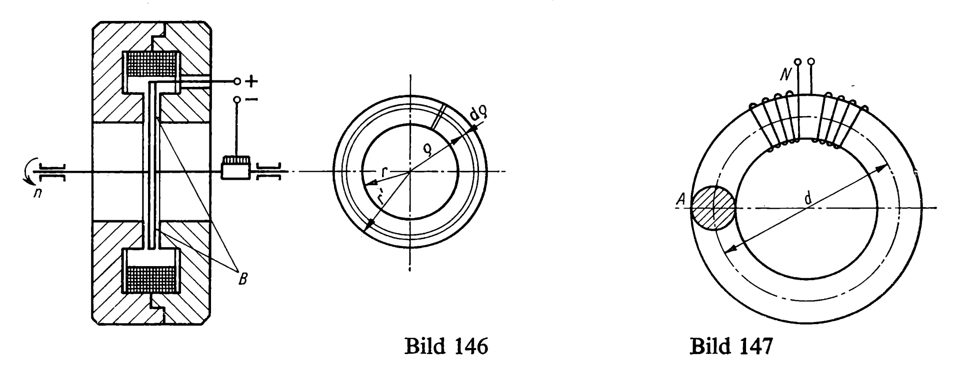


Bild 146 Bild 147

Lösung

Wir denken uns die Metallscheibe in lauter radial liegende Leiter zerlegt, in denen infolge ihrer Bewegung mit der Geschwindigkeit v im Magnetfeld mit der Induktion B eine Spannung induziert wird. In einem Leiterelement der Länge $d\varrho$ beträgt die induzierte Spannung

$$dU_i = Bv\, d\varrho.$$

Wir drücken die Geschwindigkeit des in einem Abstand ϱ von der Drehachse liegenden Leiterelements durch die Tourenzahl aus:

$$v = 2\pi\varrho n.$$

Dann wird

$$dU_i = 2\pi\varrho n B\, d\varrho,$$

und die in einem ganzen (gedachten) Leiter der Länge $l = r' - r$ induzierte Spannung erreicht den Wert

$$U_i = 2\pi n B \int_r^{r'} \varrho\, d\varrho = 2\pi n B \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_r^{r'} = \pi B n\,(r'^2 - r^2).$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir für die induzierte Spannung

$$U_i = \pi \cdot 1\ \text{Vs m}^{-2}\,\frac{2000}{60\ \text{s}}\,(0{,}15^2\ \text{m}^2 - 0{,}05^2\ \text{m}^2) = \underline{\underline{2{,}094\ \text{V}}}.$$

275. Eine geschlossene Spule hat die Form eines Ringes. Auf einen ringförmigen Eisenkern (mittlerer Durchmesser $d = 0{,}2$ m, Permeabilität $\mu = 700\,\mu_0$, Querschnittsfläche $A_1 = 25\ \text{cm}^2$) sind $N = 1000$ Windungen aufgewickelt, durch die ein Strom $I = 1$ A fließt. Wie groß ist die Induktivität einer solchen Ringspule (Bild 147)?

Lösung

Um die Induktivität ausrechnen zu können, müssen wir zunächst den Wert der magnettischen Feldstärke kennen. Das Magnetfeld entsteht durch eine Spule mit dem Radius r und der Windungszahl N unter Einfluß der Stromstärke I. Wir gehen von der Durchflußgleichung aus, wobei wir berücksichtigen, daß der Integrationsweg mit dem Leiter N-mal gekoppelt ist. Das bedeutet also

$$NI = \oint H\,\mathrm{d}s,$$

wobei die Integration über die gesamte geschlossene mittlere Feldlinie des Magnetkreises erfolgen muß. Nach Integration über die Kreislinie vom Radius $r = d/2$ erhalten wir

$$NI = 2\pi rH,$$

also die Feldstärke

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{1000 \cdot 1\ \mathrm{A}}{2\pi \cdot 0{,}1\ \mathrm{m}} = \frac{5}{\pi} 10^3\ \mathrm{A\,m^{-1}}.$$

Der Induktionsfluß Φ durch die von einer Leiterwindung umschlossene Fläche wird

$$\Phi = LI.$$

Daraus erhalten wir die gesuchte Induktivität

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{BA}{I} = \frac{BNA_1}{I} = \frac{\mu HNA_1}{I}$$

(B magnetische Induktion, A Gesamtflächeninhalt, durch den der Strom fließt, A_1 Flächeninhalt einer einzelnen Leiterwindung, N Windungszahl). Die magnetische Induktion B haben wir als Produkt der magnetischen Feldstärke H und der Permeabilität $\mu = \mu_0\mu_r$ ausgedrückt. Nach Einsetzen der vorgegebenen Werte erhalten wir schließlich

$$L = \frac{\mu_0\mu_r HNA_1}{I} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}} \cdot 700 \cdot \frac{5}{\pi} \cdot 10^3\ \mathrm{A\,m^{-1}} \cdot 1000 \cdot 25 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}}{1\ \mathrm{A}} =$$

$$= 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} = \underline{3{,}50\ \mathrm{H}}.$$

276. Berechnen Sie die Spannung, die in einer Spule mit der Induktivität $L = 0{,}06$ H induziert wird, wenn ein sie durchsetzender Strom gleichförmig so anwächst, daß er in jeder Sekunde um die Differenz $\Delta I = 10$ A zunimmt.

Lösung

Für die Selbstinduktionsspannung gilt die folgende Beziehung:

$$U_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad \text{bzw.} \quad U_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Wenn wir die gegebenen Werte hier einsetzen, erhalten wir

$$U_i = -0{,}06\,\mathrm{H}\,\frac{10\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{s}} = \underline{-0{,}6\,\mathrm{V}}.$$

Das negative Vorzeichen im Resultat bedeutet, daß die induzierte Spannung dem Erzeugerstrom entgegengerichtet ist.

277. Eine kreisringförmige Spule besteht aus einem Kern mit rechteckigem Querschnitt (Bild 148), auf den dicht übereinander zwei Wicklungen, eine mit der Windungszahl N_1 und eine mit der Windungszahl N_2, aufgebracht sind. Es soll eine Beziehung für die gegenseitige Induktion dieser beiden Wicklungen hergestellt werden.

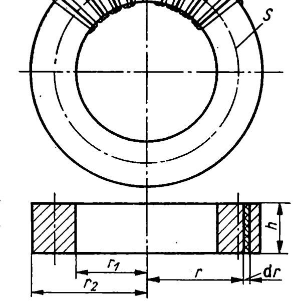


Bild 148

Lösung

Wir gehen von der Durchflußgleichung für den Fall aus, daß durch die Spule mit der Windungszahl N_1 der Strom I_1 fließt, es ist also

$$\oint H\,\mathrm{d}s = N_1 I_1.$$

Wir müssen entlang der ganzen mittleren magnetischen Feldlinie, die einen Kreis darstellt, integrieren. Das ergibt

$$\oint H\,\mathrm{d}s = H \cdot 2\pi\, r.$$

Für die Stärke, die das Magnetfeld auf einer beliebigen Kreislinie im Kern annimmt, können wir schreiben

$$H = \frac{N_1 I_1}{2\pi r}.$$

Durch eine infinitesimale Querschnittsfläche des Spulenkerns

$$\mathrm{d}A = h\,\mathrm{d}r$$

fließt ein Induktionsfluß, den wir als homogen ansehen können und der die Stärke

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}A = \mu_0\mu_r H h\,\mathrm{d}r = \mu_0\mu_r \frac{N_1 I_1}{2\pi r} h\,\mathrm{d}r$$

hat. Durch den gesamten rechteckigen Querschnitt des Spulenkerns tritt ein Induktionsfluß mit der Gesamtstärke

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} N_1 I_1 h \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} N_1 I_1 h \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Dieser Induktionsfluß durchsetzt auch die N_2 Windungen der zweiten Wicklung, so daß durch sie der Induktionsfluß

$$\Phi_{L1,2} = \Phi N_2 = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} N_1 N_2 I_1 h \ln\frac{r_2}{r_1}$$

tritt. Die gesuchte gegenseitige Induktion der beiden Spulen wird im Sinne der Definition durch folgende Beziehung angegeben:

$$L = \frac{\Phi_{L1,2}}{I_1} = \frac{\Phi_{L2,1}}{I_2} = \underline{\frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} N_1 N_2\, h \ln \frac{r_2}{r_1}}\,.$$

278. Eine Spule der Länge $l = 0{,}5$ m wird aus $N = 10000$ Windungen gebildet, deren jede einen Durchmesser $d = 6$ cm hat. Die Spule wird von einem Strom der Stärke $I = 2$ mA durchflossen. Es ist der Energieinhalt des an der Spule entstehenden Magnetfeldes zu berechnen.

Lösung

Für die Energie des Magnetfeldes eines elektrischen Stroms gilt die Beziehung

$$W = \frac{1}{2} L I^2.$$

Wir müssen also zur Berechnung des Energieinhalts des Feldes die Induktivität L der Spule kennen. Sie ist durch

$$L = \frac{\Phi_{\text{ges}}}{I}$$

gegeben, wobei Φ_{ges} der gesamte, durch alle Windungen der Spule tretende Induktionsfluß ist. Es gilt weiter der Zusammenhang

$$\Phi_{\text{ges}} = N\Phi = NBA = N\mu_0 HA,$$

wobei Φ der durch die Fläche einer einzigen Windung tretende Induktionsfluß und H die magnetische Feldstärke der Spule ist, die wir aus Gründen der Vereinfachung im Querschnitt einer jeden Windung als gleich groß ansehen dürfen. Für die Feldstärke gilt nach dem Durchflußgesetz

$$Hl = NI, \quad \text{d. h.,} \quad H = \frac{NI}{l},$$

so daß sich für L ergibt

$$L = \frac{\Phi_{\text{ges}}}{I} = \frac{N\mu_0 HA}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} =$$

$$= \frac{4\,\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs A}^{-1}\,\text{m}^{-1} \cdot 10\,000^2\, \dfrac{\pi \cdot 0{,}06^2\ \text{m}^2}{4}}{0{,}5\ \text{m}} = 0{,}71\ \text{H}.$$

Für den gesuchten Wert der Energie des Magnetfeldes erhalten wir somit

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} 0{,}71\ \text{H} \cdot 0{,}002^2\ \text{A}^2 = \underline{1{,}42 \cdot 10^{-6}\ \text{J}}.$$

279. Der Eisenkern eines Elektromagneten hat eine Querschnittsfläche von $6 \cdot 4\ \text{cm}^2$. An der Berührungsfläche mit einer anhängenden Last erreicht die magnetische Induktion den Wert $B = 0{,}3\ \text{Wb}\,\text{m}^{-2}$. Es ist eine Beziehung für die Tragfähigkeit des Elektromagneten zu ermitteln und diese für den angegebenen Fall in Zahlen auszudrücken.

Lösung

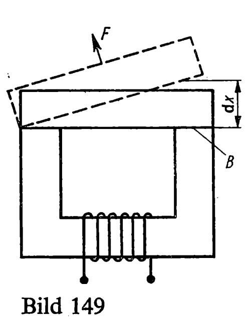


Bild 149

Wenn wir in Bild 149 den Anker um ein infinitesimal kleines Wegelement $\mathrm{d}x$ vom Magnetpol entfernen und dabei gleichzeitig den Spulenstrom in der Weise erhöhen, daß sich der Induktionsfluß im Kreis nicht ändert, sondern konstant gehalten wird, dann ändert sich auch nicht die Kraft F, mit welcher der Anker an den Pol herangezogen wird und die wir bei der Bewegung überwinden müssen. Dabei verrichten wir die Arbeit

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}x.$$

Damit sich der Induktionsfluß bei einer Vergrößerung der mittleren Länge der Feldlinien um den Betrag $\mathrm{d}x$ nicht ändert, ist es erforderlich, den Strom um genau den Betrag zu erhöhen, der dem Produkt $H\,\mathrm{d}x$ entspricht. Im entstehenden Luftspalt erhöht sich dabei die Energie des Magnetfeldes, die gegeben ist durch

$$W = \frac{1}{2} L I^2.$$

Da weiter

$$L = \frac{\Phi_L}{I}$$

ist, wobei $\Phi_L = N\Phi$ den gesamten Induktionsfluß durch alle Windungen der Spule und Φ den Induktionsfluß durch eine einzige Windung darstellt, wird

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_L}{I} I^2 = \frac{1}{2} I N \Phi.$$

Unter Einbeziehung der magnetischen Feldstärke erhalten wir die Beziehung

$$Hx = IN,$$

wobei x die Länge einer Feldlinie bedeutet, so daß wir weiterhin schreiben können

$$W = \frac{1}{2} H x \Phi.$$

Die erwähnte Vergrößerung der Energie des Magnetfeldes infolge einer Stromstärkesteigerung entsprechend $H\,\mathrm{d}x$ hat den Wert

$$\mathrm{d}W = \frac{H\,\mathrm{d}x\,\Phi}{2}.$$

Hieraus entsteht durch Umformung der Ausdruck

$$dW = \frac{B^2 A \, dx}{2\mu_0},$$

wenn wir voraussetzen:

$$\Phi = BA \quad \text{und} \quad H = \frac{B}{\mu_0}.$$

In diesem Falle ist B die magnetische Induktion im Luftspalt zwischen den Berührungsflächen. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie verlangt im vorliegenden Falle, daß die zum Entfernen des Ankers aufgewendete Arbeit gleich der Vergrößerung der im Magnetfeld enthaltenen Energie ist. Das heißt

$$F \, dx = \frac{B^2 A}{2\mu_0} \, dx.$$

Daraus erhalten wir eine Beziehung für die Tragkraft des Magneten, nämlich

$$\underline{F = \frac{B^2 A}{2\mu_0}},$$

wobei A die Berührungsfläche, der Querschnitt des Pols ist. Nach Einsetzen der gegebenen Werte finden wir

$$F = \frac{0{,}3^2 \left(\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}\right)^2 24 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{Vs}\,\text{A}^{-1}\,\text{m}^{-1}} = \frac{0{,}09 \cdot 24}{25{,}12} 10^3\,\text{N} \approx \underline{86\,\text{N}}.$$

280. Wie groß ist der magnetische Widerstand eines gußeisernen Magnetkreises mit den Abmessungen $r = 15$ cm und $A = 5\,\text{cm}^2$ (Bild 150), wenn durch die Spule mit $N = 200$ Windungen der Strom $I = 3$ A fließt?

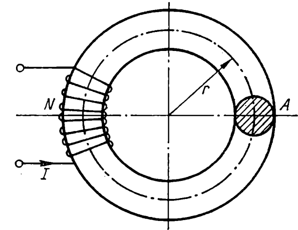


Bild 150

Lösung

Die Durchflußgleichung hat für unseren Fall die Form

$$H \cdot 2\pi r = IN.$$

Wir finden also, daß der durch die N Windungen fließende Strom I im Kern eine Feldstärke

$$H = \frac{IN}{2\pi r} = \frac{3\,\text{A} \cdot 200}{0{,}942\,\text{m}} \doteq 637\,\text{A}\,\text{m}^{-1}$$

hervorruft. Dieser Feldstärke entspricht auf der Magnetisierungskurve des Gußeisens (Bild 139) eine magnetische Induktion $B = 0{,}46\,\text{Wb}\,\text{m}^{-2}$.

Für den magnetischen Widerstand erhalten wir gemäß der HOPKINSschen Formel

$$R_m = \frac{1}{\mu}\frac{s}{A} = \frac{1}{\frac{B}{H}}\frac{2\pi r}{A} = \frac{H}{B}\frac{2\pi r}{A} =$$

$$= \frac{637\ \mathrm{A\ m^{-1}} \cdot 2\ \pi \cdot 0{,}15\ \mathrm{m}}{0{,}46\ \mathrm{Wb\ m^{-2}} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} = \underline{2{,}61 \cdot 10^6\ \mathrm{A\ Wb^{-1}}}.$$

281. Welcher Strom muß durch eine Spule mit der Windungszahl $N = 300$ fließen, die auf einen Kern aus Trafoblech (4% Si-Gehalt) gewickelt wurde, damit in dem 0,5 mm breiten Spalt ein magnetischer Induktionsfluß der Stärke $\Phi = 0{,}00066$ Wb auftritt? (Die Maße in Bild 151 sind in Millimetern angegeben.)

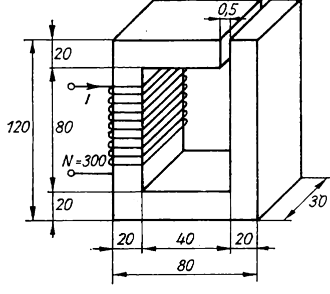


Bild 151

Lösung

Wir bestimmen zunächst die Stärke der magnetischen Induktion

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0{,}00066\ \mathrm{Wb}}{20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 30 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} =$$

$$= 1{,}1\ \mathrm{Wb\ m^{-2}}.$$

Aus der Magnetisierungskurve des Trafobleches (Bild 139) entnehmen wir, daß zur Induktion $B = 1{,}1\ \mathrm{Wb\ m^{-2}}$ die Feldstärke $H \approx$ $\approx 400\ \mathrm{A\ m^{-1}}$ gehört. Im Luftspalt ist die Feldstärke

$$H_{Sp} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi\, 10^{-7}} B = \frac{1{,}1}{4\pi\, 10^{-7}}\ \mathrm{A\ m^{-1}} = 8{,}75 \cdot 10^5\ \mathrm{A\ m^{-1}}.$$

Für unseren Fall nimmt die Durchflußgleichung folgende Form an:

$$IN = H_{Fe} s_{Fe} + H_{Sp}\, \delta.$$

Daraus ergibt sich

$$I = \frac{H_{Fe} s_{Fe} + H_{Sp}\delta}{N},$$

wobei s_{Fe} die Länge der mittleren Feldlinie im Eisen bedeutet, also

$$s_{Fe} = [2\,(40 + 20) + 2\,(80 + 20) - 0{,}5] \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 319{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte und des Ergebnisses für die Länge s_{Fe} finden wir

$$I = \frac{400\ \mathrm{A\ m^{-1}} \cdot 319{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} + 8{,}75 \cdot 10^5\ \mathrm{A\ m^{-1}} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{300} = \underline{1{,}884\ \mathrm{A}}.$$

282. Ein Hufeisen-Elektromagnet mit den in Bild 152 angegebenen Maßen in *mm* soll aus einer Entfernung $\delta = 1$ cm einen Anker anziehen können, der eine Last von 250 kp trägt. Welche Stromstärke muß dazu in der Spule, deren Windungszahl $N = 500$ beträgt, fließen?

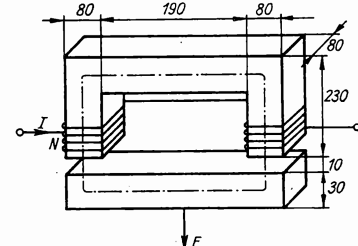


Bild 152

Lösung

Nach der Beziehung, die wir in Beispiel 279 für die Tragkraft eines Elektromagneten abgeleitet haben, läßt sich die magnetische Induktion wie folgt ausdrücken:

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 F}{A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 250 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 80 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}} \text{ Wb m}^{-2} \approx 0{,}7 \text{ Wb m}^{-2}.$$

Um diese Induktion im Eisen zu erzielen, ist eine Feldstärke notwendig, für die wir aus der Kurve für Eisenblech in Bild 139 entnehmen:

$$H_{\text{Fe}} = 140 \text{ A m}^{-1}.$$

Dagegen wird im Luftspalt zur Erzielung der magnetischen Induktion die Feldstärke

$$H_{\text{Sp}} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} B \approx 8 \cdot 10^5 B = 8 \cdot 0{,}7 \cdot 10^5 \text{A m}^{-1} = 5{,}6 \cdot 10^5 \text{A m}^{-1}$$

erforderlich sein. Aus der Durchflußgleichung resultiert für unser Beispiel die Beziehung

$$IN = H_{\text{Fe}} s_{\text{Fe}} + H_{\text{Sp}} s_{\text{Sp}},$$

wobei die Länge der mittleren Feldlinie in Luft den Wert

$$s_{\text{L}} = 2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

und in Eisen

$$s_{\text{Fe}} = [2\,(190 + 80) + 2 \cdot 230] \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ m}$$

hat. Wir finden somit für die Stromstärke den Wert

$$I = \frac{H_{\text{Fe}} s_{\text{Fe}} + H_{\text{L}} s_{\text{L}}}{N} = \frac{140 \text{ A m}^{-1} \cdot 1 \text{ m} + 5{,}6 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{500} =$$

$$= \underline{22{,}68 \text{ A}}.$$

A Aufgaben

354. Ein sehr langer gerader Leiter, durch den ein Strom $I = 10$ A fließt, bildet in einem bestimmten Punkt eine kreisförmige Windung mit dem Radius $r = 4{,}28$ cm aus, die mit dem Stromleiter zusammen in einer Ebene liegt (Bild 153). Berechnen Sie die Stärke der Induktion im Mittelpunkt der dargestellten Windung.

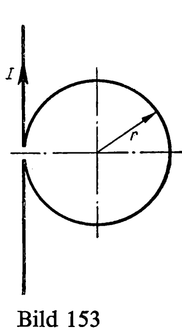


Bild 153

355. Zwei unendlich lange, gerade, parallel zueinander verlaufende Leiter sind 10 cm voneinander entfernt. Sie werden beide vom gleichen Strom $I = 2$ A in gleicher Richtung durchflossen. Es ist die Stärke der Induktion in einem Punkt zu bestimmen, der auf der senkrechten Verbindungslinie beider Leiter, 4 cm von dem einen entfernt, gelegen ist.
356. Zwei ebene, kreisförmige Leiter mit den Radien $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 15$ cm sind koaxial angeordnet (Bild 154). Sie werden von den Strömen $I_1 = 2$ A, $I_2 = 5$ A gleichsinnig durchflossen. Die beiden Ströme erregen in ihrer Umgebung ein Magnetfeld. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke in einem Punkt P auf der Verbindungsachse beider Leiter mit den Koordinaten $x_1 = 5$ cm, $x_2 =$ $= 10$ cm.
357. Welcher Strom fließt durch einen langen, geraden Leiter, wenn in einem senkrecht gemessenen Abstand von 20 cm im Vakuum eine Induktion vom Betrag $B = 15 \cdot 10^{-4}$ Wb m^{-2} gemessen wird?

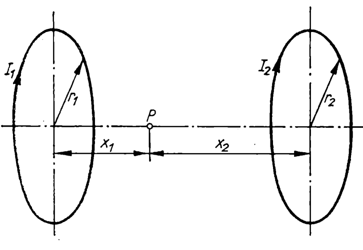


Bild 154

358. Ermitteln Sie den Wert der magnetischen Induktion im Mittelpunkt einer Spule, die 20 Windungen bei einer Länge von 10 cm hat und dabei vom Strom $I = 5$ A durchflossen wird. Wie groß ist der gesamte, durch die Windungen tretende Induktionsfluß bei einem Spulenquerschnitt von $A = 5$ cm^2?
359. Zwei gerade, parallele Leiter haben voneinander den Abstand $s = 1$ cm. Der eine von beiden ist sehr lang und wird vom Strom $I_1 = 250$ A durchflossen, der andere hat nur eine Länge von $l = 20$ cm und wird vom Strom $I_2 = 300$ A durchflossen. Beide befinden sich im Vakuum. Welche anziehende Kraft wirkt zwischen ihnen?
360. Ein gerader Leiter von 10 cm Länge, durch den ein Strom von 10 A fließt, befindet sich, senkrecht zur Feldrichtung liegend, in einem Magnetfeld, dessen Induktion den Wert $B = 10000$ G hat. Welche Kraft wirkt auf den Leiter?
361. In einem homogenen Magnetfeld mit horizontaler Feldlinienrichtung ist senkrecht zum Feld, aber gleichfalls hori-

zontal orientiert, ein Leiter aufgehängt, der je Zentimeter Länge ein Gewicht von 0,1 kp hat. Er wird von einem Strom von 1 A Stärke durchflossen. Welchen Wert muß die magnetische Induktion des Feldes annehmen, damit der stromführende Leiter gerade in der Schwebe gehalten wird?

362. Eine kreisrunde Kupferscheibe mit dem Radius $r = 10$ cm ist, um eine horizontale Achse drehbar, so gelagert, daß ihr äußerster Rand gerade in ein Quecksilberbad eintaucht (Bild 155). Das

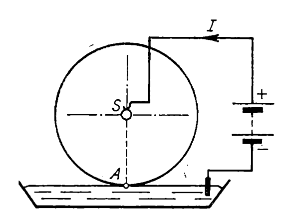


Bild 155

Quecksilber im Gefäß und ein Kontakt auf der Achse der Scheibe sind mit einer Akkubatterie verbunden. Die Scheibe befindet sich in einem senkrecht zu ihrer Ebene orientierten Magnetfeld mit der Induktion $B = 2000$ G. Durch den so geschaffenen Stromkreis fließt ein Strom $I = 1$ A. Wie groß ist das Drehmoment der auf die Scheibe wirkenden Kräfte, und in welcher Richtung wird sich die Scheibe drehen, wenn die Richtung der Induktion vom Betrachter fortweist?

363. Die magnetische Induktion eines homogenen Magnetfeldes hat den Wert $B = 15 \text{ Wb m}^{-2}$. Ermitteln Sie die Stärke des Induktionsflusses, der durch eine Fläche von 1 dm² Größe tritt, deren Normale mit der Feldstärkerichtung einen Winkel $\varphi = 30°$ einschließt.

364. Bestimmen Sie den magnetischen Induktionsfluß in einem eisernen Werkstück von $A = 4 \text{ cm}^2$ Querschnitt, dessen Permeabilitätszahl $\mu_r = 5000$ ist, wenn die magnetische Feldstärke den Wert $H = 200$ Oe hat.

365. Ein kreisförmiger Magnetring aus Stahl wurde für einen Induktionsfluß $\Phi = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Wb aus zwei Teilen von unterschiedlichem Querschnitt projektiert: $A_1 = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ und $A_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ (Bild 156). Auf der

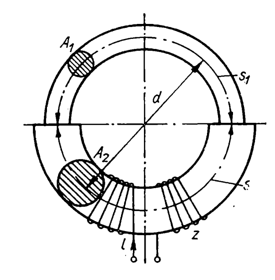


Bild 156

einen Ringhälfte vom Durchmesser $d = 0{,}318$ m wurde eine Spule mit der Windungszahl $z = 200$ gewickelt. Welcher Strom I muß durch diese Spule fließen, damit der geforderte Induktionsfluß Φ erreicht wird, wenn das Material Stahlguß ist?

366. Auf einen Stahlkern von der Form eines zylindrischen Ringes mit einer mittleren Feldlinienlänge $s = 0{,}628$ m und mit dem konstanten Querschnitt $A = 0{,}0012 \text{ m}^2$ sind $N = 100$ Windungen aufgewickelt. Welcher Strom I muß in der Wicklung fließen, damit ein Induktionsfluß der Stärke $\Phi = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Wb auftritt?

367. Auf einen Stahlkern konstanten Querschnitts mit einer mittleren Feldlinienlänge $s = 0{,}625$ m und einem Luftspalt der Dicke $\delta = 0{,}003$ m sind $N = 100$ Windungen aufgewickelt. Welcher Strom I muß in der Wicklung fließen, damit die magnetische Induktion den Wert $B = 1 \text{ Wb m}^{-2}$ annimmt?

368. In einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion $B = 2000$ G rotiert in

der zu B senkrechten Ebene ein leitender Stab der Länge $l = 10$ cm gleichförmig. Die Drehachse ist senkrecht zum Stab gerichtet und verläuft durch ein Ende des Stabes. Mit welcher Tourenzahl muß der Stab rotieren, damit in ihm eine Induktionsspannung $U_i = 0{,}628$ V induziert wird?

369. Ein Stabmagnet, durch dessen Endquerschnitt ein Induktionsfluß der Stärke $\Phi = 0{,}0015$ Wb tritt, dreht sich um eine senkrechte Achse, und zwar so, daß der Induktionsfluß eine Spule mit $N = 10000$ Windungen schneidet (Bild 157). Eine halbe Umdrehung vollführt der Stabmagnet innerhalb 0,02 s. Bestimmen Sie den Durchschnittswert der in der Spule induzierten Induktionsspannung.

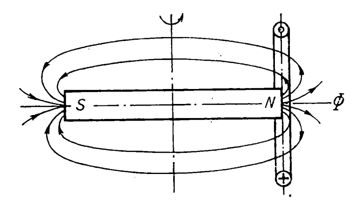


Bild 157

370. Ein Elektromagnet mit $N = 1000$ Windungen wird durch einen Strom $I = 0{,}5$ A gespeist. Der Widerstand der Wicklung hat den Wert $R = 10\ \Omega$. Die magnetische Induktion im Eisenkern ist $B = 12000$ G. Der Kern hat einen Querschnitt $A = 100\ \text{cm}^2$. Wie groß ist die durch Selbstinduktion hervorgerufene Spannung, wenn der Strom für eine Zeit von 0,01 s unterbrochen wird?

371. Eine Spule hat die Induktivität $L = 0{,}06$ H. Ermitteln Sie die durch Selbstinduktion hervorgerufene Induktionsspannung für den Fall einer Stromänderung, wobei der Strom innerhalb 1 s um 11000 A ansteigt.

372. Ein kreisförmiger Leiter mit dem Radius r befindet sich in Ruhe in einem Magnetfeld, dessen Feldlinien senkrecht auf der Leiterebene stehen. Die Induktion des Magnetfeldes nimmt linear mit der Zeit ab. Zur Zeit $t = 0$ hat die Induktion den Wert $B = B_0$, zur Zeit $t = t_1$ ist $B = 0$. Welche Spannung wird in dem Leiter induziert?

373. Ein 30 cm langer, gerader Leiter bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 8\ \text{m s}^{-1}$ senkrecht zur Richtung eines homogenen Magnetfeldes der Induktion $B = 5500$ G. Welche Spannung wird in dem Leiter induziert?

374. Eine rechteckige Leiterwindung mit den Abmessungen $a = 25$ cm, $b = 30$ cm rotiert um eine durch die Mitten der langen Seiten gehende Achse, die in Bild 158 senkrecht zur Richtung eines homogenen Magnetfeldes orientiert ist, mit einer Tourenzahl $n = 1200\ \text{min}^{-1}$. Die Feldstärke hat den Wert $H = 6000$ Oe. Bestimmen Sie den zeitlichen Mittelwert der dabei in der Windung induzierten Spannung.

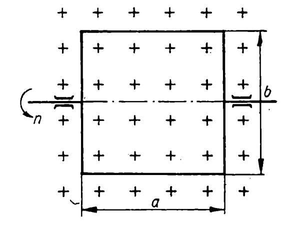


Bild 158

375. Wie groß ist die Kraft, mit der ein Anker an den Polen eines Hufeisenmagneten festgehalten wird, dessen einer Pol eine Fläche $A = 0{,}01\ \text{m}^2$ hat, wenn die magnetische Induktion im Spalt zwischen Polen und Anker den Wert $B = 1{,}2\ \text{Wb m}^{-2}$ aufweist?

376. Stellen Sie eine Formel auf, aus der die Induktivität einer Ringspule von rechteckigem Querschnitt hervorgeht, die N Windungen hat. Die Spule entspricht der in Bild 148 dargestellten.

3.4. Wechselstrom und elektrische Schwingungen

Die Entstehung der induzierten elektrischen Wechselspannung verdeutlichen wir uns gewöhnlich an Hand einer einfachen Vorrichtung, in der sich ein rechteckiger, ebener Leiter mit dem Flächeninhalt A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem Magnetfeld der Induktion B dreht. Er rotiert um eine Achse (Bild 159), welche die Mittelpunkte seiner gegenüberliegenden Seiten verbindet und senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion orientiert ist.

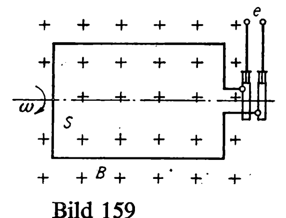


Bild 159

Für den Momentanwert der **elektrischen Wechselspannung** U, die in einem derartigen Rahmen induziert wird, gilt die Beziehung

$$U = U_0 \sin \omega t$$

(ω Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Rahmens, zugleich auch die Kreisfrequenz der induzierten Spannung, U_0 Höchstwert der induzierten Spannung). Der Höchstwert ist definiert durch

$$U_0 = \Phi\omega,$$

wobei Φ wiederum den Höchstwert des magnetischen Induktionsflusses darstellt, der durch die Fläche des Rahmens tritt, also $\Phi = BA$. Der Momentanwert des **elektrischen Stromes** I, der in einem Leiter durch die elektrische Wechselspannung hervorgerufen wird, ist durch

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

gegeben. Dabei ist mit dem Symbol φ die Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom ausgedrückt. Sie hängt von der Art des Stromverbrauchers (d. h. der Belastung) ab.

Die **Leistung des harmonischen Wechselstroms** P ist durch

$$P = UI \cos \varphi$$

gegeben (U Effektivwert der Spannung an den Leiterenden, I Effektivwert des durch den Leiter fließenden Stromes, $\cos \varphi$ Leistungsfaktor des Stromverbrauchers, d. h. der Cosinus der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom).

Den **Effektivwert** der Spannung U bzw. des Stromes I berechnen wir aus den jeweiligen Höchstwerten U_0 bzw. I_0 gemäß folgender Beziehung:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\,; \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\,.$$

Die **Leiterspannung** U_s eines Dreiphasenstroms berechnen wir aus der **Phasenspannung** U_f bei der *Sternschaltung* gemäß der Beziehung

$$U_s = U_f \sqrt{3}.$$

Die entsprechenden Stromwerte erfüllen bei dieser Schaltung die Beziehung

$$I_s = I_f.$$

Dagegen gelten bei der *Dreieckschaltung* die Beziehungen

$$U_s = U_f; \quad I_s = I_f \sqrt{3}.$$

Für die **Leistung des Dreiphasenstroms** gilt ohne Bezugnahme auf die Art der Schaltung eines Stromverbrauchers die Beziehung

$$P = \sqrt{3}\, U_s I_s \cos \varphi.$$

(U_s und I_s Effektivwerte der Leiterspannung und des verketteten Stromes, $\cos \varphi$ *Leistungsfaktor* des jeweiligen Stromverbrauchers).
Da wir den Momentanwert der induzierten elektrischen Spannung

$$U = U_0 \sin \omega t$$

durch einen Komplexausdruck

$$U^* = U_0 \cos \omega t + \mathrm{i}\, U_0 \sin \omega t$$

ersetzen und somit in der GAUSSschen Zahlenebene ausdrücken können, ist es möglich, den Wert der induzierten Spannung als **rotierenden Zeiger** darzustellen. Das trifft für alle harmonisch veränderlichen Größen gleichermaßen zu, ohne Rücksicht darauf, ob sie einer Sinus- oder Cosinusfunktion folgen. Aus diesen Erwägungen heraus wurde die grafische Darstellung der harmonisch veränderlichen Größen entwickelt, deren wichtige Regeln wir im folgenden Beispiel veranschaulichen wollen.
Wir haben den Wechselstrom

$$I = I_0 \sin (\omega t + \varphi).$$

Man kann ihn durch einen Zeiger darstellen, der als Vektor in der komplexen Zahlenebene aufgefaßt werden kann, dessen Absolutbetrag den konstanten Wert I_0 hat, der zur Zeit $t' = 0$ in bezug auf die horizontale Achse eine Neigung unter dem Winkel φ (Phasenverschiebung) hat und mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse rotiert, die senkrecht zur Zeichenebene durch den Anfangspunkt 0 verläuft. Wir betrachten dabei die Umlaufrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn als die positive. Der

Momentanwert des Stromes ist dann zu einem bestimmten Augenblick gleich der Projektion des rotierenden Zeigers auf die Vertikale (Bild 160).
Der Momentanwert der Spannung

$$U = U_0 \sin \omega t$$

wird zur Zeit $t = 0$ als Zeiger der konstanten Größe $\vec{u}_0$ in Richtung einer horizontalen Achse dargestellt. Auch der Zeiger $\vec{u}^*$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω, wobei $\vec{I}^*$ bezüglich $\vec{u}^*$ denselben konstanten Wert der Phasenverschiebung φ beibehält.

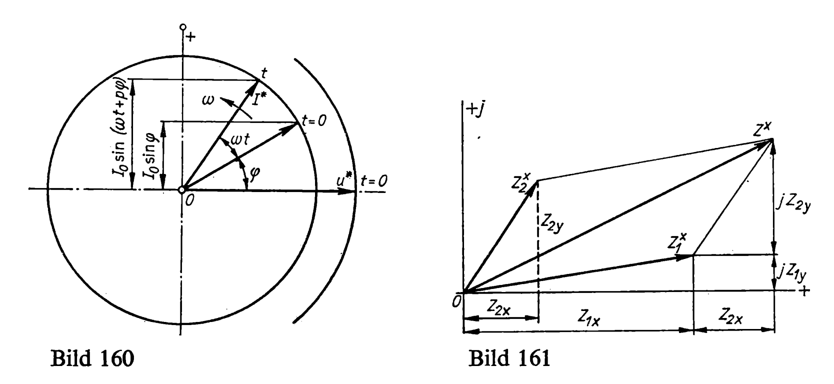


Bild 160 Bild 161

Komplexe Ausdrücke addieren wir, indem wir gesondert ihre jeweils reellen und imaginären Bestandteile addieren. Der resultierende komplexe Ausdruck hat daher einen Realteil, der sich aus den reellen Komponenten, und einen Imaginärteil, der sich aus den imaginären Komponenten zusammensetzt. Deshalb erhalten wir den resultierenden Zeiger $\vec{Z}^*$ aus zwei rotierenden Zeigern $\vec{Z}_1^*$ und $\vec{Z}_2^*$ in einem gegebenen Augenblick durch die Addition beider Zeiger wie bei gewöhnlichen Vektoren (Bild 161):

$$\vec{Z}^* = \vec{Z}_1^* + \vec{Z}_2^* = Z_{1x} + j\,Z_{1y} + Z_{2x} + j\,Z_{2y} = (Z_{1x} + Z_{2x}) + \\ + j\,(Z_{1y} + Z_{2y}).$$

Wenn die Wechselspannung

$$U = U_0 \sin \omega t$$

einem Reihenstromkreis mit dem ohmschen Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C zugeleitet wird, dann fließt in diesem ein Strom vom Höchstwert

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

wobei der Strom gegenüber der Spannung um einen Phasenwinkel φ verzögert ist, der sich aus der Beziehung ergibt

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Der Momentanwert des Stromes, der durch einen so aufgebauten Stromkreis fließt, folgt der Beziehung

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} (\sin \omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{U_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi).$$

Die Größe

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

bezeichnen wir als die *Impedanz* (den Scheinwiderstand) des Kreises. Wenn sich aber in einem Stromkreis nur der ohmsche Widerstand R befindet, d. h., $L = 0$, $C \to \infty$, dann ist

$$Z = R, \quad \varphi = 0^\circ, \quad I = \frac{U_0}{R} \sin \omega t.$$

Für den Fall, daß der Stromkreis nur die Induktivität L enthält, d. h., $R = 0$, $C \to \infty$, dann ergibt sich

$$Z = \omega L, \quad \varphi = 90^\circ,$$

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t - \varphi).$$

Für den Fall, daß im Stromkreis nur die Kapazität C enthalten ist, daß also $R = 0, L = 0$, gilt schließlich

$$Z = \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi = -90^\circ,$$

$$I = U_0 \, \omega C \sin(\omega t + \varphi).$$

Bild 162

In Bild 162 sind die Spannungszeiger (Spannungsabfälle) für die Größen R, L und C, also U_R^*, U_L^* und U_C^* (gestrichelt) grafisch dargestellt, desgleichen die Zeiger der

Klemmenspannungen $U_R^{*\prime}$, $U_L^{*\prime}$ und $U_C^{*\prime}$ (ausgezogene Linien), die für die Überwindung der angegebenen Widerstände erforderlich werden.
Nach dem in Bild 162 angedeuteten Dreieck erfüllen demnach die Impedanz des Stromkreises sowie der Tangens der resultierenden Phasenverschiebung die folgenden Beziehungen:

$$Z^2 I^2 = I^2 R^2 + I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2, \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\tan \varphi = \frac{I\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{IR} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Wenn durch einen Stromkreis, der aus einer Spule mit der Induktivität L, einem Kondensator mit der Kapazität C und einem ohmschen Widerstand R, alle in Serie geschaltet, besteht, ein Strom der Kreisfrequenz ω_r fließt, welche die Bedingung erfüllt

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0, \quad \text{d. h.,} \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

dann bedeutet das, daß im Serienstromkreis **Resonanz** eintritt, und wir bezeichnen ω_r als die sog. *Resonanzfrequenz*. Der dabei im Serienstromkreis fließende Strom stellt ein Maximum dar und folgt der Beziehung

$$I_r = \frac{U}{R}.$$

Der Widerstand des gesamten Stromkreises ist in diesem Fall gleich dem ohmschen.
In einem **Transformator** bestehen zwischen den Stromstärken, den Spannungen und den Windungszahlen von *Primär-* und *Sekundärwicklung* (I_1, U_1, N_1 bzw. I_2, U_2, N_2) die folgenden Beziehungen

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Für die Periodendauer T einer elektrischen Schwingung in einem **Oszillatorkreis**, der aus dem ohmschen Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C besteht, gilt die Beziehung

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Wenn der ohmsche Widerstand so klein ist, daß er gegenüber dem kapazitiven bzw. induktiven vernachlässigt werden kann, läßt sich die Periodendauer bzw. Frequenz der Schwingung gemäß der Beziehung

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{bzw.} \quad n_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ausdrücken.

B Beispiele

283. Ein Drahtrahmen vom Flächeninhalt $A = 100\,\text{cm}^2$ rotiert nach Bild 163 in einem homogenen Magnetfeld mit der Induktion $B = 0{,}05\,\text{Wb}\,\text{m}^{-2}$ so, daß er in einer Sekunde $f = 300$ Umdrehungen ausführt. Bestimmen Sie die in dem Drahtrahmen induzierte elektrische Spannung bei den Winkelstellungen $\varphi = 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°$ und $360°$.

Lösung

Der Induktionsfluß, der in einem bestimmten Augenblick durch die Windungsfläche tritt, ist durch die Beziehung

$$\Phi = \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = BA\cos\omega t$$

gegeben, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Rahmens bedeutet.

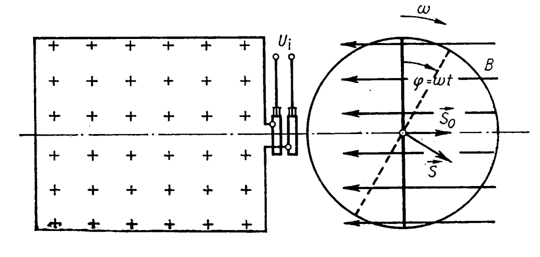


Bild 163

Entsprechend dem Induktionsgesetz können wir aber für die induzierte Spannung auch schreiben

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BA\,\omega\sin\omega t.$$

Da $\omega = 2\pi n$ und $\omega t = \varphi$ ist, ergibt sich

$$U_i = 2\pi\,nBA\sin\varphi,$$

und nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir

$$U_i = 2\pi\cdot 300\,\text{s}^{-1}\cdot 0{,}05\,\text{Vs}\,\text{m}^{-2}\cdot 100\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2\sin\varphi = \underline{0{,}942\,\text{V}\sin\varphi}.$$

Wenn wir für den Winkel φ die jeweils vorgegebene Gradzahl einsetzen, erhalten wir die gesuchten Induktionsspannungen zu

$$U_{i0} = 0{,}942 \sin 0° = 0 \text{ V};$$
$$U_{i45} = 0{,}942 \sin 45° = 0{,}667 \text{ V};$$
$$U_{i90} = 0{,}942 \sin 90° = 0{,}942 \text{ V};$$
$$U_{i135} = 0{,}942 \sin 135° = 0{,}667 \text{ V};$$
$$U_{i180} = 0{,}942 \sin 180° = 0 \text{ V};$$
$$U_{i225} = 0{,}942 \sin 225° = -0{,}667 \text{ V};$$
$$U_{i270} = 0{,}942 \sin 270° = -0{,}942 \text{ V};$$
$$U_{i315} = 0{,}942 \sin 315° = -0{,}667 \text{ V};$$
$$U_{i360} = 0{,}942 \sin 360° = 0 \text{ V}.$$

284. In einer kurzen Spule der Querschnittsfläche $A = 0{,}5 \text{ m}^2$ und einer Windungszahl $N = 60$ wird durch ein harmonisch veränderliches Magnetfeld der Frequenz $f = 10^6 \text{ s}^{-1}$ eine Induktionsspannung mit dem Höchstwert $U_{i0} = 30$ mV induziert. Wie groß ist der Maximalwert der magnetischen Induktion im Mittelpunkt der Spule?

Lösung

Für die induzierte Wechselspannung, die in einem Feld mit dem Gesamtinduktionsfluß (Höchstwert Φ_{gm}) bei der Kreisfrequenz ω induziert wird, gilt

$$U_i = \Phi_{gm}\omega \sin \omega t = U_{i0} \sin \omega t,$$

wobei

$$U_{i0} = \Phi_{gm}\omega = \Phi_m N \, 2\pi f$$

die Amplitude dieser Wechselspannung darstellt. Dabei wird der Höchstwert des gesamten Induktionsflusses mit Hilfe der Windungszahl N und des für eine einzige Windung möglichen Maximalflusses Φ_m ausgedrückt, also

$$\Phi_{gm} = \Phi_m N.$$

Aus der Gleichung für die Amplitude der induzierten Wechselspannung können wir Φ_m berechnen

$$\Phi_m = \frac{U_{i0}}{2\pi f N}.$$

Damit sind wir in der Lage, den gesuchten Maximalwert der magnetischen Induktion zu berechnen. Dieser ist

$$B_m = \frac{\Phi_m}{A} = \frac{U_{i0}}{2\pi f N A} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \text{ V}}{2\pi \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \cdot 60 \cdot 0{,}5 \text{ m}^2} = \underline{1{,}59 \cdot 10^{-10} \text{ Wb m}^{-2}}.$$

285. In einem Trafokern entsteht unter der Wirkung eines in der Primärspule fließenden elektrischen Stromes ein Induktionsfluß mit dem Maximalwert $\Phi_m = 2 \cdot 10^{-3}$ Wb. Wie groß ist der in der Sekundärspule mit $N = 100$ Windungen induzierte Effektivwert der Induktionsspannung, wenn sich der Induktionsfluß mit einer Frequenz von $f = 50 \text{ s}^{-1}$ ändert?

Lösung

Für den Maximalwert der Induktionsspannung, die in N Windungen bei der Frequenz f und einem Maximalwert des Induktionsflusses Φ_m induziert wird, haben wir in Beispiel 284 eine Beziehung abgeleitet:

$$U_{i0} = \Phi_m N \, 2\pi f.$$

Daraus ergibt sich der Effektivwert der induzierten Spannung zu

$$U_{eff} = \frac{U_{i0}}{\sqrt{2}} = \frac{\Phi_m N \, 2\pi f}{\sqrt{2}} \approx 4{,}44 f \Phi_m N = 4{,}44 \cdot 50\,s^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,Vs \cdot 100 = \underline{44{,}4\,V}.$$

286. Berechnen Sie die von einem Wechselstrom $I = I_0 \sin \omega t$ in einem Leiter mit dem ohmschen Widerstand R während der Dauer einer Periode T verrichtete Arbeit.

Lösung

Für die Leistung eines Gleichstroms gilt

$$P' = UI,$$

wobei U die Spannung und I den Strom bedeutet. Da sich beim Wechselstrom sowohl Stromstärke als auch Spannung periodisch gemäß einer Sinusfunktion ändern, ist der Momentanwert der Leistung durch die Beziehung

$$P' = U_0 \sin \omega t \cdot I_0 \sin \omega t = U_0 I_0 \sin^2 \omega t = R I_0^2 \sin^2 \omega t$$

gegeben, denn die Spannung und der Strom sind bei rein ohmscher Belastung nicht phasenverschoben und außerdem ist $U_0 = RI_0$. Die Durchschnittsleistung P des Wechselstroms ist der mittlere Wert der während einer ganzen Periode veränderlichen Leistung. Deshalb können wir – unter Verwendung der in Bild 164 eingetragenen Symbole – für die Durchschnittsleistung schreiben

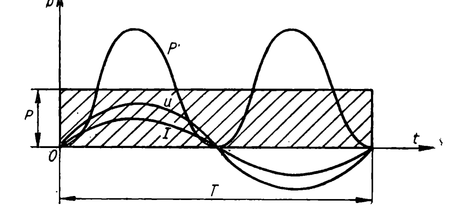


Bild 164

$$TP = \int_0^T R I_0^2 \sin^2 \omega t \, dt = R I_0^2 \frac{T}{2},$$

$$P = \frac{R I_0^2}{2} = R \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 = R I_{eff}^2,$$

wobei $I_{eff} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ den Effektivwert des Stromes darstellt, dessen Maximalwert selbst mit I_0 angegeben ist.

Die während einer ganzen Periode T verrichtete Arbeit erhalten wir in Übereinstimmung mit der Definition für die Arbeit als Produkt von Durchschnittsleistung und Periode, also

$$\underline{W_T = RI_{\text{eff}}^2 T.}$$

287. Ein Klingeltransformator liefert sekundärseitig bei einer Spannung $U_2 = 4$ V einen Strom $I_2 = 200$ mA. Welcher Strom I_1 fließt in der Primärwicklung, wenn diese mit einer Spannung $U_1 = 220$ V gespeist wird und wir eventuelle Trafoverluste vernachlässigen können?

Lösung

Unter der Voraussetzung, daß Verluste vernachlässigt werden können, ist die Arbeit des in der Zeitspanne t in der Primär- und in der Sekundärwicklung fließenden Stroms die gleiche, also

$$U_1 I_1 t = U_2 I_2 t.$$

Das ergibt

$$I_1 = I_2 \frac{U_2}{U_1} = 200 \cdot 10^{-3}\,\text{A} \frac{4\,\text{V}}{220\,\text{V}} = \frac{0{,}8}{220}\,\text{A} = \underline{0{,}0036\,\text{A}}.$$

288. Welchen Strom nimmt ein Wechselstrommotor auf, der bei einer Spannung $U = 220$ V eine Leistung $P = 3$ PS liefert, wenn der Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}88$ und der Wirkungsgrad des Motors $\eta = 0{,}89$ beträgt?

Lösung

Für die Leistung des Wechselstroms gilt die Beziehung

$$P_i = UI\cos\varphi.$$

Wir können also für den Wirkungsgrad schreiben

$$\eta = \frac{P_o}{P_i},$$

wobei P_i die von der Maschine aufgenommene (input) und P_o die von ihr abgegebene (output) Leistung darstellt.
Für den gesuchten Wert der Stromstärke erhalten wir demnach die Beziehung

$$I = \frac{P_o}{\eta U\cos\varphi} = \frac{3 \cdot 736\,\text{W}}{0{,}89 \cdot 220\,\text{V} \cdot 0{,}88} = \underline{12{,}8\,\text{A}}.$$

289. Ein Kondensator mit der Kapazität C hat zur Zeit $t = 0$ das Potential U_0. Wir entladen ihn über einen Widerstand R. Wie sieht der zeitliche Verlauf des Stromes aus?

Lösung

Für die Behandlung des Stromkreises in Bild 165 verwenden wir das 2. Kirchhoffsche Gesetz. Dabei ist die einzige Spannungsquelle unser Kondensator mit der Kapazität C, der die Ladungsmenge Q enthält. Auf Grund des durch den Widerstand fließenden Stromes I tritt am Widerstand R der ohmsche Spannungsabfall auf. Es ist deshalb

$$U_C = IR$$

oder

$$\frac{Q}{C} - IR = 0.$$

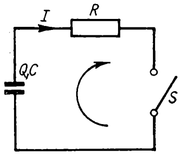
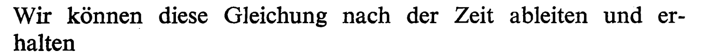


Bild 165



Wir können diese Gleichung nach der Zeit ableiten und erhalten

$$\frac{dQ}{dt}\frac{1}{C} - R\frac{dI}{dt} = 0.$$

Da mit dem Symbol Q die auf den Kondensatorplatten enthaltene Ladung bezeichnet ist, gilt

$$-\frac{dQ}{dt} = I$$

und also

$$\frac{I}{C} + R\frac{dI}{dt} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$I = K\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}},$$

wobei K die Integrationskonstante bedeutet.
Wir bestimmen sie unter Berücksichtigung der Bedingung, daß zu Beginn der Kondensatorentladung, also nach Betätigen des Schalters S (Bild 165) der Kondensator noch das Potential U_0 besaß, so daß für die Zeit $t = 0$ gilt $Q/C = U_0$. Wenn wir das in die ursprüngliche Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$U_0 = IR = 0$$

$$U_0 - RK\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = 0,$$

und für den Fall $t = 0$ erhalten wir

$$U_0 - RK = 0,$$

d. h.,

$$K = \frac{U_0}{R}.$$

Damit ist der zeitliche Verlauf des Stroms im angegebenen Stromkreis durch folgende Beziehung wiedergegeben:

$$I = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} .$$

290. Die Platten eines Kondensators der Kapazität $C = 0{,}1\ \mu F$ sind auf eine bestimmte Potentialdifferenz aufgeladen. In welcher Zeit entlädt sich der Kondensator auf die Hälfte seines Anfangswertes, wenn die Platten durch einen hochohmigen Leiter mit dem Widerstand $R = 2 \cdot 10^6\ \Omega$ verbunden werden?

Lösung

Für diesen Stromkreis gilt analog zum vorhergegangenen Beispiel die Beziehung

$$\frac{Q}{C} - IR = 0.$$

Da jedoch $I = -dQ/dt$ ist (Q bedeutet die Ladung auf den Platten des Kondensators, deshalb ist das Vorzeichen negativ), kann man auch schreiben

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q.$$

Das ergibt nach einer Umformung

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\,dt.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir die Beziehung

$$\ln Q = -\frac{1}{RC}t + \ln Q_0.$$

Für die Zeitabhängigkeit der an den Elektroden vorhandenen Ladungen erhalten wir

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

wobei Q_0 die maximale Ladung bedeutet, das ist diejenige Ladungsmenge, die zur Zeit $t = 0$ auf den Elektroden sitzt. Für die in der Aufgabe gesuchte Zeit t^*, in der sich der Kondensator um die Hälfte entlädt, gilt bezüglich der Ladung $Q = Q_0/2$. Wir schreiben deshalb

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\frac{t^*}{RC}},$$

d. h.,

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t^*}{RC}}.$$

Also erhalten wir die gesuchte Zeit zu

$$t^* = RC \ln 2 = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 2 \cdot 10^6\,\Omega \cdot 2{,}3 \lg 2 = \underline{0{,}14\,\mathrm{s}}.$$

291. Wie verändert sich der Strom I in einem Leiter mit dem Widerstand R und der Induktivität L in der Zeit, wenn wir ihn an eine Quelle mit der konstanten Spannung U anschließen?

Lösung

Für die Berechnung des in Bild 166 dargestellten Stromkreises verwenden wir das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz, wobei wir berücksichtigen, daß in der Spule durch die Änderung des Stroms eine Spannung induziert wird, für die gilt

$$U_i = -L\frac{dI}{dt}.$$

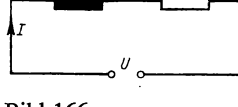


Bild 166

Es wird also

$$U + U_i = RI, \quad U - L\frac{dI}{dt} = RI,$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI - U = 0.$$

Wenn wir von der letzten Gleichung die Ableitung nach der Zeit bilden, erhalten wir

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} = 0.$$

Dieser Typ der Differentialgleichungen hat die allgemeine Lösung

$$I = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t},$$

wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten und α_1, α_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$L\alpha^2 + R\alpha + 0 = 0$$

sind. Für sie gilt

$$\alpha_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{R}{L} \end{cases}.$$

Damit nimmt die Lösung die Form

$$I = C_1 + C_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

an.

Die Integrationskonstanten bestimmen wir aus zwei Grenzbedingungen, und zwar

$$\text{für } t = 0: \quad I = 0 \to 0 = C_1 + C_2;$$

$$\text{für } t = \infty: \quad I = \frac{U}{R} \to \frac{U}{R} = C_1 + 0.$$

Aus den angegebenen beiden Gleichungen erhalten wir für C_1 und C_2

$$C_1 = \frac{U}{R}; \quad C_2 = -C_1 = -\frac{U}{R}$$

und damit nach Einsetzen beider Konstanten als endgültige Lösung

$$I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \underline{\frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}.$$

292. Durch Betätigen des Schalters S (Bild 167) wird der Kondensator über den Widerstand R an die Klemmenspannung U_0 angeschlossen. In welcher Zeit, vom Beginn des Aufladens eines Kondensators der Kapazität C an gerechnet, erreicht die Spannung auf den Kondensatorplatten den Wert U_C?

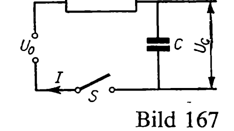


Bild 167

Lösung

Gemäß dem 2. KIRCHHOFFschen Gesetz können wir für den angegebenen Stromkreis in jedem Augenblick die Beziehung

$$\frac{Q}{C} + U_0 = IR$$

anwenden. Dabei ist Q der Momentanwert der auf den Kondensatorplatten gespeicherten Ladung. Da wir für den Strom $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ schreiben können, erhalten wir nach Umformung die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{CR}Q - \frac{U_0}{R}. \tag{1}$$

Wenn wir die Substitution

$$\frac{Q}{CR} + \frac{U_0}{R} = x$$

einführen, wird

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{CR}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = CR\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

so daß wir nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{CR}x.$$

Durch Integration dieser Gleichung finden wir

$$x = k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{Q}{CR} + \frac{U_0}{R} = k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}.$$

Die Integrationskonstante k bestimmen wir aus der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ auch die Ladung $Q = 0$ ist, so daß sich ergibt

$$k = \frac{U_0}{R}.$$

Da $Q/C = -U_C$ die am Kondensator anliegende Momentanspannung ist, die gegen die Klemmenspannung U_0 gemessen wird, ergibt sich

$$-U_C + U_0 = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}, \quad \text{d. h.,}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}} = \frac{U_0 - U_C}{U_0},$$

so daß für die gesuchte Zeit t, zu der am Kondensator die Spannung U_C besteht, die Beziehung gilt:

$$\underline{t = CR \ln \frac{U_0}{U_0 - U_C}}.$$

293. Ein Stromkreis enthält in Serie geschaltet einen ohmschen Widerstand $R = 10\ \Omega$, einen Kondensator der Kapazität $C = 2\ \mu\text{F}$ und eine Induktionsspule der Induktivität $L = 0{,}1$ H. Er ist an eine Wechselspannung $U = 220$ V mit der Netzfrequenz $f = 50\ \text{s}^{-1}$ angeschlossen. Welcher Strom fließt in dem angegebenen Stromkreis?

Lösung

Der Scheinwiderstand des Stromkreises aus dem ohmschen Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C wird bei der Kreisfrequenz ω angegeben durch

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Demnach wird entsprechend dem OHMschen Gesetz bei der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2\pi\ 50\ \text{s}^{-1} = 314\ \text{s}^{-1}$ der Strom einen Effektivwert annehmen, für den gilt

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} =$$

$$= \frac{220\ \text{V}}{\sqrt{10^2\ \Omega^2 + \left(314\ \text{s}^{-1} \cdot 0{,}1\ \text{H} - \frac{1}{314\ \text{s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{F}}\right)^2}} = \underline{0{,}14\ \text{A}}.$$

294. Eine Drosselspule und ein Kondensator der Kapazität $C = 10\ \mu\text{F}$, die hintereinandergeschaltet sind, werden von einem Strom $I = 1$ A durchflossen. Sie sind an ein Netz der

Spannung $U = 120$ V und der Frequenz $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$ angeschlossen. Der ohmsche Widerstand der Drosselspule hat den Wert $R = 120\ \Omega$. Berechnen Sie die Induktivität der Spule.

Lösung

Aus der Beziehung

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

erhält man die gesuchte Induktivität und kann sie wie folgt ausdrücken:

$$L = \frac{\sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} + \frac{1}{\omega C}}{\omega} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{120^2\ \mathrm{V}^2}{1^2\ \mathrm{A}^2} - 120^2\ \Omega^2} + \frac{1}{314\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}}}{314\ \mathrm{s}^{-1}} = \underline{1{,}013\ \mathrm{H}}.$$

295. Ein Kondensator soll einen kapazitiven Widerstand $X = 500\ \Omega$ haben. Wie groß muß demnach seine Kapazität bei einer Frequenz von a) $50\ \mathrm{s}^{-1}$ und b) $50000\ \mathrm{s}^{-1}$ sein?

Lösung

Den kapazitiven Widerstand können wir mit Hilfe der Kapazität C und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ausdrücken, d. h.,

$$X = \frac{1}{\omega C}.$$

Die gesuchte Kapazität berechnen wir aus

$$C = \frac{1}{X\omega} = \frac{1}{2\pi f X}.$$

Für die einzelnen vorgenannten Frequenzen ermitteln wir dann die entsprechenden Kapazitäten wie folgt:

$$C_{50} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 500\ \Omega} = 6{,}37 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} = \underline{6{,}37\ \mu\mathrm{F}};$$

$$C_{50\,000} = \frac{1}{2\,\pi \cdot 50000\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 500\ \Omega} = 6{,}37 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F} = \underline{0{,}00637\ \mu\mathrm{F}}.$$

296. Ein Kondensator der Kapazität $C = 16\,\mu F$ und ein ohmscher Widerstand der Größe $R = 200\,\Omega$ sind, in Serie geschaltet, an ein Wechselstromnetz der Spannung $U = 220$ V und der Frequenz $f = 50\,s^{-1}$ angeschlossen. Es sind für diesen Fall folgende Größen zu bestimmen: die Impedanz des Stromkreises, die Stromstärke, die Phase zwischen Spannung und Strom, die am Kondensator und die am ohmschen Widerstand anliegende Spannung.

Lösung

Wir wenden die für einen Wechselstromkreis der angegebenen Art gültigen Beziehungen an und finden

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{200^2\,\Omega^2 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot 50\,s^{-1} \cdot 16 \cdot 10^{-6}\,F}\right)^2} = \underline{282{,}1\,\Omega};$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220\,V}{282\,\Omega} = \underline{0{,}779\,A};$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{200\,\Omega}{282\,\Omega} = 0{,}707; \quad \underline{\varphi = 44°50'},$$

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{0{,}78\,A}{2\pi \cdot 50\,s^{-1}\,16 \cdot 10^{-6}\,F} = \underline{155{,}15\,V};$$

$$U_R = IR = 0{,}78\,A \cdot 200\,\Omega = \underline{155{,}97\,V.}$$

297. Ein Stromverbraucher mit einer Leistungsaufnahme $P = 3$ kW und einem Leistungsfaktor $\cos\varphi_1 = 0{,}6$ ist an ein elektrisches Netz der Spannung $U = 220$ V und der Frequenz $f = 50\,s^{-1}$ angeschlossen.
a) Welchen Kondensator müßten wir in Parallelschaltung an die Klemmen des Stromverbrauchers anschließen, um eine Erhöhung des Leistungsfaktors auf den Wert $\cos\varphi_1 = 0{,}9$ zu erreichen?
b) Wie müßte ein Kondensator beschaffen sein, dessen zusätzlicher Anschluß keine Phasenverschiebung ergibt, so daß $\cos\varphi_2 = 1$ wird?

Lösung

Die ohmsche Komponente des durch den Stromverbraucher fließenden Stroms I_R zeigt bezüglich der Spannung U keine Phasenverschiebung. Wir bezeichnen sie deshalb mit dem Zeiger $\vec{I}_R^*$, der mit der Richtung des Spannungszeigers $\vec{u}^*$ zusammenfällt (Bild 168). Wenn wir als positive Richtung die Richtung der Phasenverschiebung entgegen dem Uhrzeigersinn bezeichnen, dann sind die induktive und die kapazitive Stromkomponente durch die Vektoren $\vec{I}_L^*$ und $\vec{I}_C^*$ zu definieren. Der resultierende Zeiger

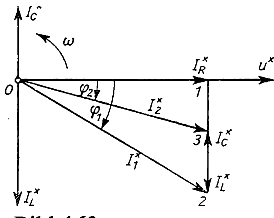


Bild 168

wird vor dem Anschluß des Zusatzkondensators die Größe $\vec{I}_1^*$ und nach dessen Anschluß die Größe $\vec{I}_2^*$ haben.

Zwischen der alten Stellung des resultierenden Stromzeigers $\overrightarrow{12}$ und des neuen $\overrightarrow{13}$ wird nach Bild 168 die Beziehung

$$\overrightarrow{23} = \overrightarrow{12} - \overrightarrow{13}$$

gelten. Für die Größen der Zeiger bedeutet das

$$I_C = I_R \tan \varphi_1 - I_R \tan \varphi_2,$$

$$\frac{U}{\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{P}{U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2).$$

Daraus ergibt sich

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2).$$

a) Da $\cos \varphi_1 = 0{,}6$ dem in den Tabellen angegebenen Wert $\tan \varphi_1 = 1{,}3333$ entspricht und für $\cos \varphi_2 = 0{,}9$ sich $\tan \varphi_2 = 0{,}4843$ ergibt, erhalten wir die Kapazität des erforderlichen Kondensators zu

$$C = \frac{3000 \text{ W}}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 220^2 \text{ V}^2} (1{,}3333 - 0{,}4843) = \underline{167{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ F}}.$$

b) Wenn wir die Phasenverschiebung auf den Wert $\cos \varphi_2 = 1$ ausgleichen wollen, setzen wir in die oben abgeleitete Beziehung $\tan \varphi_2 = 0$ ein, so daß sich ergibt

$$C = \frac{P}{\omega U^2} \tan \varphi_1 = \frac{3000 \text{ W}}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 220^2 \text{ V}^2} 1{,}3333 = \underline{263{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ F}}.$$

298. Welcher Strom fließt durch einen Stromkreis, der aus einer Induktivität $L = 4$ H und aus einer Kapazität $C = 16$ µF besteht, die, in Parallelschaltung angeordnet, an eine Wechselstromquelle der Spannung $U = 220$ V und der Frequenz $f = 50 \text{ s}^{-1}$ angeschlossen sind?

Lösung

Der angegebene Stromkreis ist in Bild 169a dargestellt, sein Zeigerdiagramm in Bild 169b. Der in der Spule fließende Strom ist um 90° gegenüber der Spannung U verzögert, wo-

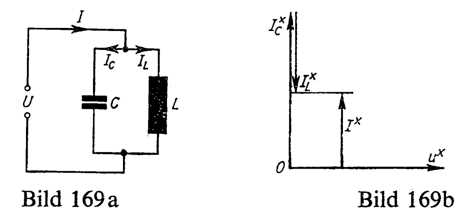


Bild 169a Bild 169b

durch sich ergibt, daß der Kondensatorstrom seinerseits der Klemmenspannung um 90° vorauseilt. Aus dem dargestellten Zeigerdiagramm resultiert die Größe der Zeiger zu

$$\vec{I} = \vec{I}_C - \vec{I}_L.$$

Da jedoch

$$I_C = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}}, \quad I_L = \frac{U}{\omega L}$$

ist, wird

$$I = U\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 220\ \mathrm{V}\left(2\pi \cdot 50\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 16 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} - \frac{1}{2\pi \cdot 50\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 4\ \mathrm{H}}\right) =$$

$$= \underline{0{,}93\ \mathrm{A}}.$$

299. Ein in Bild 170 dargestellter Serienresonanzkreis, bestehend aus einer Spule mit dem ohmschen Widerstand $R = 0{,}2\ \Omega$, der Induktivität $L = 50\ \mu\mathrm{H}$ und einem Kondensator der Kapazität $C = 300$ pF, ist an eine Spannung $U = 4$ V angeschlossen. Ermitteln Sie die Resonanzfrequenz, den Resonanzstrom und die bei Resonanz an Induktivität bzw. Kapazität anliegende Spannung.

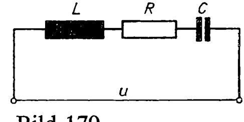


Bild 170

Lösung

Für die Resonanzfrequenz gilt die Beziehung

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H} \cdot 300 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}}} = \underline{1{,}299 \cdot 10^6\ \mathrm{s^{-1}}}.$$

Der im Resonanzfall fließende Strom entspricht dem, der nur bei Vorhandensein eines ohmschen Widerstands aufträte, nämlich

$$I_r = \frac{U}{R} = \frac{4\ \mathrm{V}}{0{,}2\ \Omega} = \underline{20\ \mathrm{A}}.$$

Die an Induktivität und Kapazität anstehende Spannung erhalten wir aus dem OHMschen Gesetz für Wechselstrom zu

$$U_L = I_r \omega_r L = 20\ \mathrm{A} \cdot 2\pi \cdot 1{,}299 \cdot 10^6\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H} = \underline{8{,}165 \cdot 10^3\ \mathrm{V}};$$

$$U_C = I_r \frac{1}{\omega_r C} = 20\ \mathrm{A}\, \frac{1}{2\pi \cdot 1{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 300 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}} = \underline{8{,}165 \cdot 10^3\ \mathrm{V}}.$$

300. Ein Schwingkreis besteht aus einer Spule der Induktivität $L = 0{,}07$ H und einem Plattenkondensator mit dem Flächeninhalt $A = 0{,}45\ \mathrm{m^2}$, der als Dielektrikum Paraffinpapier der Dicke $d = 0{,}1$ mm ($\varepsilon_r = 2$) enthält. Es ist die Maximalstärke und die Periode des Resonanzstroms zu bestimmen für den Fall, daß der Kondensator anfangs auf die Spannung $U_0 = 100$ V aufgeladen wurde und daß der ohmsche Widerstand des Kreises zu vernachlässigen ist.

Lösung

In Anwendung des 2. KIRCHHOFFschen Gesetzes können wir für diesen Stromkreis schreiben

$$RI = U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

eine Beziehung, die in Hinsicht auf die Voraussetzung, daß $R = 0$ ist, vereinfacht werden kann zu

$$0 = U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Da aber auch $U = Q/C$ ist, ergibt sich

$$0 = \frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

Indem wir die vorstehende Gleichung nach der Zeit differenzieren, können wir sie unter Verwendung des Ausdrucks $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = -I$ in die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 I$$

bringen, wobei wir $^1/LC = \omega^2$ gesetzt haben. Wir lösen die angegebene Differentialgleichung und erhalten

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

worin I_0 die Maximalamplitude des im Schwingkreis fließenden Stroms und φ seine Phasenkonstante darstellt. Beide Größen können wir aus den Anfangsbedingungen ermitteln. Da für die Zeit $t = 0$ auch $I = 0$ und $U = U_0$ gilt, ergibt sich aus Gl. (2) $\varphi = 0$. Aus Gl. (1) jedoch folgt

$$0 = U_0 - L\omega I_0,$$

d. h.,

$$I_0 = \frac{U_0}{L\omega} = \frac{U_0}{L\sqrt{\frac{1}{LC}}} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Da die Kapazität eines Plattenkondensators durch die Beziehung

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d} = \varepsilon\frac{A}{d}$$

angegeben wird, erhalten wir nach Einsetzen der gegebenen Werte

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{\varepsilon A}{Ld}} = 100\sqrt{\frac{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}45}{0{,}07\cdot 0{,}0001}}\,\mathrm{A} \approx \underline{0{,}107\,\mathrm{A}}.$$

Für die Periodendauer der ungedämpften Schwingung des Kreises finden wir schließlich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{L\varepsilon A}{d}} = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}07 \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}45}{0{,}0001}}\,\text{s} \approx$$

$$\approx \underline{4{,}7 \cdot 10^{-4}\,\text{s}}.$$

301. Wie groß ist die Phasenspannung eines Drehstromgenerators, dessen Spulen in Sternschaltung stehen, wenn die Leiterspannung 220 V beträgt?

Lösung

Da die Spulen des Generators um jeweils einen Winkel von 120° gegeneinander gedreht sind, müssen auch die in ihnen induzierten Spannungen jeweils um 120° gegeneinander elektrisch verschoben sein. Wenn wir die Phasenspannungen $\vec{u}_f^*$ als umlaufende Zeiger darstellen, dann werden auch sie um 120° gegeneinander verdreht sein. Die Leiterspannung $\vec{u}_s^*$ stellt dann die Differenz zweier Phasenspannungszeiger dar; also ist $\vec{u}_s^*$ der die Spitzen der Zeiger $\vec{u}_f^*$ verbindende Zeiger.

Aus Bild 171 ist zu entnehmen, daß entsprechend dem Teildreieck $00'C$ die Zeiger bestimmt sind zu

$$\frac{U_s}{2} = U_f \cos 30° = U_f \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit ist

$$U_f = \frac{U_s}{\sqrt{3}} = \frac{220\,\text{V}}{1{,}73205} = \underline{127\,\text{V}}.$$

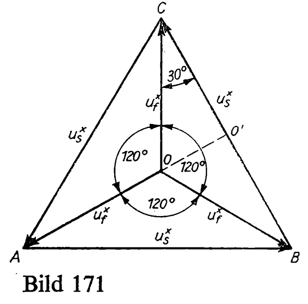


Bild 171

302. In der Speiseleitung eines elektrischen Drehstromofens, der für 3 · 380 V in Dreieckschaltung ausgelegt ist, wird ein Strom $I_s = 6$ A gemessen. Wie groß ist
a) der Phasenstrom,
b) der Widerstand in einer Phase,
c) die Ofenleistung?

Lösung

a) Bekanntlich ist die Beziehung zwischen Phasenstrom und verkettetem Leiterstrom bei der Dreieckschaltung analog der Beziehung zwischen den Spannungen bei der Sternschaltung, also

$$I_f = \frac{I_s}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \underline{3{,}464\,\text{A}}.$$

b) Da im Falle der Dreieckschaltung gilt

$$U_f = U_s,$$

erhalten wir

$$R_f = \frac{U_f}{I_f} = \frac{380\,\text{V}}{3{,}47\,\text{A}} = \underline{109{,}7\,\Omega}.$$

c) Die Leistung berechnen wir aus den angegebenen Werten, die in die Beziehung für die Leistung des Drehstroms eingesetzt werden. Diese erhalten wir als den dreifachen Wert der mit einer einzigen Phase übertragenen Leistung, also

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi.$$

Diese Beziehung wird allgemein in der Weise angewendet, daß alle Werte verkettete Werte darstellen. Für den Fall der Sternschaltung bedeutet das

$$P = 3\frac{U_s}{\sqrt{3}} I_s \cos\varphi = \sqrt{3}\; U_s I_s \cos\varphi\,.$$

Das gleiche gilt im Falle der Dreieckschaltung, also

$$P = 3U_s \frac{I_s}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3}\; U_s I_s \cos\varphi\,.$$

In unserem Falle ergibt das

$$P = \sqrt{3} \cdot 380\,\text{V} \cdot 6\,\text{A} \cdot 1 = 3949\,\text{W} = \underline{3{,}949\,\text{kW}}.$$

303. Mit welchem Leistungsfaktor arbeitet ein Drehstrommotor, der bei einer Leiterspannung von $U = 6000\,\text{V}$ und einer Leistungsaufnahme $P_i = 200\,\text{kW}$ den Strom $I = 23{,}4\,\text{A}$ aufnimmt? Welche Spannung entfiele auf eine einzige Phase, wenn die Motorwicklung in Sternschaltung ausgeführt würde?

Lösung

Den Leistungsfaktor bestimmen wir aus der Beziehung für die Drehstromleistung des Motors zu

$$P = \sqrt{3}\; U_s I_s \cos\varphi$$

(U_S, I_S verkettete Werte der Spannung und des Stromes, $\cos\varphi$ Leistungsfaktor des Motors). Daraus folgt

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{3}\; U_s I_s} = \frac{200 \cdot 1000\,\text{W}}{1{,}73205 \cdot 6000\,\text{V} \cdot 23{,}4\,\text{A}} = \underline{0{,}8224}.$$

Für die Beziehung zwischen Phasen- und Leiterspannung gilt bei der Sternschaltung

$$U_f = \frac{U_s}{\sqrt{3}} = \frac{6000\,\text{V}}{1{,}73205} = \underline{3464\,\text{V}}.$$

A Aufgaben

377. In einem Magnetfeld der Induktion $B = 50 \cdot 10^{-4}$ Wb m^{-2} rotiert mit einer Frequenz $n = 3000$ min^{-1} ein Leiter, der aus $N = 400$ Windungen besteht und die Gestalt eines Rechtecks hat, dessen Abmessungen $a = 0{,}15$ m und $b = 0{,}2$ m sind. Wie groß ist der Maximalwert der im Leiter induzierten Spannung?
378. Eine rechteckige Spule mit den Abmessungen 2,0 cm · 2,5 cm besteht aus 100 Windungen und rotiert gleichmäßig in einem homogenen Magnetfeld der Induktion $B = 1000$ G um die zur Feldrichtung senkrecht orientierte Achse

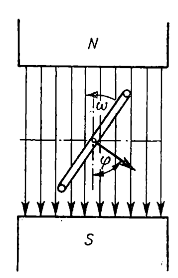


Bild 172

(Bild 172). In ihr wird dabei eine Spannung mit der Maximalamplitude $U_0 = 1{,}57$ V induziert. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Spule?
379. Eine elektrische Maschine gibt bei 220 V einen Strom von 109 A ab und hat laut Wattmeteranzeige eine Leistungsaufnahme $P_i = 20$ kW. Wie groß ist ihr Leistungsfaktor?
380. Wie groß ist die Effektivspannung eines Wechselstroms, dessen Maximalspannung den Wert $U_0 = 170$ V aufweist?
381. Ein Wechselstromverbraucher nimmt laut Meßanzeige einen Strom $I = 2$ A auf, wenn die Klemmenspannung den Wert $U = 110$ V hat. Der Strom ist gegenüber der Spannung um den Winkel φ aus $\cos\varphi = 0{,}8$ verschoben. Es ist die Leistung des Wechselstroms zu berechnen.
382. Berechnen Sie, welchen Strom ein Einphasenelektromotor der Leistung $P = 2$ PS aus einem Wechselstromnetz mit der Spannung $U = 220$ V entnimmt, wenn der Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}8$ und der Wirkungsgrad $\eta = 90\%$ beträgt.
383. Ein Motor für Dreiphasenstrom ist an eine Netzspannung $U_S = 380$ V angeschlossen. a) Wie groß ist die Spannung zwischen dem Leiter und dem Nullpunkt der Motorwicklung? b) Wie groß ist der Strom in der Spule des Motors, wenn er in der Zuleitung den Wert $I_S = 6$ A hat?
384. Welche Leistung hat ein Drehstrommotor mit den Angaben $U = 380$ V, $I = 30$ A, $\cos\varphi = 0{,}8$ und $\eta = 0{,}85$?
385. Ein Drehstromgenerator gibt bei einer Spannung $U = 6300$ V einen Strom $I = 200$ A bei $\cos\varphi = 0{,}8$ ab. Wie groß ist seine Leistung?
386. Ein Drehstrommotor, dessen Spulen in Dreieckschaltung angeordnet sind, ist an ein Netz der Spannung $U_S = 220$ V angeschlossen. Die Netzfrequenz beträgt $f = 50$ s^{-1}. Er gibt bei einem Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}75$ und einem Wirkungsgrad $\eta = 90\%$ eine Leistung von $P = 36{,}8$ PS ab. Welcher Strom I_s fließt in den Speiseleitern (verketteter Strom)?
387. Ein Kondensator ist nach Bild 173 geschaltet. Die Kenngrößen sind $U = 220$ V, $R = 10\ \Omega$, $C = 1\ \mu$F, $L = 2$ H und $\omega = 2\pi \cdot 50$ s^{-1}. Es ist die an den Klemmen des Kondensators auftretende Effektivspannung zu berechnen.

388. Ein Serienstromkreis, bestehend aus einem Kondensator der Kapazität $C = 8\ \mu F$, einer Spule der Induktivität $L = 2$ H und einem ohmschen Widerstand $R = 30\ \Omega$ ist an eine Quelle der

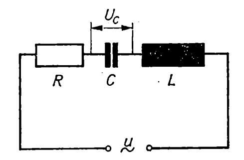


Bild 173

Spannung $U = 110$ V und der Frequenz $f = 50\ s^{-1}$ angeschlossen. Es sind zu bestimmen: die Impedanz des gesamten Stromkreises, der im Kreis fließende Strom, die am Kondensator und an der Spule anliegende Spannung sowie der Leistungsfaktor des Stromkreises.

389. Eine Spule der Induktivität $L = 0{,}5$ H ist mit einem ohmschen Widerstand $R = 157\ \Omega$ zusammen in Serie geschaltet und an ein Netz der Spannung $U = 220$ V und der Frequenz $f = 50\,s^{-1}$ angeschlossen. Es sind zu bestimmen: die Impedanz dieser Kombination, die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, die Stromstärke sowie die an Spule und Widerstand anliegende Spannung.

390. Ein ohmscher Widerstand $R = 3\ \Omega$ und ein Kondensator der Kapazität C, dessen kapazitiver Widerstand bei einer Frequenz von $f = 50\,s^{-1}$ den Wert $R_C = 1/\omega C = 5\ \Omega$ hat, sind parallelgeschaltet und an eine Wechselspannungsquelle $U = 10$ V und $f = 50\ s^{-1}$ angeschlossen (Bild 174a). Es sind zu bestimmen: der Scheinwiderstand des gesamten Stromkreises, der im Kreis fließende Strom, der im Widerstand und der im Kondensator fließende Strom sowie die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.

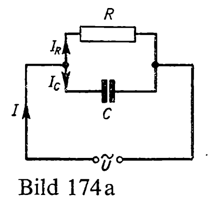


Bild 174a

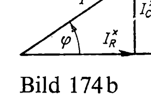


Bild 174b

391. Welcher Strom fließt in dem in Bild 175 dargestellten Stromkreis, wenn $L = 9$ H,

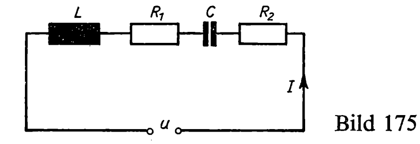


Bild 175

$R_1 = 200\ \Omega$, $C = 1\ \mu F$, $R_2 = 58\ \Omega$, $U = 220$ V und $f = 50\ s^{-1}$ ist?

392. Durch eine Spule der Induktivität $L = 0{,}25$ H fließt ein Strom $I = I_0 \sin \omega t$ mit $I_0 = 1$ A und $\omega = 3140\ s^{-1}$. Bestimmen Sie den Maximalwert der in der Spule induzierten Spannung.

393. Wie groß muß der Maximalwert des Induktionsflusses im Kern eines Transformators bei der Frequenz $f = 50\ s^{-1}$ sein, damit in einer Windung der Sekundärwicklung eine Spannung mit dem Effektivwert $U_{eff} = 0{,}25$ V induziert wird?

394. Die Primärwicklung eines Transformators hat $N_1 = 880$ Windungen, die Sekundärwicklung $N_2 = 1200$ Windungen. Welche Spannung wird in der Sekundärwicklung induziert, wenn die Primärwicklung an eine Spannung vom Betrag $U_1 = 220$ V angeschlossen wird?

395. Eine Batterie von in Serie geschalteten Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1 und C_2 (Bild 176) enthält zur Zeit $t = 0$ die Spannung U_0. Welche Funktion

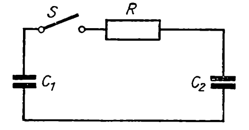


Bild 176

nimmt der zeitliche Stromverlauf nach Schließen des Schalters S an?

396. Ein Kondensator der Kapazität $C = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ F ist auf die Spannung $U = 500$ V aufgeladen. Er ist Teil eines Stromkreises der Induktivität $L = 5 \cdot 10^{-5}$ H. Wie groß wird der Maximalwert des ungedämpften Schwingkreisstroms, und in welcher Zeit wächst er vom Nullwert bis zum Maximum an?

397. Eine Spule der Induktivität $L = 1$ H soll zusammen mit einem ohmschen Widerstand $R = 1\ \Omega$ zur Zeit $t = 0$ an eine konstante Spannung U angeschlossen sein. Es ist die Zeitspanne zu bestimmen, nach deren Ablauf der durch den Stromkreis fließende Strom seinen konstanten Endwert erreicht hat, wobei die Genauigkeit $1\,‰$ betragen soll.

4. Optik

4.1. Photometrie

Eine Lichtquelle sendet Lichtstrahlung einer bestimmten Energie nach allen Seiten aus. Unter **Strahlungsfluß** Φ_e verstehen wir gewöhnlich diejenige Lichtenergie (allgemein: Strahlungsenergie), die in der Zeiteinheit durch irgendeine Fläche strömt.
Mit **Lichtstrom** Φ bezeichnen wir den Strahlungsfluß, der von einem normalen menschlichen Auge wahrgenommen wird. Das **photometrische Strahlungsäquivalent** K stellt das Verhältnis des Lichtstroms Φ zum zugehörigen Strahlungsfluß Φ_e durch dieselbe Fläche dar.
Der Lichtstrom, den eine Strahlungsquelle in den gesamten umgebenden Raum aussendet, wird als die **Gesamtlichtstärke** einer Lichtquelle bezeichnet.
Wenn eine punktförmige Lichtquelle in den Raumwinkel $\mathrm{d}\omega$ einen Lichtstrom $\mathrm{d}\Phi$ aussendet, dann heißt der Quotient

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega}$$

Richtlichtstärke einer Quelle in der betreffenden Richtung. Die Gesamtlichtstärke einer Lichtquelle ist

$$\Phi = \int_0^{4\pi} I \,\mathrm{d}\omega .$$

Wenn ihre Richtstärke in alle Richtungen gleich groß ist, wird

$$\Phi = 4\pi I.$$

Unter der **Beleuchtungsstärke** E einer Fläche A verstehen wir den Quotienten aus dem Lichtstrom $d\Phi$ und dem Flächenelement dA, auf das er trifft, also

$$E = \frac{d\Phi}{dA}.$$

Wenn auf eine Fläche dA Lichtstrahlen einer im Abstand s entfernt stehenden Punktquelle der Lichtstärke I auftreffen und wenn die Lichtstrahlen gegenüber der Flächennormalen mit dem Winkel φ einfallen, dann wird die Beleuchtungsstärke der Fläche durch folgende Beziehung bestimmt:

$$E = \frac{I \cos \varphi}{s^2}.$$

B Beispiele

304. In einem Projektionsapparat wird eine Glühlampe mit einem Gesamtlichtstrom der Größe $\Phi_0 = 4800$ lm verwendet. Bei der Projektion ist die Bildfläche in Gestalt eines Rechtecks mit den Seiten $a = 2$ m und $b = 1{,}5$ m gleichmäßig mit einer Beleuchtungsstärke $E = 4$ lx ausgeleuchtet. Welcher Anteil des von der Glühlampe ausgesandten Lichtstroms trifft auf die Projektionsfläche?

Lösung

An einer Stelle einer beleuchteten Fläche, an der die Beleuchtungsstärke den Wert E lx annimmt, fällt auf das Flächenelement dA der Lichtstrom

$$d\Phi = E\,dA$$

und damit auf die Fläche A der Lichtstrom

$$\Phi = \int_A E\,dA.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Beleuchtungsstärke auf der gesamten Bildfläche überall gleich groß ist, gilt für die Beleuchtungsstärke $E = \text{const}$, und es wird

$$\Phi = EA,$$

wobei A der Flächeninhalt der Bildfläche ist.
Vom gesamten von der Glühlampe ausgesandten Lichtstrom Φ_0 entfällt auf die Bildfläche der Anteil

$$u = \frac{\Phi}{\Phi_0}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir als Ergebnis

$$u = \frac{4\,\text{lx} \cdot 2\,\text{m} \cdot 1{,}5\,\text{m}}{4800\,\text{lm}} = 0{,}0025, \quad \text{d. h.,} \quad \underline{0{,}25\,\%}.$$

305. Eine Wand wird durch zwei gleichartige Kerzen beleuchtet, die im Abstand $d = 1$ m von der Wand dicht nebeneinander aufgestellt sind. Berechnen Sie, um welche Strecke wir die eine Kerze an die Wand heranrücken müssen, wenn nach Erlöschen der anderen die Wand ebenso wie vordem beleuchtet sein soll.

Lösung

Für die Beleuchtungsstärke einer Fläche bei Beleuchtung durch eine Punktquelle gilt die Beziehung

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \varphi .$$

Da beide Kerzen von der Wand den gleichen Abstand d und gleiche Lichtstärken $I_1 = I_2$ haben und die Lichtstrahlen von beiden senkrecht auf die Wand auftreffen, ist die Gesamtbeleuchtungsstärke der Fläche wegen der gleichzeitigen Beleuchtung mit beiden Kerzen durch die Beziehung

$$E_0 = \frac{2I}{d^2}$$

gegeben. Nach dem Auslöschen der einen Kerze müssen wir die zweite bis auf einen solchen Abstand x an die Wand heranrücken, daß die Beleuchtungsstärke der Wand ebenso groß ist wie vorher, damit also die Beziehung

$$\frac{2I}{d^2} = \frac{I}{x^2}$$

erfüllt wird. Daraus finden wir

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{2} .$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir

$$\underline{x = 0{,}7\,\text{m}}.$$

Die Kerze muß demnach $\underline{30\ \text{cm}}$ an die Wand herangerückt werden.

306. In der Mitte über einer kreisrunden Tischplatte vom Radius $r = 1$ m hängt eine (punktförmige) Lichtquelle. Berechnen Sie, in welcher Höhe über der Tischplatte sie hängen muß, damit die Beleuchtungsstärke am Tischrand einen maximalen Wert annimmt.

Lösung

Wenn sich wie in Bild 177 die Lichtquelle in einem Abstand l von dem Rand der Tischplatte befindet und der Einfallswinkel des Lichtes mit φ angegeben ist, so ist in jedem Punkt des kreisrunden Tischrandes die Beleuchtungsstärke durch die Beziehung

$$E = \frac{I \cos \varphi}{l^2}$$

gegeben. Ist die Lichtquelle in einer Höhe $h = x$ über dem Mittelpunkt der Tischplatte angeordnet, dann gilt

$$\cos \varphi = \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad l = \sqrt{x^2 + r^2},$$

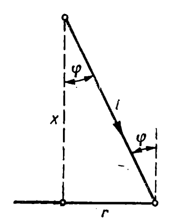


Bild 177

so daß sich ergibt

$$E = \frac{Ix}{(\sqrt{x^2 + r^2})^3}.$$

Wenn die Beleuchtungsstärke einen Maximalwert annehmen soll, so muß die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0$$

erfüllt sein. Das führt zu folgender Gleichung:

$$\frac{1}{(\sqrt{x^2 + r^2})^3} - \frac{3x^2}{(\sqrt{x^2 + r^2})^5} = 0.$$

Nach Umformung und Auflösung dieser Gleichung erhalten wir

$$\underline{x = \pm \frac{r\sqrt{2}}{2}}.$$

Die Lampe muß also in einer Höhe von <u>70 cm</u> über der Mitte des Tisches aufgehängt werden.

307. Ein Tisch wird durch zwei Glühlampen beleuchtet, die in einer Höhe $h = 2$ m über der Tischfläche und in einem gegenseitigen Abstand $d = 1$ m voneinander aufgehängt sind. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärken
a) in den senkrecht unter den Lampen gelegenen Punkten und
b) in der Mitte zwischen diesen beiden Punkten
unter der Voraussetzung, daß jede der beiden Glühlampen die Lichtstärke $I_0 = 200$ cd hat.

Lösung

In jedem beliebigen Punkt der Tischplatte wird die Beleuchtungsstärke E gleich der Summe der von den beiden Lichtquellen herrührenden Beleuchtungsstärken sein, also

$$E = E_1 + E_2 . \tag{1}$$

Im Fall a) gilt entsprechend den in Bild 178 angewendeten Bezeichnungen

$$E_1 = \frac{I_0}{h^2}, \quad E_2 = \frac{I_0 \cos \varphi_1}{r_1^2} .$$

Da

$$\cos \varphi_1 = \frac{h}{r_1} \quad \text{und} \quad r_1 = \sqrt{d^2 + h^2}$$

ist, geht Gl. (1) in die folgende Form über:

$$E = \frac{I_0}{h^2} + \frac{I_0 h}{\left(\sqrt{d^2 + h^2}\right)^3} .$$

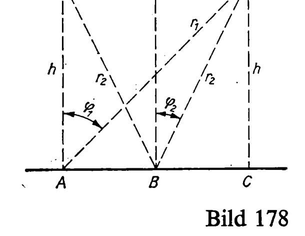


Bild 178

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$\underline{E = 86 \text{ lx}} .$$

Im Fall b) bildet der Punkt B, der mitten zwischen den beiden Fußpunkten A und C liegt, die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Seiten r_2, r_2 und d sind. In diesem Dreieck gilt

$$\cos \varphi_2 = \frac{h}{r_2} \quad \text{und} \quad r_2 = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} .$$

Für die von den einzelnen Lichtquellen herrührende Beleuchtungsstärke folgt daraus

$$E_1 = E_2 = \frac{I_0 h}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^3}} .$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks für die Teilbeleuchtungsstärke in Gl. (1) erhalten wir für die Gesamtbeleuchtungsstärke im Punkt B

$$E = 2E_1 = 2 \frac{I_0 h}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^3}} .$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$\underline{E = 91{,}2 \text{ lx}} .$$

A Aufgaben

398. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke einer Fläche in einem Punkt, auf den aus einer Lichtquelle der Lichtstärke $I = 50$ cd, die im Abstand $r = 4$ m von diesem Punkt angebracht wurde, Lichtstrahlen unter einem Winkel $\varphi = 25°$ einfallen.
399. Über dem Mittelpunkt einer quadratischen Tischplatte hängt in der Höhe $h = 1$ m eine Lampe der Lichtstärke $I = 30$ cd. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke auf der Tischplatte
    a) im Mittelpunkt,
    b) in den einzelnen Ecken, wenn die Seitenlänge des quadratischen Tisches 2 m beträgt.
400. Berechnen Sie, welcher Lichtstrom aus einer Quelle der Lichtstärke $I = 200$ cd auf eine Fläche der Größe $A = 10\ \text{cm}^2$ einfällt, die senkrecht zum Lichteinfall im Abstand $d = 2$ m von der Lichtquelle angeordnet ist.
401. Über einer hohlen Halbkugelfläche mit dem Radius $R = 1$ m befindet sich in einer Höhe, die gleich dem Kugeldurchmesser ist, eine punktförmige Lichtquelle (Bild 179). Sie hat nach allen Seiten die gleiche Lichtstärke und sendet einen Gesamtlichtstrom von 600 lm aus. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke an einem Punkt im Innern der Halbkugelfläche, auf den das Licht unter dem Winkel $\varphi = 30°$ einfällt.
402. Eine punktförmige Lichtquelle L beleuchtet eine waagerechte Ebene (Bild 180). Ermitteln Sie, wie sich die

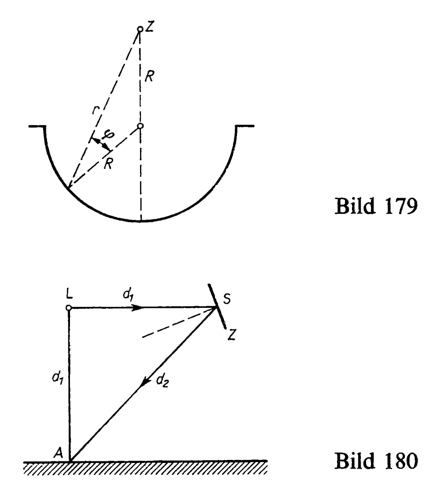


Bild 179

Bild 180

Beleuchtungsstärke in einem Punkt A, in den der Lichtstrahl senkrecht einfällt, ändert, wenn wir seitlich zur Lichtquelle einen Planspiegel S so aufstellen, daß dieser gleich weit von L wie L von A entfernt ist. Der Spiegel, von dem wir voraussetzen, daß er das Licht verlustlos reflektiert, ist so eingestellt, daß er den von L kommenden Lichtstrahl nach A weiterleitet.

4.2. Geometrische Optik

Reflexionsgesetz

Ein Lichtstrahl, der auf die Grenzfläche zweier Medien auftrifft, wird so reflektiert, daß er in der Einfallsebene verbleibt. Dabei schließt er mit dem Einfallslot einen Winkel α' ein, der gleich dem Winkel α ist, den der einfallende Strahl mit dem Ein-

fallslot bildet. Die Einfallsebene wird durch den einfallenden Strahl und das Einfallslot bestimmt.

Brechungsgesetz

Wenn ein Lichtstrahl in ein anderes Medium eintritt, verläuft er, vorausgesetzt, daß das andere Medium isotrop ist, weiter in der Einfallsebene, wird aber aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt. Wenn der Einfallswinkel mit α_1 und der Brechungswinkel mit α_2 angegeben wird, dann ist der Quotient

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{12}$$

unabhängig vom Einfallswinkel. Er wird **relative Brechzahl** n_{12} genannt. Unter der **absoluten Brechzahl** n eines Stoffes verstehen wir den Quotienten

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = n,$$

wobei α_0 den Einfallswinkel im Vakuum und α den Brechungswinkel des Lichtstrahls im gegebenen Medium darstellt.

Den Zusammenhang zwischen der relativen Brechzahl zweier Medien und ihren absoluten Brechzahlen liefert die Beziehung

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

(n_2 Brechzahl des zweiten, optisch dünneren und n_1 die des ersten, optisch dichteren Mediums).

Von den beiden Medien wird dasjenige als das optisch dichtere angesehen, dessen absolute Brechzahl die größere ist.

Beim Übertritt eines Lichtstrahls aus einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium ist der Brechungswinkel größer als der Einfallswinkel.

Als *Grenzwinkel* bezeichnen wir den Einfallswinkel ε, dessen zugehöriger Brechungswinkel den Wert 90° hat. Für den Grenzwinkel gilt die Bedingung

$$\sin \varepsilon = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Wenn der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel ist, dann findet kein Übertritt in das andere Medium statt, und es kommt zur **Totalreflexion.**

Wenn ein Lichtstrahl durch ein **Prisma** verläuft, verläßt er dieses nach zweimaliger Brechung aus der ursprünglichen Richtung, um den Winkel δ (den sog. **Ablenkwinkel)**

abgelenkt. Dieser Winkel ist dann ein Minimum, wenn der gebrochene Strahl im Innern des Prismas einen Weg beschreibt, der senkrecht zur Winkelhalbierenden des brechenden Winkels orientiert ist. Den Zusammenhang zwischen der minimalen Ablenkung δ und dem brechenden Winkel γ des Prismas und der Brechzahl des Materials, aus dem das Prisma besteht, liefert die Gleichung

$$n = \frac{\sin \frac{\gamma + \delta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Die Brechzahl eines Stoffes ist für Licht unterschiedlicher Farbe, d. h. für Licht unterschiedlicher Wellenlänge, verschieden groß.

Kugelspiegel und **brechende Kugelflächen** sind Bauelemente zur optischen Abbildung, mit denen durch Reflexion bzw. Brechung von Lichtstrahlen, die in einem engen Bündel nahe der optischen Achse verlaufen, jedem Punkt einer Lichtquelle ein bestimmter Bildpunkt, einer Geraden eine Gerade und einer Ebene eine Ebene zugeordnet werden kann. Unter der optischen Achse eines Spiegels oder einer brechenden Kugelfläche verstehen wir eine Gerade, die durch den Krümmungsmittelpunkt des Spiegels oder der brechenden Kugelfläche und den jeweiligen Scheitelpunkt verläuft. Das Bild, das einem auf der optischen Achse im Unendlichen liegenden Punkt zugeordnet ist, heißt **Bildbrennpunkt** F'; ein Punkt auf der optischen Achse, dessen zugeordneter Bildpunkt im Unendlichen liegt, wird **Gegenstandsbrennpunkt** F genannt.

Die Abbildungsgleichung hat für einen Kugelspiegel die Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

(a bzw. b Abstand des Gegenstands bzw. Bildes vom Scheitelpunkt des Spiegels, f Abstand des Brennpunkts vom Scheitelpunkt des Spiegels). Für letzteren Abstand gilt

$$f = \frac{r}{2}.$$

Den Krümmungsradius der Kugelfläche eines Konkavspiegels kennzeichnen wir durch ein positives, den eines Konvexspiegels durch ein negatives Vorzeichen.

Für eine Abbildung mit Hilfe einer brechenden Kugelfläche vom Radius r, durch die ein Medium mit der Brechzahl n_1 von einem anderen mit der Brechzahl n_2 abgegrenzt

wird, gilt die Beziehung

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

und für den Abstand ihres Bildbrennpunktes F' bzw. Gegenstandsbrennpunktes F vom Scheitelpunkt gelten die Gleichungen

$$f' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}, \quad f = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}.$$

Der **Abbildungsmaßstab** eines Kugelspiegels bzw. einer brechenden Kugelfläche, der als Quotient der Bildgröße y' und der Gegenstandsgröße y definiert wird, ergibt sich aus den Beziehungen

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'},$$

wobei x bzw. x' die Abstände des Gegenstandes bzw. des Bildes vom Gegenstands- bzw. Bildbrennpunkt bedeuten. Für sie gilt

$$x = a - f, \quad x' = b - f'.$$

Bei Kugelspiegeln fallen Gegenstands- und Bildbrennpunkt zusammen, also wird

$$f = f'.$$

Für die Festlegung des Vorzeichens von Abstandsangaben halten wir uns an die folgenden Regeln:

a) Den Abstand des Gegenstands vom Scheitelpunkt eines Spiegels oder einer brechenden Kugelfläche berechnen wir positiv im Sinne der auf die Kugelfläche auftreffenden Lichtstrahlen.

b) Den Abstand eines Bildes vom Scheitelpunkt eines Spiegels oder einer brechenden Kugelfläche berechnen wir positiv im Sinne der Lichtausbreitung des von der Kugelfläche ausgehenden reflektierten oder gebrochenen Lichtstrahls.

c) Den Radius der reflektierenden oder brechenden Kugelfläche versehen wir mit einem Vorzeichen so, als ob der Mittelpunkt der Kugelfläche das Bild darstelle.

Als **Linse** bezeichnen wir einen lichtdurchlässigen optischen Körper, der von zwei Kugelflächen oder einer Kugelfläche und einer ebenen Fläche begrenzt wird.

Eine Linse bezeichnen wir dann als **dünne Linse**, wenn ihre Dicke d vernachlässigbar klein gegenüber ihrem Durchmesser ist.

Die Abbildungsgleichung für eine dünne, allseitig von demselben Medium umgebene Linse hat die Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

wobei n die relative Brechzahl des Linsenmaterials in bezug auf ihre Umgebung ist, r_1 und r_2 sind die Radien der Kugelflächen, durch welche die Linse begrenzt wird. Den Abstand des Gegenstandes a bzw. den des Bildes b (Gegenstandsweite, Bildweite) messen wir vom Linsenmittelpunkt aus.
Gegenstands- und Bildbrennweite einer derartigen Linse sind gleich und werden durch die Beziehung

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

ausgedrückt. Die Größe D wird als **Brechkraft** der Linse bezeichnet.
Der Abbildungsmaßstab, die Vergrößerung einer dünnen Linse wird mit Hilfe folgender Beziehungen berechnet:

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} = -\frac{x'}{f} = -\frac{f}{x}.$$

Die Abbildungsgleichung einer Linse nimmt in den Brennpunktkoordinaten die Gestalt

$$xx' = f^2$$

an, wobei

$$x = a - f, \quad x' = b - f$$

ist.

Eine Linse nennen wir dann **dicke Linse**, wenn ihre Dicke d nicht vernachlässigbar klein ist. Die mit einer solchen Linse erzielbare Abbildung ist völlig durch die Lage der **Hauptebenen** und durch die Brennweite bestimmt. Die Abstände der Hauptebene des Gegenstands vom vorderen Scheitelpunkt der Linse V bzw. der der Hauptebene des Bildes vom hinteren Scheitelpunkt der Linse V' sind durch folgende Beziehungen gegeben:

$$h = -\frac{n-1}{n}\frac{d}{r_2}f, \quad h' = -\frac{n-1}{n}\frac{d}{r_1}f.$$

Die Abstände des Gegenstandsbrennpunktes von der Gegenstandshauptebene sowie die des Bildbrennpunktes von der Bildhauptebene sind gleich groß und werden nach

folgender Beziehung berechnet:

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{(n - 1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2}.$$

Ein **zentriertes Linsensystem** setzt sich aus zwei oder mehr Linsen zusammen, die eine gemeinsame optische Achse haben. Die Brechkraft eines aus zwei dünnen Linsen bestehenden zentrierten Systems, dessen beide Linsen in einem Abstand v voneinander angeordnet sind, ist durch die Beziehung

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{v}{f_1 f_2}.$$

gegeben, in der f_1 und f_2 die Brennweiten der beiden das System bildenden Linsen darstellen.

Unter der **Winkelvergrößerung** eines optischen Systems oder Gerätes verstehen wir den Quotienten

$$Z = \frac{u'}{u},$$

wobei u' den Blickwinkel angibt, unter dem der Gegenstand bei Verwendung des Gerätes gesehen wird, während u den Blickwinkel angibt, unter dem das unbewaffnete Auge denselben Gegenstand wahrnimmt, wenn dieser in einer dem Auge optimal angemessenen Entfernung, der sog. *deutlichen Sehweite*, angebracht ist.

1. Die Winkelvergrößerung einer Lupe ist durch die Beziehung

$$Z = \frac{u'}{u} = \frac{l}{f}$$

gegeben, wenn der Gegenstand im Unendlichen abgebildet wird oder durch

$$Z = \frac{l}{f} + 1,$$

wenn das Bild dem Auge in der deutlichen Sehweite l erscheint.

2. Ein **Mikroskop** stellt ein zentriertes optisches System dar, das aus einem Objektiv und einem Okular zusammengesetzt ist. Das Objektiv erzeugt das Bild eines Gegenstands y', gewöhnlich in der Brennebene des Okulars, und das vom Okular entworfene, im Unendlichen gelegene Bild wird dann durch ein nichtangepaßtes Auge wahrgenommen.

Die mit dem Mikroskop erreichbare Vergrößerung ist

$$Z = Z_1 Z_2,$$

wobei $Z_1 = \Delta/f_1$ die Linearvergrößerung des Objektivs und $Z_2 = l/f_2$ die Vergrößerung des Okulars – beide als Einzellinsen betrachtet – darstellt. Δ ist dabei die sog. **optische Tubuslänge** des Mikroskops, welche die Entfernung zwischen der hinteren Brennebene des Objektivs und der vorderen Brennebene des Okulars angibt.
Das **Auflösungsvermögen** eines Mikroskops d beurteilen wir auf Grund des geringsten Abstands zweier Punkte, die bei der Mikroskopbeobachtung gerade noch getrennt wahrgenommen werden können. Wenn im Licht einer Wellenlänge λ beobachtet wird, ergibt sich die Beziehung

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin u},$$

wobei n die Brechzahl desjenigen Stoffes bedeutet, in dem das Objekt eingebettet ist, und u der Winkel zwischen der optischen Achse und einem Grenzstrahl ist, der vom beobachteten Objekt aus in die dem Objekt zugekehrte Objektivlinse eintritt.
Der Ausdruck

$$A = n \sin u$$

wird als die **numerische Apertur** bezeichnet.
3. Ein astronomisches **Fernrohr** (KEPLERsches Fernrohr) ist ein zentriertes System aus Objektiv und Okular, dessen optische Tubuslänge gleich Null ist. Objektiv und Okular sind Sammellinsen. Die Vergrößerung eines derartigen Fernrohres ist

$$Z = \frac{f_1}{f_2}$$

(f_1 Brennweite des Objektivs, f_2 Brennweite des Okulars).

B Beispiele

308. Auf eine ebene Glasplatte mit der Brechzahl $n = 1{,}5$ fällt ein Lichtstrahl. Unter welchem Winkel fällt der Strahl ein, wenn der gebrochene Strahl mit dem auf der Begrenzungsfläche reflektierten einen Winkel $\gamma = 60°$ einschließt?

Lösung

Wenn ein Lichtstrahl unter einem Winkel α auf eine Trennfläche einfällt, wird er unter dem Winkel $\alpha' = \alpha$ reflektiert und unter dem Winkel β gebrochen. Nach dem Brechungsgesetz gilt dabei

$$\sin\alpha = n \sin\beta. \tag{1}$$

Der reflektierte Strahl schließt mit dem gebrochenen den Winkel γ ein, deshalb gilt nach Bild 181

$$\beta = 2R - (\alpha + \gamma).$$

Nach Einsetzen in Gl. (1) gilt offensichtlich

$$\sin \alpha = n \sin [2R - (\alpha + \gamma)] = n \sin (\alpha + \gamma),$$

und weiter

$$\sin \alpha = n (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma). \tag{2}$$

Wenn wir beide Seiten von Gl. (2) durch $\cos \alpha$ dividieren und die Gleichung nach $\tan \alpha$ auflösen, erhalten wir für den gesuchten Einfallswinkel

$$\tan \alpha = \frac{n \sin \gamma}{1 - n \cos \gamma}.$$

Wir setzen in die so gefundene Beziehung die gegebenen Werte ein und erhalten

$$\tan \alpha = \frac{\frac{3}{2} \sin 60^\circ}{1 - \frac{3}{2} \cos 60^\circ} = 3\sqrt{3},$$

also schließlich

$$\underline{\alpha = 79^\circ\, 06'}.$$

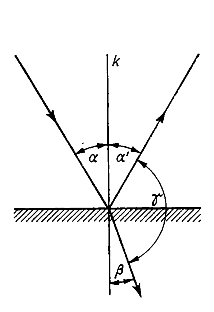


Bild 181

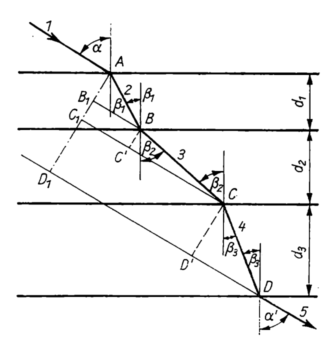


Bild 182

309. Ein Lichtstrahl, der sich zunächst in Luft ausbreitet, durchdringt nacheinander drei unterschiedlich brechende Substanzen, die durch parallele, ebene Begrenzungsflächen voneinander und von der Umgebung getrennt sind, und tritt nach Durchdringen dieser Stoffe erneut in die Luft ein (Bild 182). Es ist nachzuweisen, daß der in die Luft austretende Strahl nach mehrfacher Brechung gegenüber dem einfallenden Strahl nur parallel verschoben ist, und es ist das Maß dieser Parallelverschiebung zu bestimmen.

Die Brechzahlen der einzelnen Medien sind $n_1 = 1{,}5$; $n_2 = 1{,}3$; $n_3 = 1{,}4$; die Dicken der aufeinanderfolgenden planparallelen Schichten sind $d_1 = 2$ cm; $d_2 = 3$ cm; $d_3 = 4$ cm. Der Primärstrahl fällt auf die oberste Fläche unter dem Winkel $\alpha = 60°$ ein.

Lösung

Nach Bild 182 gilt für die erste Brechung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = \frac{n_1}{n_0} \tag{1}$$

(n_0 Brechzahl der Luft).
Auf das zweite Medium fällt der Strahl unter dem Winkel β_1 ein, hier wird er unter dem Winkel β_2 gebrochen. Das Brechungsgesetz lautet hierbei

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{n_2}{n_1}\,. \tag{2}$$

Analog gilt für die Brechung im dritten Medium

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_3} = \frac{n_3}{n_2}\,. \tag{3}$$

Wenn wir voraussetzen, daß der Strahl unter einem Winkel α' in die Luft austritt, dann gilt das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\beta_3}{\sin\alpha'} = \frac{n_0}{n_3}\,. \tag{4}$$

Wir multiplizieren die Gln. (1) bis (4) miteinander und erhalten nach Umformung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = 1,$$

was bedeutet, daß $\alpha = \alpha'$ ist.
Der Lichtstrahl tritt nach mehrmaliger Brechung nur parallelverschoben aus. Aus den Gln. (1) bis (3) ermitteln wir durch Einsetzen der für die Brechzahlen angegebenen Werte ohne weitere Mühe die zugehörigen Winkel

$$\beta_1 = 35°\,16'; \quad \beta_2 = 41°\,46'; \quad \beta_3 = 38°\,13'. \tag{5}$$

Die Gesamtverschiebung des austretenden Strahls (Nr. 5) gegenüber dem einfallenden (Nr. 1) beträgt nach Bild 182:

$$x = \overline{AD_1} = \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1}\,. \tag{6}$$

Jedoch ist

$$\overline{AB_1} = \overline{AB}\sin(\alpha - \beta_1) \quad \text{mit} \quad \overline{AB} = \frac{d_1}{\cos\beta_1}\,,$$

$$\overline{B_1C_1} = \overline{BC'} = \overline{BC}\sin(\alpha - \beta_2) \quad \text{mit} \quad \overline{BC} = \frac{d_2}{\cos\beta_2}$$

und

$$\overline{C_1D_1} = \overline{CD'} = \overline{CD} \sin(\alpha - \beta_3) \quad \text{mit} \quad \overline{CD} = \frac{d_3}{\cos\beta_3}.$$

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in Gl. (6) erhalten wir

$$x = \frac{d_1 \sin(\alpha - \beta_1)}{\cos\beta_1} + \frac{d_2 \sin(\alpha - \beta_2)}{\cos\beta_2} + \frac{d_3 \sin(\alpha - \beta_3)}{\cos\beta_3}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich für die Verschiebung

$$x = \frac{2\sin(60^\circ - 35^\circ\,16')}{\cos 35^\circ\,16'} + \frac{3\sin(60^\circ - 41^\circ\,46')}{\cos 41^\circ\,46'} + \frac{4\sin(60^\circ - 38^\circ\,13')}{\cos 38^\circ\,13'};$$

$$\underline{x = 4{,}8 \text{ cm}}.$$

310. Ein Lichtstrahl fällt unter einem Winkel α so auf die Frontfläche eines optischen Prismas ein, daß der nach der Brechung durch das Prisma verlaufende Strahl die Rückfläche gerade unter dem Grenzwinkel trifft und deshalb nicht mehr austreten kann. Berechnen Sie die Brechzahl des Glases, aus dem das Prisma hergestellt wurde, wenn der brechende Winkel mit φ angegeben ist.

Lösung

Nach den in Bild 183 gewählten Bezeichnungen gilt

$$\beta_1 + \beta_2 = \varphi. \tag{1}$$

Für die Brechung auf der Frontfläche gilt nach dem Brechungsgesetz

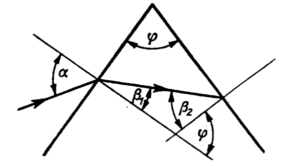


Bild 183

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = n. \tag{2}$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung, daß der Winkel β_2 auch der Grenzwinkel ist, können wir für die auf der Rückfläche eintretende Brechung schreiben

$$\sin\beta_2 = \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Gemäß Gl. (1) ist

$$\cos\varphi = \cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \sin\beta_1 \sin\beta_2.$$

Wenn wir in diese Beziehung die aus den Gln. (2) u. (3) gewonnenen Werte für $\sin\beta_1$ und $\sin\beta_2$ einsetzen, können wir aus den trigonometrischen Beziehungen die entsprechenden Größen für $\cos\beta_1$ und $\cos\beta_2$ finden:

$$\cos\beta_1 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}, \quad \cos\beta_2 = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}.$$

Daraus erhalten wir

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}\,\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} - \frac{\sin\alpha}{n^2}\,.$$

Nach einer Umformung finden wir die Gleichung

$$n^4(\cos^2\varphi - 1) + n^2(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi) = 0,$$

als deren Lösung wir schließlich die gesuchte Beziehung für die Brechzahl erhalten:

$$n = \frac{\sqrt{1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi}}{\sin\varphi}\,.$$

311. Zwei unterschiedliche optische Medien mit den Brechzahlen n_1 und n_2 sind durch eine ebene Begrenzungsfläche getrennt. Ermitteln Sie den Weg eines Lichtstrahls, der von einem gegebenen Punkt A im ersten Medium zu einem ebenfalls gegebenen Punkt B im zweiten in kürzestmöglicher Zeit gelangt.

Lösung

Wir setzen nach Bild 184 voraus, daß der Lichtstrahl auf dem Wege ACB verlaufen wird, wobei C einen auf der Trennfläche beider Medien liegenden Punkt darstellt. Wenn wir diesen Punkt als Ausgangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählen, dessen x-Achse in der Trennebene liegt, dann hat der Punkt A die Koordinaten (x, a) und der Punkt B die Koordinaten $(d - x, b)$, wenn wir den konstanten Abstand der beiden Fußpunkte von A und B, d. h. die Strecke A_1B_1, mit d bezeichnen.
Wenn die Lichtgeschwindigkeiten in den einzelnen Medien v_1 bzw. v_2 sind, dann ist die zum Durchlaufen des Weges AC erforderliche Zeit gegeben durch die Beziehung

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1}$$

und die für das Durchlaufen des Weges CB durch

$$t_2 = \frac{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}}{v_2}\,.$$

Die Gesamtzeit

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}}{v_2}$$

soll ein Minimum sein. Das ist dann der Fall, wenn

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

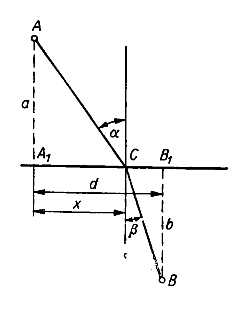


Bild 184

ist. Wir bilden diese Ableitung und finden

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d - x}{v_2\sqrt{(d - x)^2 + b^2}} = 0. \tag{1}$$

Nach Bild 184 ist

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin\alpha \quad \text{und} \quad \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}} = \sin\beta, \tag{2}$$

wobei α bzw. β die Winkel darstellen, unter denen der Lichtstrahl auf die Trennfläche einfällt bzw. an ihr gebrochen wird. Nach Einsetzen von Gl. (2) in Gl. (1) erhalten wir

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2} = 0,$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \text{mit} \quad \frac{v_1}{v_2} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\underline{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}}.$$

Das aber ist das bereits bekannte Brechungsgesetz. Beim Durchtritt aus einem Medium in ein anderes legt das Licht in kürzester Zeit eine Strecke zurück, die den Bedingungen des Brechungsgesetzes entspricht.

312. Ein durch Luft gehender Lichtstrahl fällt auf einen kugelförmigen Wassertropfen, wird in diesem gebrochen und tritt nach der Reflexion an der inneren Rückseite wieder aus. Berechnen Sie, unter welchem Winkel der Strahl einfallen muß, damit die Gesamtablenkung des roten Lichts, d. h. der Winkel zwischen einfallendem und austretendem Strahl, ein Maximum ist. Wie groß ist diese Ablenkung? Für rotes Licht hat der Wassertropfen eine Brechzahl $n_{rot} = 1{,}331$.

Lösung

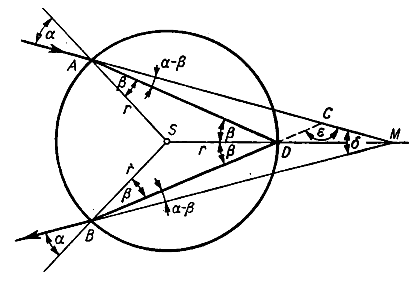


Bild 185

Aus Bild 185 ist leicht zu ersehen, daß der Winkel α, unter dem der Strahl aus dem Tropfen heraus und in die Luft übertritt, genausogroß ist wie der Winkel, unter dem der Lichtstrahl, aus der Luft kommend, in den Tropfen eindringt. Wenn wir die Gesamtablenkung zwischen eintretendem und austretendem Strahl mit dem Symbol δ bezeichnen, ergibt sich für diesen Wert aus $\triangle\, BCM$ die Beziehung

$$\delta = 2\text{R} - (\alpha - \beta + \varepsilon). \tag{1}$$

Andererseits haben wir für den Winkel ε aus $\triangle ADC$ die Beziehung

$$2R - \varepsilon + \alpha - \beta + 2R - 2\beta = 2R.$$

Das nach ε aufgelöst und in Gl. (1) eingesetzt, ergibt

$$\delta = 4\beta - 2\alpha. \tag{2}$$

Wenn dieser Winkel ein Maximum sein soll, muß die Bedingung

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$$

erfüllt sein. Das führt uns zu einer Gleichung

$$4\frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0. \tag{3}$$

Entsprechend dem Brechungsgesetz ist $\sin\alpha = n\sin\beta$. Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung nach α ableiten, erhalten wir mit Hilfe einer Umformung

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta}$$

und nach Einsetzen in Gl. (3)

$$2\cos\alpha = n\cos\beta.$$

Als Lösung der beiden Gleichungen

$$2\cos\alpha = n\cos\beta \quad \text{und} \quad \sin\alpha = n\sin\beta$$

ermitteln wir den Winkel α, indem wir diese beiden Gleichungen quadrieren und addieren:

$$4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = n^2.$$

Nach Umformung ergibt das

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Durch Einsetzen der Brechzahl für rotes Licht $n_{rot} = 1{,}331$ erhalten wir damit für den gesuchten Einfallswinkel

$$\underline{\alpha = 59°\,32'\,17''.}$$

Der rote Lichtstrahl wird unter dem Winkel β_{rot} gebrochen. Dieser gehorcht der Gleichung

$$\sin\beta_{rot} = \frac{\sin\alpha}{n_{rot}},$$

woraus wir erhalten

$$\beta_{rot} = 40°\,21'\,40''.$$

Für die Ablenkung des roten Strahles ergibt sich gemäß der Gl. (2) der Wert

$$\delta = 4\beta_{\text{rot}} - 2\alpha = \underline{42^\circ\, 22'\, 06''}.$$

313. Ein Beobachter steht am Rand eines Wasserbassins, dessen Wasserstand die Höhe $h = 2{,}81$ m hat, und betrachtet einen auf dem Grund des Bassins liegenden Gegenstand (Bild 186). In welcher Tiefe h' erscheint das Bild des beobachteten Gegenstandes, wenn die Richtung, in welcher der Beobachter das Bild sieht, mit der zum Wasserspiegel Senkrechten einen Winkel $\alpha = 60^\circ$ einschließt?

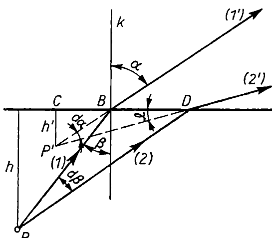


Bild 186

Lösung

Wir wählen aus dem Strahlenbündel, das vom Gegenstand P ausgeht und nach Brechung an der Trennfläche Wasser–Luft ins Auge des Beobachters trifft, zwei Strahlen (1) und (2) aus, die den sehr kleinen Winkel $d\beta$ einschließen. Die gebrochenen Strahlen (1') und (2'), die, vom Scheinbild P' ausgehend, zum Auge kommen, schließen den Winkel $d\alpha$ ein.

Nach den in Bild 186 angegebenen Bezeichnungen gilt

$$\overline{BP'} = \frac{h'}{\cos\alpha} \quad (1) \quad \text{und} \quad \overline{BP} = \frac{h}{\cos\beta} \quad (2)$$

und in $\triangle BDP'$ nach dem Sinussatz

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP'}} = \frac{\sin d\alpha}{\sin\gamma}. \tag{3}$$

Da $\sin d\alpha \approx d\alpha$, $\gamma = R - (\alpha + d\alpha)$ und $\sin\gamma = \sin[R - (\alpha + d\alpha)] = \cos(\alpha + d\alpha) \approx$ $\approx \cos\alpha$ ist, können wir Gl. (3) auch in der Form

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP'}} \approx \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \tag{4}$$

schreiben. Auf analoge Weise erhalten wir aus $\triangle BDP$ die Gleichung

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP}} \approx \frac{d\beta}{\cos\beta}. \tag{5}$$

Wenn wir die beiden Gln. (4) u. (5) dividieren und das Resultat mit dem Ausdruck $\overline{BP}/\overline{BP'}$ vergleichen, der sich aus den Gln. (1) u. (2) ergibt, dann erhalten wir

$$\frac{h'\,d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{h\,d\beta}{\cos^2\beta}. \tag{6}$$

Den Quotienten $d\alpha/d\beta$ ermitteln wir aus dem Brechungsgesetz. Durch Ableiten der Gleichung $\sin\alpha = n \sin\beta$ nach dem Winkel α erhalten wir

$$\cos\alpha = n \cos\beta \frac{d\beta}{d\alpha},$$

woraus folgt

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = n \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (6) finden wir für die scheinbare Tiefe

$$h' = \frac{h}{n} \frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\beta}. \qquad (7)$$

Den unbekannten Winkel β bestimmen wir aus dem Brechungsgesetz

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$

womit wir nach Umformung erhalten

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}.$$

Für die scheinbare Tiefe folgt damit aus Gl. (7)

$$h' = hn^2 \left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)^3.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich schließlich

$$h' = 2{,}81\ \text{m} \cdot 1{,}33^2 \left(\frac{\cos 60°}{\sqrt{1{,}33^2 - \sin^2 60°}}\right)^3 = \underline{0{,}6\ \text{m}}.$$

314. Aus einer punktförmigen Lichtquelle fällt ein Lichtstrahl senkrecht auf einen Planspiegel, von dem aus er auf einen 5 m entfernt stehenden Leuchtschirm reflektiert wird. Der Planspiegel rotiert um eine zur Leuchtschirmebene parallele Achse, so daß der reflektierte Lichtpunkt auf dem Leuchtschirm eine Spur zieht. In jeder Sekunde werden 10 Umdrehungen ausgeführt. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich die Lichtspur auf dem Leuchtschirm bewegt und welchen Wert die Geschwindigkeit in dem Punkt des Leuchtschirms annimmt, der dem Planspiegel am nächsten liegt.

Lösung

Wenn der Spiegel mit der konstanten Frequenz ν rotiert, ist auch seine Winkelgeschwindigkeit konstant gleich

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Wir messen den Einfallswinkel des Lichtstrahls gegenüber dem Einfallslot auf der Spiegelfläche. In der Ausgangsstellung ist $\alpha = 0$. Nach der Drehung des Spiegels um den Winkel $\alpha = \omega t$ (Bild 187) weicht der unter einem Winkel α einfallende Strahl um den doppelten Wert $2\alpha = 2\omega t$ ab, und die Leuchtspur auf dem Bildschirm verschiebt sich um den Betrag x, für den gilt

$$x = d \tan 2\omega t.$$

Die Momentangeschwindigkeit des die Lichtspur zeichnenden Lichtpunktes ist

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\omega d}{\cos^2 2\omega t}.$$

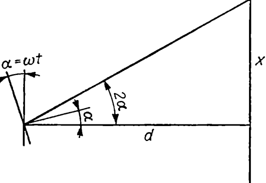


Bild 187

Immer wenn die Lichtspur durch den Punkt des Leuchtschirms geht, der dem Spiegel am nächsten gelegen ist, fällt der Lichtstrahl unter einem Winkel $\alpha = 2\pi k$ ein, wobei $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ist. Die Geschwindigkeit des Lichtpunktes in dieser Stellung ist

$$v = 200\,\pi\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \underline{628\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

315. Vor einem Konkavspiegel befindet sich in 60 cm Abstand eine Kerze. Wenn wir sie um 10 cm näher an den Spiegel heranrücken, so vergrößert sich der Abstand ihres Bildes vom Spiegel um 80 cm. Welche Brennweite hat der Spiegel?

Lösung

Wenn wir die Abbildungsgleichung des Spiegels in der Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

anwenden, dann ist in der erstgenannten Stellung die Gleichung

$$\frac{1}{60\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

erfüllt, während in der darauffolgenden Stellung gilt

$$\frac{1}{50\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b + 80\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen der Gln. (1) u. (2) erhalten wir

$$\frac{1}{60\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{50\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b + 80\,\mathrm{cm}},$$

woraus wir nach Umformung die quadratische Gleichung

$$b^2 + 80b - 24000 = 0$$

erhalten, die auf die Lösungen $b_1 = 120$ cm und $b_2 = -200$ cm führt. Durch Einsetzen dieser Werte in eine der Gln. (1) oder (2) erhalten wir für die Brennweiten die 2 Lösungen

$$\underline{f_1 = 40 \text{ cm}}, \quad \underline{f_2 = 85{,}7 \text{ cm}}.$$

316. Ein Konvex- und ein Konkavspiegel mit gleichem Krümmungsradius r_0 sind mit ihren Spiegelflächen einander so gegenübergestellt, daß ihre optischen Achsen zusammenfallen und ihre Scheitel den Abstand $d = 2r_0$ haben (Bild 188). Es soll ein auf der gemeinsamen optischen Achse gelegener Punkt gesucht werden, für den gilt, daß die von einer hier aufgestellten Lichtquelle ausgehenden Strahlen nach Reflexion auf Konvex- und Konkavspiegel wieder im Ausgangspunkt zusammentreffen.

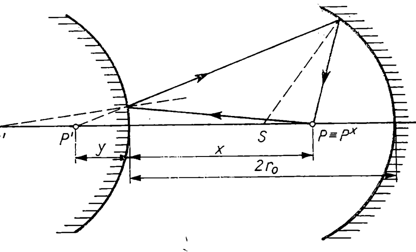


Bild 188

Lösung

Den auf der Achse liegenden Lichtpunkt bilden wir zunächst durch den Konvexspiegel, das so entstandene Bild durch den Konkavspiegel ab. Danach formulieren wir die Bedingung, daß das resultierende Bild im Ausgangspunkt entworfen wird.
Wenn wir den Lichtpunkt P in einem Abstand $a = x$ vor dem Konvexspiegel aufstellen, so entwirft dieser ein virtuelles Bild P' im Abstand $b = -y \, (y > 0)$ hinter dem Scheitelpunkt des Spiegels. Für diese Abbildung gilt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{2}{r_0}. \tag{1}$$

Der Abstand des vom Konvexspiegel entworfenen Bildes P' vom Scheitelpunkt des Konkavspiegels hat die Größe $a_2 = 2r_0 + y$. Wenn das resultierende Bild P^* wieder im Ausgangspunkt P erscheinen soll, muß seine vom Scheitelpunkt des Konkavspiegels aus gemessene Bildweite

$$b_2 = 2r_0 - x$$

sein. Nach der Abbildungsgleichung für Spiegel gilt weiter

$$\frac{1}{2r_0 + y} + \frac{1}{2r_0 - x} = \frac{2}{r_0}. \tag{2}$$

Die Kombination der Gln. (1) u. (2) führt zu einer quadratischen Gleichung

$$2x^2 - 2r_0x - r^2 = 0,$$

deren Wurzeln $x_1 = 1{,}35\, r_0$ und $x_2 = -0{,}35\, r_0$ sind. Physikalisch sinnvoll ist nur die erste der beiden Lösungen. Demzufolge muß die Lichtquelle vom Konvexspiegel in der Entfernung

$$\underline{s = 1{,}35\, r_0}$$

angeordnet sein.

317. Eine dünne, plankonkave Linse ist in horizontaler Stellung so in Wasser getaucht, daß der unter der Konkavfläche liegende Raum mit Luft gefüllt ist. Die Gesamtbrechkraft des optischen Systems hat den Wert $D = -2{,}6$ dptr. Bestimmen Sie den Krümmungsradius der Linse (Bild 189).

Lösung

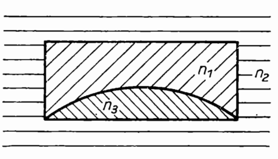


Bild 189

Es handelt sich hier um ein zentriertes optisches System, das sich aus zwei dicht aneinanderliegenden Linsen zusammensetzt. Die Brechkraft eines solchen Systems ist gleich der Summe der Brechkräfte der beiden das System bildenden Einzellinsen.
Die erste Linse aus Glas ist plankonkav und befindet sich in Wasser. Ihre Brechkraft ist

$$D_1 = \frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{1}$$

wobei n die relative Brechzahl des Glases gegenüber dem umgebenden Wasser bedeutet. Wenn n_1 bzw. n_2 die absoluten Brechzahlen des Glases bzw. des Wassers selbst sind, so ist

$$n = \frac{n_1}{n_2}\,.$$

Da es sich im vorliegenden Fall um eine plankonkave Linse handelt, ist $r_1 = -r_0$, und $r_2 = \infty$. Aus Gl. (1) wird damit

$$D_1 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(-\frac{1}{r_0}\right).$$

Die zweite Linse kann als eine aus Luft bestehende Plankonvexlinse angesehen werden, die sich in einer Wasserumgebung befindet. Ihre Krümmungsradien sind $r_1 = r_0$ und $r_2 = \infty$. Ihre Brechkraft wird

$$D_2 = \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\frac{1}{r_0}\,,$$

wobei n_3 die absolute Brechzahl der Luft bedeutet. Die Brechkraft des gesamten aus zwei Linsen bestehenden Systems wird

$$D = D_1 + D_2 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(-\frac{1}{r_0}\right) + \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\frac{1}{r_0}\,.$$

Nach einer Umformung erhalten wir

$$D = \frac{n_3 - n_1}{n_2}\,\frac{1}{r_0}\,,$$

woraus sich der gesuchte Krümmungsradius der Linse berechnen läßt:

$$r_0 = \frac{n_3 - n_1}{n_2}\,\frac{1}{D}\,.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$r_0 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} \frac{1}{-2{,}6} = \underline{14{,}42 \text{ cm}.}$$

318. Beweisen Sie, daß bei einer Sammellinse der Brennweite f der kleinste Abstand zwischen Gegenstand und Bild den Wert $s = 4f$ haben muß.

Lösung

Gemäß der Bedingung, daß der Abstand Gegenstand – Bild, d. h. $s = g + b$, ein Minimum darstellt, ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(g + b) = 0, \tag{1}$$

wobei g der Abstand des Gegenstands und b der des Bildes von der Linse ist. Aus der Abbildungsgleichung der Linse

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

ergibt sich für b die Beziehung

$$b = \frac{gf}{g - f}.$$

Für den Abstand Bild – Gegenstand s erhalten wir demnach

$$s = g + b = g + \frac{gf}{g - f} = \frac{g^2}{g - f}. \tag{2}$$

Somit kann die Minimumbedingung (1) geschrieben werden in der Form

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{g^2}{g - f}\right)}{\mathrm{d}g} = \frac{2g(g - f) - g^2}{(g - f)^2} = 0.$$

Daraus folgt nach Umformung unter der Voraussetzung, daß $g \neq f$ ist, die Gleichung

$$g^2 - 2gf = 0,$$

mit der Lösung $g = 2f$.
Wenn wir die zweite Ableitung bilden, können wir uns leicht davon überzeugen, daß der gefundene Wert $g = 2f$ tatsächlich der geforderten Minimumbedingung gerecht wird. Aus Gl. (2) resultiert für die kleinste Entfernung zwischen Bild und Gegenstand

$$\underline{s = g + b = 4f.}$$

319. Eine Lichtquelle befindet sich im Abstand l von einem Bildschirm. Es ist zu berechnen, in welchem Abstand von der Lichtquelle eine dünne Sammellinse der Brennweite f angeordnet sein muß, damit auf dem Bildschirm ein reelles Bild der Lichtquelle entsteht. Die Bedingung, unter der das möglich ist, soll in Worten ausgedrückt werden.

Lösung

Da der Abstand des Bildschirms von der Lichtquelle mit l vorgegeben ist, entspricht dem Abstand g des Gegenstands von der Linse das Bild im Abstand $b = l - g$. Nach Einsetzen in die Abbildungsgleichung für die Linse erhalten wir

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{l - g} = \frac{1}{f}.$$

Wir lösen diese Gleichung nach g auf und erhalten

$$g = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}.$$

Wenn die Differenz $l^2 - 4lf > 0$ ist, was sicher erfüllt ist, solange $l > 4f$ ist, so gibt es zwei verschiedene Stellungen für die Linse, bei denen für konstant gehaltenen Abstand Gegenstand – Bildschirm auf letzterem ein scharfes Bild entsteht. Dies sind die Stellungen

$$\underline{g_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - f}}, \quad \underline{g_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - f}}.$$

Im Falle, daß $l = 4f$ ist, gibt es nur eine derartige Stellung, nämlich

$$\underline{g = \frac{l}{2}},$$

und für den Fall, daß $l < 4f$ ist, existiert gar keine.

320. Ein auf der optischen Achse einer Sammellinse beweglicher Punkt nähert sich der Linse mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich dabei sein Bild?

Lösung

Wenn wir den Abstand des Gegenstands vom Gegenstandsbrennpunkt mit x und den Abstand des Bildes vom Bildbrennpunkt mit x' bezeichnen, dann können wir die Abbildungsgleichung in folgender Form schreiben:

$$xx' = f^2. \tag{1}$$

Die Momentangeschwindigkeit des Bildes v_2 ist durch die erste Ableitung seines Weges nach der Zeit definiert, also

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\,.$$

Entsprechend Gl. (1) ist $x' = f^2/x$, und deshalb wird

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{f^2}{x}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{f^2}{x}\right)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{f^2}{x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,.$$

Unter der Berücksichtigung, daß $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v_1$ die Momentangeschwindigkeit des Gegenstands ist, erhalten wir nach einer Umformung die Bildgeschwindigkeit

$$\underline{v_2 = -\frac{x'}{x}\,v_1\,.}$$

321. Im Innern einer Glaskugel des Radius $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ befindet sich im Glasfluß eine Luftblase. Ein Beobachter, der die Luftblase in der Richtung der optischen Achse der brechenden Kugelfläche erblickt, hat den Eindruck, daß die Luftblase in einem Abstand $b_0 = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ unter der Kugeloberfläche sitzt. Bestimmen Sie den tatsächlichen Abstand der Luftblase von der Kugeloberfläche.

Lösung

Für die Brechung an einer Kugelfläche, die zwei Stoffe mit den absoluten Brechzahlen n_1 und n_2 trennt, gilt die Beziehung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}\,. \qquad (1)$$

Der Gegenstand, ein Lufteinschluß, befindet sich im Innern des Glases. Wir suchen seinen Abstand g vom Scheitelpunkt der Kugeloberfläche. An der konvexen Kugeloberfläche kommt es zur Brechung, bei welcher der Lichtstrahl aus dem Glas mit der Brechzahl $n_1 = n$ in die Luft mit der Brechzahl $n_2 = 1$ übertritt. Das dabei entstehende Bild ist virtuell.
Unter Beachtung der Vorzeichen können wir schreiben

$$b = -b_0, \quad r = -r_0\,.$$

Dies – in Gl. (1) eingesetzt – führt auf

$$\frac{n}{g} - \frac{1}{b_0} = -\frac{1-n}{r_0}\,,$$

und – nach g aufgelöst –

$$g = \frac{n r_0 b_0}{r_0 + b_0(n-1)}\,.$$

Mit den gegebenen Werten erhalten wir für die gesuchte Gegenstandsweite des Lufteinschlusses

$$g = \frac{1{,}5 \cdot 10 \cdot 2{,}5}{10 + 2{,}5 \cdot 0{,}5}\,\mathrm{cm} = \underline{3{,}3\,\mathrm{cm}}.$$

322. Ein Glasstab mit der Brechzahl $n = {}^3/_2$ ist an seinen beiden Enden durch Kugelschliffe mit dem gleichen Radius r_0 begrenzt. Der Stab hat die Länge $3r_0$, die Kugelflächen haben eine gemeinsame optische Achse, die mit der Längsachse des Stabes identisch ist. In einem Abstand von r_0 vor der vorderen konkaven Kugelfläche befindet sich eine punktförmige Lichtquelle auf der optischen Achse. Es ist zu berechnen, in welchem Abstand von der hinteren konvexen Kugelfläche das Bild entsteht.

Lösung

Das resultierende Bild der Punktquelle erhalten wir durch eine schrittweise Abbildung des Gegenstands durch die erste und dann durch die zweite Kugelfläche. Das durch die erste Abbildung entstandene Bild betrachten wir als den für die zweite Abbildung vorzusehenden Gegenstand. Die zweite Abbildung erzeugt dann das endgültige Bild. Für die Brechung an einer Kugelfläche mit dem Radius r, die zwei Stoffe mit den absoluten Brechzahlen n_1 und n_2 trennt, gilt die Beziehung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}\,. \tag{1}$$

Bei der Brechung an der ersten Kugelfläche tritt der aus der Luft kommende Strahl ins Glas ein, die Kugelfläche ist hier konkav. Daher ist $n_1 = 1$, $n_2 = n$, $r = r_0$; und da auch $g = r_0$ ist, finden wir nach Einsetzen in Gl. (1)

$$\frac{1}{r_0} + \frac{n}{b} = \frac{n - 1}{r_0}\,,$$

woraus sich ergibt

$$b = r_0 \frac{n}{n - 2}\,.$$

Das durch die erste Kugelfläche entworfene Bild hat vom Scheitelpunkt der zweiten den Abstand

$$g' = 3r_0 - b = 2r_0 \frac{n - 3}{n - 2}\,.$$

Bei der Brechung an der zweiten, hinteren Kugelfläche tritt der Strahl aus dem Glas in die Luft aus. Hier ist $n_1 = n$, $n_2 = 1$, $r = -r_0$. Nach Einsetzen dieser Größen in Gl. (1) finden wir

$$\frac{n}{2r_0 \dfrac{n - 3}{n - 2}} + \frac{1}{b'} = -\frac{1 - n}{r_0}\,,$$

wobei wir den Abstand des durch die zweite Kugelfläche entworfenen Bildes vom Scheitelpunkt der zweiten Kugelfläche mit b' bezeichnen. Daraus ergibt sich

$$b' = 2r_0 \frac{n-3}{n^2 - 6n + 6}.$$

Wir setzen für n den Wert $^3/_2$ ein und erhalten

$$\underline{b' = 4r_0.}$$

323. Ermitteln Sie die Dicke einer bikonvexen Glaslinse, die in Luft als Zerstreuungslinse wirken soll. Die Radien der die Linse begrenzenden Kugelflächen sind $r_1 = r_2 = 1$ cm.

Lösung

Für die Brechkraft einer dicken Linse, die auf beiden Seiten vom gleichen Medium umgeben ist, gilt die Beziehung

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2}.$$

Als Zerstreuungslinse wird eine Linse dann wirken, wenn dieser Ausdruck negativ wird. Da hier $n > 1$, $r_1 > 0$ und auch $r_2 > 0$ ist, kann diese Bedingung nur erfüllt sein, wenn

$$\frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2} > (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

ist. Diese Ungleichung läßt sich vereinfachen in

$$\frac{n-1}{n} d > r_1 + r_2.$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Dicke die Bedingung

$$d > \frac{n}{n-1}(r_1 + r_2).$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$d > \frac{1,5}{1,5-1}(1+1)\,\text{cm} = 6\,\text{cm};$$

$$\underline{d > 6\,\text{cm}.}$$

324. Ein zentriertes optisches System besteht aus zwei dünnen Linsen mit den Brechkräften $D_1 = 2$ und $D_2 = 5$ dptr, die voneinander einen Abstand $d = 10$ cm haben. Es ist zu berechnen, in welchem Abstand vom Mittelpunkt der ersten Linse der Bildbrennpunkt des gesamten Systems liegt.

Lösung

Ein auf der optischen Achse des Systems liegender Punkt, der von der ersten Linse den Abstand g_1 hat, wird vom Linsensystem in einem ebenfalls auf der optischen Achse liegenden Punkt abgebildet. Dieser hat von der zweiten Linse den Abstand b_2. Bei schrittweiser Abbildung in der Art, daß der Gegenstand zunächst durch die erste Linse dargestellt wird und das so entstandene Zwischenbild als Gegenstand für die zweite Linse dient, entwirft diese dann das resultierende Bild. Die Brechung an der ersten Linse läßt sich dann wie folgt beschreiben:

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Hieraus erhalten wir eine Beziehung für den Abstand des durch die erste Linse entworfenen Zwischenbildes von ihrem Scheitelpunkt

$$b_1 = \frac{g_1 f_1}{g_1 - f_1}. \tag{1}$$

Für die an der zweiten Linse stattfindende Brechung gilt

$$\frac{1}{g_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}, \tag{2}$$

wobei g_2 den Abstand des durch die erste Linse entworfenen Zwischenbildes von der zweiten Linse darstellt. Nach Gl. (1) gilt offenbar

$$g_2 = d - b_1 = d - \frac{g_1 f_1}{g_1 - f_1}$$

und nach einer Umformung

$$g_2 = \frac{d - f_1 - \dfrac{d f_1}{g_1}}{1 - \dfrac{f_1}{g_1}}.$$

Entsprechend Gl. (2) gilt für die Bildweite b_2

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1 - \dfrac{f_1}{g_1}}{d - f_1 - \dfrac{d f_1}{g_1}}. \tag{3}$$

Im Bildbrennpunkt des Systems wird der auf der optischen Achse im Unendlichen liegende Punkt abgebildet. Wenn wir seinen Abstand von der zweiten Linse mit dem Symbol f_0 kennzeichnen, resultiert für $g_1 = \infty$ die Bildweite $b_2 = f_0$. Nach Einsetzen in Gl. (3) und nach einer Umformung erhalten wir dafür

$$f_0 = \frac{f_2(f_1 - d)}{f_1 + f_2 - d}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$f_0 = \frac{0{,}2\,\text{m}\,(0{,}5\,\text{m} - 0{,}1\,\text{m})}{0{,}5\,\text{m} + 0{,}2\,\text{m} - 0{,}1\,\text{m}} = 0{,}133\,\text{m}.$$

Der Abstand des Bildbrennpunkts vom Mittelpunkt der ersten Linse ist

$$s = d + f_0 = \underline{0{,}233\,\text{m}}.$$

325. Eine Lupe mit der Brennweite $f = 5$ cm entwirft von einem Gegenstand ein Bild in der Bildweite $|b| = 40$ cm. Welche Vergrößerung liefert die Lupe, wenn das beobachtende Auge sich im Abstand $|c| = 2$ cm befindet?

Lösung

Das von der Lupe entworfene Bild ist aufrecht, virtuell und vergrößert (Bild 190). Der abzubildende Gegenstand befindet sich innerhalb der Brennweite der Lupe. Die gesuchte Winkelvergrößerung der Lupe hat den Wert

$$Z = \frac{u'}{u},$$

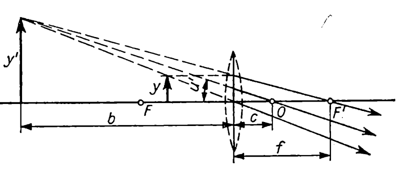


Bild 190

wobei u' den Winkel darstellt, unter dem sich das von der Lupe entworfene Bild dem Auge O bietet, während u den Winkel darstellt, unter dem das unbewaffnete Auge den Gegenstand innerhalb der deutlichen Sehweite l sehen würde. Entsprechend der Abbildung können wir schreiben

$$u' \approx \tan u' = \frac{y'}{|b| + |c|}, \quad u \approx \tan u = \frac{y}{l}.$$

Für die Vergrößerung gilt dann

$$Z = \frac{u'}{u} = \frac{y'}{y} \frac{l}{|b| + |c|}. \tag{1}$$

Die Linearvergrößerung y'/y der Linse bestimmen wir aus der Gleichung

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f} = -\frac{b - f}{f} = -\frac{-40\,\text{cm} - 5\,\text{cm}}{5\,\text{cm}},$$

und nach Einsetzen dieser Werte in Gl. (1) erhalten wir für die Vergrößerung der Lupe

$$Z = 9\,\frac{25\,\text{cm}}{40\,\text{cm} + 2\,\text{cm}} = \underline{5{,}36}.$$

326. Die Brennweite eines Mikroskopobjektivs beträgt $f_1 = 0{,}3$ cm, die des Okulars $f_2 = 3$ cm, die optische Tubuslänge $s = 16$ cm. Es ist zu ermitteln, in welchem Abstand vor dem Objektiv sich ein Gegenstand befinden muß, damit das durch das Mikroskop beobachtende Auge das Bild des Gegenstands in der deutlichen Sehweite $l_0 = 25$ cm erblicken kann.

Lösung

Das Objektiv entwirft von dem Gegenstand, der sich vor ihm im Abstand d befindet, ein Zwischenbild im Abstand b_1 hinter dem Objektiv. Entsprechend der Abbildungsgleichung gilt danach

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}. \tag{1}$$

Das vom Objektiv entworfene Zwischenbild befindet sich im Abstand

$$g_2 = s - b_1 \tag{2}$$

vom Okular und wird von diesem so dargestellt, daß es von einem dicht dahinter befindlichen Auge als in der deutlichen Sehweite l_0 stehend wahrgenommen wird. Dieses Bild selbst ist virtuell und befindet sich vom Okular in der Entfernung

$$b_2 = -l_0. \tag{3}$$

Aus der für das Okular geltenden Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

erhalten wir nach Einsetzen der Gln. (2) u. (3)

$$b_1 = s - \frac{l_0 f_2}{l_0 + f_2}$$

und nach Einsetzen der gegebenen Werte

$$b_1 = 13{,}32\ \text{cm}.$$

Mit Hilfe der Gl. (1) erhalten wir eine Beziehung für die gesuchte Entfernung Gegenstand – Objektiv

$$d = \frac{b_1 f_1}{b_1 - f_1}$$

bzw. mit den gegebenen Werten

$$\underline{d = 0{,}307\ \text{cm}.}$$

A Aufgaben

403. Berechnen Sie den Winkel, um den ein Lichtstrahl aus seiner ursprünglichen Richtung abweicht, wenn er, aus dem Wasser kommend, a) in Glas und b) in die Luft übertritt und sein Einfallswinkel einmal 15° und einmal 75° beträgt.

404. Unter welchem Winkel müßte ein Lichtstrahl auf eine Glasplatte mit der Brechzahl $n = 1{,}57$ einfallen, damit reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinanderstehen?

405. Unter welchem Winkel müßte ein Lichtstrahl auf die Trennfläche von Glas und

Luft einfallen, damit er nicht mehr in die Luft austreten kann?

406. Ein Lichtstrahl trifft unter dem Winkel $\varphi = 70°$ auf eine planparallele Glasplatte von 10 cm Dicke und der Brechzahl $n = 1{,}5$. Berechnen Sie den Betrag der Parallelversetzung, die der durchgehende Strahl erleidet.

407. Unter einer 12 cm dicken Glasplatte befindet sich eine Münze. Sie wird von einem Beobachter gesehen, dessen Auge senkrecht auf die Glasplatte schaut; es ist von dieser 10 cm entfernt. In welcher Entfernung, vom Auge des Beobachters aus gemessen, erscheint das Bild der Münze?

408. Auf ein Prisma mit dem brechenden Winkel $\gamma = 54°$ fällt ein monochromatischer Lichtstrahl, für dessen Wellenlänge die Brechzahl des Prismas den Wert $n = 1{,}63$ hat. Wie groß ist die minimale Ablenkung des Lichtstrahls beim Durchgang durch das Prisma?

409. Ein optisches Prisma, dessen brechender Winkel 50° ist, erlaubt für einen durchgehenden Lichtstrahl eine minimale Ablenkung von 35°. Wie verändert sich dieser Winkel, wenn das Prisma ganz in Wasser untergetaucht wird?

410. Auf ein Prisma mit der Brechzahl $n = \sqrt{2}$ fällt ein Lichtstrahl so, daß er auf die vordere Fläche des Prismas senkrecht auftrifft. Berechnen Sie, wie groß der brechende Winkel dieses Prismas höchstens sein darf, damit der austretende Lichtstrahl an der rückwärtigen Fläche gebrochen wird.

411. Zwei Planspiegel schließen miteinander den Winkel φ ein. Auf einen der beiden Spiegel fällt ein Lichtstrahl, der in einer senkrecht zur Schnittlinie beider Spiegel orientierten Ebene liegt. Der Strahl wird erst auf dem ersten, dann auf dem zweiten Spiegel reflektiert und weicht dabei gegenüber seiner ursprünglichen Richtung um den Winkel ψ ab. Ermitteln Sie, wie groß dieser Winkel ist und in welcher Weise er vom Einfallswinkel abhängt.

412. Von einem Felsen aus, der in einer Höhe $h = 76$ m über der spiegelnden Oberfläche eines Sees liegt, wird eine Wolke unter einem Höhenwinkel $\varphi = 56°$ beobachtet. Ihr Spiegelbild erscheint im See unter einem Winkel $\psi = 58°$ gegenüber der Horizontalen nach unten gemessen. Wie groß ist die tatsächliche Höhe der Wolke?

413. a) Auf der optischen Achse eines Konkavspiegels befindet sich eine punktförmige Lichtquelle. Ihr Abstand vom Scheitelpunkt des Spiegels ist gleich $^3/_2$ des Spiegelradius. Bestimmen Sie die Lage des Bildes.
b) Auf einer optischen Achse eines Konvexspiegels befindet sich eine punktförmige Lichtquelle im n-fachen Abstand seiner Brennweite vom Spiegelscheitel entfernt. Bestimmen Sie auch hier die Lage des Bildes.

414. Gegeben ist ein sphärischer Konkavspiegel mit einem Krümmungsradius von 56 cm. In welchem Abstand vom Scheitelpunkt des Spiegels muß man einen Gegenstand aufstellen, damit sein Bild
a) reell und viermal vergrößert,
b) virtuell und viermal vergrößert
erscheint? Ermitteln Sie die Lage des Bildes.

415. Ein Gegenstand von 1,5 cm Höhe befindet sich 32 cm vom Scheitelpunkt eines Konkavspiegels entfernt, dessen Krümmungsradius 48 cm beträgt. Bestimmen Sie die Art des entstehenden Bildes, seine Bildweite und Bildgröße.

416. Ein Spiegelgalvanometer enthält einen kleinen Konkavspiegel. Im Abstand $l = 1$ m vor diesem befindet sich eine waagerechte Skale und unmittelbar darunter ein beleuchteter Spalt. Berechnen Sie, welchen Krümmungsradius der Galvanometerspiegel haben muß, damit auf der Skale ein reelles Bild des Spalts

entworfen wird. Berechnen Sie weiter, um welchen Betrag die Lichtspur des Spalts auf der Skale ausgelenkt wird, wenn der Spiegel sich um den kleinen Winkel φ dreht.

417. Ein Konkavspiegel hat eine Brennweite $f = 16$ cm. In welchen Abstand von diesem Spiegel muß ein Beobachter sein Auge bringen, damit er das Abbild seines eigenen Auges in der deutlichen Sehweite 24 cm erblickt?

418. Ein Konkav- und ein Konvexspiegel mit derselben Brennweite $f = 20$ cm stehen einander in einem Abstand $l = 50$ cm so gegenüber, daß ihre beiden optischen Achsen zusammenfallen. In einem Abstand $g = 30$ cm vom Konkavspiegel befindet sich ein punktförmiger leuchtender Gegenstand. Wo wird sein Bild entstehen, wenn das Licht a) zuerst auf dem Konkavspiegel, dann auf dem Konvexspiegel und b) zuerst auf dem Konvexspiegel, dann auf dem Konkavspiegel reflektiert wird?

419. Ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse und bildet dabei einen Konkavspiegel. Berechnen Sie die Brennweite dieses Spiegels.

420. Eine dünne Sammellinse bildet einen 20 cm vor ihr gelegenen Gegenstand in einer Entfernung von 35 cm hinter sich ab. Wie groß ist ihre Brennweite, und welche Vergrößerung tritt auf?

421. Eine Sammellinse der Brennweite $f = 42$ cm entwirft von einem Gegenstand ein dreifach vergrößertes, virtuelles Bild. Bestimmen Sie Gegenstands- und Bildweite.

422. Eine dünne Bikonvexlinse der Brechkraft D entwirft von einem Gegenstand ein Bild mit der Vergrößerung Z. Berechnen Sie Gegenstands- und Bildweite.

423. In einem Punkt P konvergiert ein Strahlenbündel, das vor Erreichen dieses Punktes durch eine Zerstreuungslinse aufgefangen wird, deren Brechkraft den Wert $D = -^{10}/_6$ dptr hat. Bestimmen Sie rechnerisch die Bildweite, wenn die auffangende Zerstreuungslinse von dem Punkt 90 cm entfernt ist.

424. Eine plankonvexe Glaslinse mit einem Krümmungsradius $r_1 = 14$ cm entwirft von einem Gegenstand ein Bild in der Bildweite b, die um 1,05 m kleiner ist als die Gegenstandsweite. Wie groß ist die Gegenstandsweite und Bildweite für $n = 1{,}5$?

425. Die Brechkraft einer bikonvexen Glaslinse hat in Luft den Wert $D_0 = 12$ dptr. Welchen Wert nimmt die Brechkraft an, wenn die Linse in Wasser getaucht ist?

426. Eine dünne bikonvexe Glaslinse entwirft von einem Gegenstand ein Bild in der Bildweite $b_1 = 10$ cm. Gegenstand und Linse seien auf einer optischen Bank montiert, die ohne Veränderung der Gegenstandsweite vollständig in Wasser getaucht wird. Dabei verändert sich die Bildweite auf einen Wert $b_2 = 60$ cm. Wie groß ist die Brennweite dieser Linse in Luft?

427. Eine optische Bank trägt Lichtquelle, Sammellinse und Schirm. Die Sammellinse entwirft auf dem Schirm das Bild der Lichtquelle, deren Abstand vom Schirm $l = 1$ m beträgt. Wenn wir, ohne die Lage von Lichtquelle und Schirm zu verändern, die Linse 20 cm näher an den Schirm verschieben, so wird in dieser zweiten Stellung die Lichtquelle erneut auf dem Schirm scharf abgebildet. Wie groß ist die Brennweite der Linse?

428. Auf einem Schirm wird durch eine Sammellinse ein Gegenstand so abgebildet, daß die Bildgröße den Wert $B_1 = 9$ cm hat. Bei Fixierung von Gegenstand und Schirm wird die Linse an den Schirm herangefahren, wobei sich herausstellt, daß in einer zweiten Stellung ein scharfes Bild der Größe $B_2 =$

$= 4$ cm entsteht. Berechnen Sie die wahre Gegenstandsgröße G.

429. Die Brennweite einer Sammellinse ist f. Berechnen Sie, in welchem Abstand von der Linse eine Lichtquelle aufgestellt werden muß, damit sich die Bildweite des entstehenden Bildes um weniger als $p\,\%$ von der Brennweite f unterscheidet.

430. Eine Glaskugel hat den Krümmungsradius r. In welcher (mit r als Einheit ausgedrückten) Entfernung muß ein Gegenstand vor der Kugelfläche aufgestellt werden, damit das hinter der Kugelfläche entworfene Bild in gleicher Entfernung wie der Gegenstand erscheint?

431. Eine dicke bikonvexe Glaslinse hat die Krümmungsradien $r_1 = r_2 = 10$ cm und die Dicke $d = 5$ cm. Berechnen Sie die Brennweite dieser Linse und die Lage ihrer Hauptebenen. Ermitteln Sie des weiteren die Bildweite für den Fall, daß die Gegenstandsweite $g = 20$ cm beträgt.

432. Ein Gegenstand wird durch eine 2 cm vom Auge entfernt gehaltene Lupe betrachtet. Berechnen Sie die Brennweite der Lupe, wenn bei sechsfacher Vergrößerung die Bildweite den Wert $b = 30$ cm annimmt.

433. Eine Lupe hat die Brechkraft $D = 10$ dptr. Berechnen Sie, in welchem Abstand von der Lupe ein Gegenstand anzubringen ist, damit ein Beobachter, der die Lupe dicht vors Auge hält, ein scharfes Bild erblickt. Für den Beobachter hat die deutliche Sehweite den Wert $l = 25$ cm. Welche Vergrößerung hat die Lupe?

434. Berechnen Sie die mit einem Mikroskop erreichbare Vergrößerung, dessen Objektiv 0,5 cm, dessen Okular 2,0 cm Brennweite hat und dessen Tubuslänge 12 cm beträgt.

435. Zwei Sammellinsen mit den Brennweiten 3 cm bzw. 4 cm sind, als optisches System vereinigt, in 15 cm Abstand hintereinander befestigt. Berechnen Sie, in welchem Abstand vor der ersten, als Objektiv wirkenden Linse man einen Gegenstand aufstellen muß, damit das System vom Gegenstand ein virtuelles Bild entwirft, das sich in der deutlichen Sehweite befindet. Das Auge des Beobachters sei dicht an die zweite, als Okular wirkende Linse gerückt.

436. Ein Keplersches Fernrohr besteht aus einem Objektiv mit der Brennweite $f_1 = 42$ cm und einem Okular mit der Brennweite $f_2 = 1{,}4$ cm. Wie lang ist das Fernrohr, und welche Winkelvergrößerung erlaubt es?

437. Das Objektiv eines Galileischen Fernrohrs besteht aus einer dünnen Bikonvexlinse mit den Krümmungsradien $r_1 = r_2 = 24$ cm und der Brechzahl $n = 1{,}5$. Die Brechkraft des Okulars hat den Wert $D = -20$ dptr. Berechnen Sie, in welchem Abstand vom Objektiv man das Okular bringen muß, damit ein Beobachter mit der deutlichen Sehweite $l = 25$ cm einen Gegenstand scharf sieht, der 30 m vor dem Objektiv steht.

438. Ein Mikroprojektor, dessen Objektiv eine Brennweite $f_1 = 3$ cm, dessen Okular eine Brennweite $f_2 = 6{,}5$ cm hat und dessen Baulänge $d = 28$ cm beträgt, soll auf einer Mattscheibe das scharfe Bild eines Gegenstands entwerfen, der in der Gegenstandsweite $g = 3{,}6$ cm vor dem Objektiv steht. Berechnen Sie, in welchem Abstand vom Okular die Mattscheibe angebracht sein muß und welchen Wert die Vergrößerung annimmt.

439. Berechnen Sie den kleinsten Abstand zwischen zwei Strichen, die durch ein Mikroskop noch getrennt wahrgenommen werden sollen, wenn im blauen Licht der Wellenlänge $\lambda = 4500$ Å beobachtet wird und die numerische Apertur des Objektivs den Wert $A = 0{,}55$ hat. Ermitteln Sie weiter, um wievielmal kleiner diese Entfernung ist als die, die

ein unbewaffnetes Auge in der deutlichen Sehweite $l = 25$ cm gerade noch trennen kann, wenn wir berücksichtigen, daß der kleinste Auflösungswinkel des unbewaffneten Auges den Wert $\alpha = 1'$ hat.

440. Die Brechzahl des Glases, aus dem eine Sammellinse hergestellt ist, hat für rotes Licht den Wert $n_{\text{rot}} = 1{,}51$ und für violettes den Wert $n_{\text{viol}} = 1{,}531$. Wie weit fallen die Brennpunkte für rote und violette achsenparallele Strahlen auseinander, wenn die Krümmungsradien der Linse $r_1 = r_2 = 15$ cm sind?

4.3. Wellenoptik

Wenn zwei mechanische Wellen, die von verschiedenen Quellen ausgehen, sich in irgendeinem Bereich überlagern, so kommt es in diesem Bereich zur **Interferenz.** Die resultierende Wellenamplitude ist dann gleich der Vektorsumme der Amplituden der beteiligten Teilwellen. Wenn aber die Quellen, von denen die Wellen ausgehen, mit der gleichen Frequenz schwingen und gleiche Schwingungsrichtung sowie gleiche, konstante Phasendifferenz haben, so handelt es sich dann um sog. **kohärente Quellen.** Die Amplitude der resultierenden Schwingung ist dann in jedem Punkt des betreffenden Mediums völlig bestimmt und hängt nur von den Abständen des Punktes von den beiden Quellen ab.

Eine Maximalamplitude bildet sich in all den Punkten aus, in denen für die Wegdifferenz der Wellen, $d_2 - d_1$, die Beziehung

$$d_2 - d_1 = k\lambda$$

erfüllt ist. Eine Minimalamplitude entsteht überall da, wo für die Wegdifferenz gilt

$$d_2 - d_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

(λ Wellenlänge, d_1 bzw. d_2 Abstände des angenommenen Punktes von den beiden Quellen).

Auch bei elektromagnetischen Wellen kann Interferenz eintreten, wenn die Wellen kohärent sind und Überlagerungen entsprechend den vorgenannten Bedingungen auftreten.

Der Abstand Δs zwischen zwei benachbarten Maxima der Beleuchtungsstärke auf einem Schirm, der von zwei kohärenten Lichtquellen beleuchtet wird, die sich vom Schirm im Abstand l und voneinander im Abstand a (mit $a \ll l$) befinden, genügt folgender Beziehung:

$$\Delta s = \lambda \frac{l}{a},$$

wobei λ die Wellenlänge des verwendeten monochromatischen Lichtes bedeutet.

Interferenz von Lichtstrahlen kann man auch auf einer dünnen, durchsichtigen Schicht beobachten. Wenn die dünne Schicht mit einem parallelen Bündel monochromatischen Lichtes der Wellenlänge λ bestrahlt wird, dann wird das Licht von der Schicht mit maximaler Intensität reflektiert, wenn die Bedingung

$$\frac{2nd}{\cos\beta} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

erfüllt ist. Dagegen wird das Licht mit minimaler Intensität reflektiert, wenn gilt

$$\frac{2nd}{\cos\beta} = k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

(n Brechzahl der reflektierenden Schicht, d ihre Dicke, β Winkel, unter dem die Lichtwelle in die Schicht hinein gebrochen wird).

Die Tatsache, daß Licht sich nicht immer nur geradlinig ausbreitet, sondern durch Beugung Richtungsänderungen erfährt, wird durch verschiedene Experimente bestätigt, so z. B. die **Beugung am Spalt** und die **Beugung am optischen Gitter.** Stellen wir uns vor, daß auf einen engen Spalt in einem sonst undurchsichtigen Hindernis oder auf ein optisches Gitter ein monochromatisches Bündel paralleler Strahlen senkrecht einfällt. Es tritt Beugung auf, und an einem geeignet angeordneten Schirm können die Interferenzen beobachtet werden.

Bei Beugung des Lichtes am Spalt werden die durch die Gleichung

$$d \sin\alpha = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

bestimmten Richtungen dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen kein Licht ausgebreitet wird. Auf dem Schirm entspricht das der Beleuchtungsstärke Null. d ist hier die Spaltbreite.

Bei der Beugung des Lichtes am Gitter entstehen auf einem Schirm Maxima der Beleuchtungsstärken in all den Punkten, die den Richtungen entsprechen, die durch die Gleichung

$$d \sin\alpha = k\lambda$$

bestimmt werden, wobei d die **Gitterkonstante** ist. Sie ist gleich dem Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Striche des Gitters. Der Zahlenwert k kann nur ganzzahlige positive Werte annehmen und bezeichnet die Ordnung des zugehörigen relativen Maximums.

Für die Untersuchung von Beugungserscheinungen an Röntgenstrahlen sind *räumliche Kristallgitter* geeignet. Wenn auf die ebene Oberfläche eines Kristalls ein paralleles Bündel von Röntgenstrahlen einfällt, so wird das Röntgenlicht dann mit maximaler Intensität reflektiert, wenn für seinen Einfallswinkel α die **Bragg-Wulfsche**

Lösung

Die Entfernung Sonne – Erde beträgt $d = 1{,}49 \cdot 10^8$ km, der Sonnenradius ist $r = 695550$ km. Wir sehen die Sonne als eine Kugel mit dem Radius r an und setzen voraus, daß die von der Oberflächeneinheit in der Zeiteinheit ausgehende Gesamtenergie W_e für alle Punkte der Sonnenoberfläche gleich ist. Demnach strahlt die gesamte Sonnenoberfläche in der Zeiteinheit die Energie

$$W_g = 4\pi r^2 W_e$$

aus. Diese von elektromagnetischen Wellen übertragene Energie ist auf einer kugelförmigen Wellenfläche verteilt. In Erdentfernung entfällt davon auf die Flächeneinheit der Anteil

$$W = \frac{W_g}{4\pi d^2} .$$

Hierbei bedeutet d den Abstand Sonne–Erde. Daraus finden wir

$$W_e = W \frac{d^2}{r^2} . \qquad (1)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Sonne wie ein idealer schwarzer Körper strahlt, können wir den Wert der Strahlstärke I mit Hilfe des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes in der Form

$$I = \sigma T^4 \qquad (2)$$

ausdrücken. Durch Vergleich der Gln. (1) u. (2) ergibt sich

$$T = \sqrt[4]{\frac{I}{\sigma}} = \sqrt[4]{W \frac{d^2}{\sigma r^2}} = \sqrt{\frac{d}{r}} \sqrt[4]{\frac{W}{\sigma}} .$$

Durch Einsetzen der gegebenen Größen finden wir

$$T = \sqrt{\frac{1{,}495 \cdot 10^8 \text{ km}}{6{,}9555 \cdot 10^5 \text{ km}}} \sqrt[4]{\frac{\frac{1{,}94 \cdot 4{,}2}{60} \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1}}{5{,}7 \cdot 10^{-12} \text{ J cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ grd}^{-4}}} = \underline{5684 \text{ °K}}.$$

340. Ein Metallfaden vom Durchmesser $d = 0{,}01$ cm befindet sich in einem evakuierten Kolben. Er soll durch einen elektrischen Strom auf die konstante Temperatur $T = 2500$ °K erhitzt werden. Der Faden soll wie ein idealer schwarzer Körper strahlen; Wärmeleitungsverluste können vernachlässigt werden. Der spezifische Widerstand des verwendeten Drahtes ist $\varrho = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \Omega$ cm. Berechnen Sie die erforderliche Stromstärke.

Lösung

Wenn der Metallfaden wie ein idealer schwarzer Körper strahlt, dann geht von einem Quadratzentimeter seiner Oberfläche entsprechend dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz in der Sekunde die Gesamtenergie

$$W_e = \sigma T^4$$

aus. Die Energie, die der Faden mit der Oberfläche A während der Zeit t abstrahlt, ist dann

$$W_g = W_e A t = \sigma T^4 \pi l d t,$$

wobei l seine Länge bedeutet.
Damit der Metallfaden auf der konstanten Temperatur T gehalten werden kann, ist es notwendig, den durch Abstrahlung bewirkten Energieverlust durch diejenige Energie zu ersetzen, die beim Durchfluß des elektrischen Stromes frei wird. Wenn durch einen Leiter mit dem Widerstand R ein Strom der Stärke I_{el} fließt, so erhöht sich seine Energie in der Zeit t um den Betrag

$$\Delta W = R I_{el}^2 t,$$

was sich durch Temperaturerhöhung äußert. Wenn diese zugeführte Energie für die Deckung der abgestrahlten aufgewendet werden soll, muß die Bedingung erfüllt sein

$$R I_{el}^2 t = \sigma T^4 \pi l d t. \tag{1}$$

Wenn wir für den Widerstand eines Leiters der Länge l und des Querschnitts A die Formel

$$R = \varrho \frac{l}{A} = \varrho \frac{l}{\pi \frac{d^2}{4}}$$

einführen, dann läßt sich Gl. (1) umformen in

$$I_{el}^2 = \frac{\sigma T^4 \pi^2 d^3}{4\varrho},$$

$$I_{el} = \frac{\pi d T^2}{2} \sqrt{\frac{\sigma d}{\varrho}}\,.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt sich

$$I_{el} = \frac{\pi \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \cdot 2{,}5^2 \cdot 10^6\,\mathrm{grd}^2}{2} \sqrt{\frac{5{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}\,grd^{-4}} \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}}{2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}}} = \underline{1{,}47\,\mathrm{A}}.$$

341. Ein Metallfaden mit dem Durchmesser $d = 0{,}02$ cm erwärmt sich unter der Wirkung eines elektrischen Stromes auf eine Temperatur $T_1 = 3000$ °K. Der Faden soll wie ein idealer schwarzer Körper strahlen und von seiner Umgebung keinerlei weitere Energie aufnehmen. Er gibt seine Energie nur auf dem Wege der Strahlung ab. Berechnen Sie, welche Zeit vergeht, bis nach Abschalten des Stromes die Temperatur des Fadens auf den Wert $T_2 = 800$ °K abgesunken ist. Die Dichte des Stoffes, aus dem der Faden besteht, ist $\varrho = 19000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, seine spezifische Wärmekapazität ist $c = 0{,}037\,\mathrm{kcal\,kg^{-1}grd^{-1}}$.

Lösung

Wenn der Faden wie ein idealer schwarzer Körper strahlt und aus seiner Umgebung keine Energie aufnimmt, so strahlt entsprechend dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz 1 cm² seiner Oberfläche in der Sekunde die Energie

$$W_e = \sigma T^4$$

ab, und der Faden mit der Gesamtoberfläche $A = \pi l d$ strahlt die Energie

$$W = \sigma \pi l d T^4 \tag{1}$$

ab. In der infinitesimalen Zeitspanne dt nimmt die Temperatur des Fadens vom Wert T auf $T - \mathrm{d}T$ ab, und der Faden emittiert die Energie

$$W\,\mathrm{d}t = -mc\,\mathrm{d}T \tag{2}$$

(m Masse, c spezifische Wärmekapazität des Fadens).
Wenn wir in Gl. (2) den aus Gl. (1) folgenden Ausdruck für die Energie einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\sigma \pi l d}{mc}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}T}{T^4},$$

und durch Integration

$$\int_0^{t'} \frac{\sigma \pi l d}{mc}\,\mathrm{d}t = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T^4}$$

und nach Auflösung

$$t' = \frac{mc}{3\sigma \pi l d}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right).$$

Wenn wir hier noch die Masse m des Fadens ersetzen durch

$$m = V\varrho = \pi \frac{d^2}{4} l\varrho,$$

so erhalten wir

$$t' = \frac{d\varrho c}{12\sigma}\left[\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right].$$

Mit den gegebenen Größen ergibt sich für die gesuchte Zeit

$$t' = \frac{2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \cdot 19 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 37 \cdot 4{,}18\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,grd^{-1}}}{12 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J\,s^{-1}m^{-2}\,grd^{-4}}}\left[\frac{1}{8^3 \cdot 10^6\,\mathrm{grd}^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3^3 \cdot 10^9\,\mathrm{grd}^3}\right] = \underline{1{,}65\,\mathrm{s}}.$$

342. Ein schwarzer Körper wird erhitzt a) auf eine Temperatur $T_a = 10^6$ °K und b) $T_b = 10^3$ °K. Berechnen Sie, auf welche Wellenlänge jeweils das Maximum der emittierten Strahlungsenergie entfällt.

Lösung

Entsprechend dem WIENschen Verschiebungsgesetz ist die Wellenlänge, bei der ein idealer schwarzer Körper maximal Energie abstrahlt, umgekehrt proportional der

absoluten Temperatur, also

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte ergibt das:

a) $$\lambda_{max} = \frac{0{,}00289 \text{ m grd}}{10^6 \text{ grd}} = 2{,}89 \cdot 10^{-9} \text{ m} = \underline{28{,}9 \text{ Å}}.$$

b) $$\lambda_{max} = \frac{0{,}00289 \text{ m grd}}{10^3 \text{ grd}} = \underline{28900 \text{ Å}}.$$

A Aufgaben

461. Ein Metallfaden von 0,02 cm Durchmesser und 10 cm Länge, der sich im Vakuum befindet und wie ein idealer schwarzer Körper strahlt, ist durch elektrischen Strom auf eine Temperatur von 3000 °K erhitzt worden. Wie groß ist die in der Minute abgestrahlte Energie?
462. Der durchschnittlich von der Erdoberfläche abgestrahlte Energiestrom beträgt 0,13 cal cm^{-2} min^{-1}. Welche Temperatur müßte ein idealer schwarzer Körper haben, um die gleiche Energiemenge abstrahlen zu können?
463. In ein schwarzes, würfelförmiges Gefäß, dessen dünne Wände eine Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt haben, wird 1 kg Wasser von 50 °C gegossen, so daß das Würfelvolumen damit ausgefüllt ist. Berechnen Sie, in welcher Zeit sich das Wasser auf eine Temperatur von 10 °C abkühlt.
464. Von der Sonne wird ein maximaler Energiestrom bei der Wellenlänge $\lambda = 4{,}75 \cdot 10^{-5}$ cm des Sonnenspektrums abgestrahlt. Es sei angenommen, daß die Sonne wie ein idealer schwarzer Körper strahlt. Berechnen Sie die Oberflächentemperatur der Sonne.
465. Ein idealer schwarzer Körper hat eine Temperatur $T = 5000$ °K. Berechnen Sie, wieviel mal so groß der auf die Wellenlänge $\lambda_1 = 5800$ Å entfallende Energiestrom ist gegenüber dem auf die Wellenlänge $\lambda_2 = 7600$ Å entfallenden.

5.2. Verhalten von Elementarteilchen

In einem elektrischen Feld der Feldstärke E wirkt auf ein Elektron eine Kraft, die gegeben ist durch

$$\vec{F} = -e\vec{E}.$$

In einem Magnetfeld der Induktion $\vec{B}$ wirkt auf ein mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegtes Elektron die Kraft

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Wenn das Magnetfeld homogen und die Geschwindigkeit des Elektrons senkrecht zur Richtung der Induktion orientiert ist, nimmt die auf das Elektron wirkende Kraft einen konstanten Wert an:

$$F = evB.$$

Sie ist stets zum Krümmungsmittelpunkt der momentan durchlaufenen Bahn gerichtet. In diesem Falle bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn, und die angegebene Kraft gewinnt die Bedeutung einer Zentripetalkraft.
Gemäß den Aussagen der speziellen Relativitätstheorie besteht zwischen der Masse m eines beliebigen materiellen Objekts (Körper, Teilchen, Feld) und seiner Energie E der Zusammenhang

$$E = mc^2,$$

wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet. Wenn sich die Energie eines Objekts ändert, verändert sich also auch seine Masse. Für den Fall der mechanischen Bewegung besteht eine Abhängigkeit der Masse m von der Geschwindigkeit v gemäß der Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

wobei m_0 die Ruhmasse des Körpers ist, d. h. seine Masse bei der Geschwindigkeit $v = 0$. Gemäß dieser Theorie beträgt die kinetische Energie eines Körpers

$$E_k = c^2(m - m_0) = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Für den Impuls eines Teilchens mit der Geschwindigkeit v gilt in der relativistischen Mechanik

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Im Vergleich zur klassischen Physik bietet die spezielle Relativitätstheorie auch neue Einsichten in die Raum-Zeit-Eigenschaften von materiellen Objekten. Aus ihr muß auch die Folgerung der sog. **Zeitdilatation** gezogen werden. Wenn auf irgendeinem Körper, der sich in einem Bezugssystem in Ruhe befindet, ein Prozeß in der Zeitspanne t_0 abläuft, dann benötigt der gleiche Prozeß auf einem anderen Körper, der

sich gegenüber dem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit v bewegt, eine andere Zeitspanne t, gegeben durch

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Das Lichtquant einer elektromagnetischen Strahlung der Wellenlänge λ und der Frequenz ν ist durch die Energie

$$W = h\nu$$

und den Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

gekennzeichnet, wobei h die **Plancksche Konstante,** das **Plancksche Wirkungsquantum,** darstellt.
Für die Geschwindigkeit der *Photoelektronen,* die von manchen Substanzen unter der Einwirkung von Licht bestimmter Frequenz emittiert werden (**äußerer lichtelektrischer Effekt**), gilt

$$h\nu = W_0 + W_A + \frac{1}{2} m v^2,$$

(W_0 *Ionisationsarbeit,* W_A *Ablösearbeit,* ν Frequenz des verwendeten Lichtes, h PLANCKsches Wirkungsquantum, m Masse eines Elektrons, v Geschwindigkeit, mit der es aus der betreffenden Substanz austritt).
Bei den Metallen ist W_0 sehr klein, so daß man $W_0 = 0$ setzen kann. Deshalb kann man die vorstehende Gleichung für Metalle in der Form schreiben:

$$h\nu = W_A + \frac{1}{2} m v^2.$$

Wenn sich Teilchen mit einer Geschwindigkeit v bewegen, können wir ihnen eine DE BROGLIE-Welle zuordnen, deren Wellenlänge λ durch die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

gegeben ist (m Masse des Teilchens, h PLANCKsches Wirkungsquantum).

Unter **Ionisationspotential** eines bestimmten chemischen Elements verstehen wir dasjenige Potential, das, mit der Elementarladung multipliziert, die zur Ionisation eines Atoms des betreffenden Elements notwendige Arbeit angibt.
Wenn auf eine Substanz Röntgen- oder Gammastrahlen fallen, so tritt eine Streuung auf, und die gestreute Strahlung enthält neben der Komponente mit der Wellenlänge der Primärstrahlung auch Strahlungsanteile mit größerer Wellenlänge λ'. Entsprechend den Erkenntnissen von COMPTON handelt es sich bei diesem Streuprozeß um Wechselwirkungen von Lichtquanten und Elektronen, bei denen es zum Impulsaustausch kommt. Die Quanten der Röntgen- oder Gammastrahlung treffen auf freie oder schwach gebundene Elektronen und werden entsprechend den Gesetzen der klassischen Stoßmechanik reflektiert. Für die dabei auftretende Wellenlängenvergrößerung $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ gilt die Beziehung

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

(Die Konstante λ_C, die COMPTON-Wellenlänge des Elektrons, wird mit $\lambda_C = h/m_0c = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ m angegeben, m_0 Ruhmasse des Elektrons, h PLANCKsches Wirkungsquantum, c Vakuumlichtgeschwindigkeit, ϑ Winkel, den der abgelenkte Strahl mit der Richtung des primären einschließt).
Wenn wir die Frequenz einer elektromagnetischen Strahlung in bezug auf zwei verschiedene Inertialsysteme S und S' angeben, wobei sich das System S' gegenüber dem System S mit der Geschwindigkeit v bewegt, dann gilt für die in den beiden Systemen auftretende Frequenz gemäß der DOPPLERschen Beziehung

$$\nu' = \nu - \frac{v}{\lambda}$$

(λ Wellenlänge der angenommenen Strahlung, ν ihre Frequenz im System S, ν' Frequenz im System S').

B **Beispiele**

343. Unter dem Einfluß der Kräfte eines elektrostatischen Feldes, das durch eine negative Punktladung der Größe $Q = 10^{-10}$ C erregt wird, durchläuft ein Elektron eine Bahn, deren Anfangspunkt 5 cm und deren Endpunkt 10 cm von der angegebenen Punktladung entfernt ist. Welche Geschwindigkeit und welche kinetische Energie erreicht das Elektron auf dieser Bahn, wenn es im Anfangspunkt die Geschwindigkeit Null hatte?

Lösung

Aus dem Energiegesetz ergibt sich für den vorliegenden Fall, daß die Arbeit, welche die Kräfte eines elektrostatischen Feldes auf einer bestimmten Strecke verrichten, gleich der Zunahme der kinetischen Energie eben auf dieser Strecke sein muß, d. h.,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}1}\right) \mathrm{J} \approx$$

$$\approx 9 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = \underline{9\,\mathrm{eV}},$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = \underline{1{,}78 \cdot 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

344. In einem Katodenstrahloszillographen wird die Ablenkung der Elektronen durch ein homogenes elektrisches Feld bewirkt, das zwischen den Platten eines Kondensators besteht. In dieses Feld treten Elektronen mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ senkrecht ein (Bild 195). Bestimmen Sie die auf dem Schirm sichtbare Ablenkung des Elektronenstrahls gegenüber seiner ursprünglichen Richtung, wenn die Spannung zwischen den Kondensatorplatten 100 V beträgt. Die Platten haben eine Länge von 3 cm, ihr Abstand ist 1 cm, und der Schirm befindet sich 30 cm hinter ihnen.

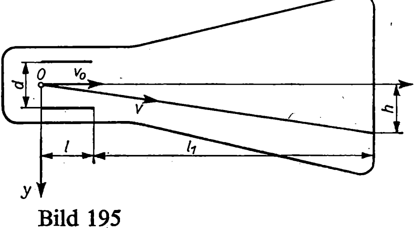


Bild 195

Lösung

Hierbei handelt es sich um die Bewegung von Elektronen in einem homogenen elektrischen Querfeld der Stärke

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{cm}} = 100\,\mathrm{V\,cm^{-1}}.$$

Unter Verwendung der Bezeichnungen in Bild 195 kann die Bewegung der Elektronen im Kondensatorfeld dargestellt werden durch

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0, \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = eE.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2.$$

Die in diesem Feld durchflogene Parabelbahn wird durch die Gleichung beschrieben:

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{x^2}{v_0^2}.$$

An der Stelle, wo die Elektronen das Kondensatorfeld verlassen, ist $x = l$, und deshalb ergibt sich

$$y_l = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v_0^2}.$$

Für den Winkel φ, den an dieser Stelle die Richtung der Elektronengeschwindigkeit mit der x-Achse einschließt, gilt

$$\tan \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{eE}{m} t_l}{v_0} = \frac{\frac{eE}{m} \frac{l}{v_0}}{v_0} = \frac{eEl}{mv_0^2}.$$

In diesem Punkt ist die Tangente zur Parabelbahn durch die Gleichung

$$y - y_l = \tan \varphi \, (x - l)$$

gegeben. Aus ihr können wir die gesuchte Größe h berechnen. Für $x = l + l_1$ ergibt sich nämlich $y = h$, so daß gilt:

$$h = y_l + l_1 \tan \varphi = \frac{eEl^2}{2mv_0^2} + \frac{eEll_1}{mv_0^2} = \frac{eEl}{mv_0^2} \left(\frac{l}{2} + l_1 \right) =$$

$$= \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{100}{10^{-2}} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{14}} \cdot 0{,}315 \text{ m} = \underline{0{,}166 \text{ m}}.$$

345. Ein Elektron mit einer kinetischen Energie $W_k = 5 \cdot 10^3$ eV bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld der Induktion $B = 50$ G so, daß Bewegungsrichtung und Induktionsrichtung senkrecht zueinanderstehen. Wie groß ist der Radius der entstehenden Bahnkrümmung?

Lösung

Für die Bewegung eines langsamen Elektrons in einem homogenen Magnetfeld, dessen Induktionsrichtung senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons orientiert ist, gilt

$$m \frac{v^2}{r} = evB,$$

so daß wir für den gesuchten Krümmungsradius

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2W_k}{m}}$$

erhalten. Hierin haben wir die Geschwindigkeit mit Hilfe der Beziehung $W_k = \frac{1}{2} mv^2$ ausgedrückt. Damit ist

$$r = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ Wb m}^{-2}} \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{9{,}109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} =$$

$$= \underline{4{,}77 \cdot 10^{-2} \text{ m}}.$$

In diesem Lösungsgang wurde für die Masse m die Ruhmasse des Elektrons eingesetzt.

346. Ein Elektron fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 10^4$ m s^{-1} in ein homogenes Magnetfeld der Induktion $B = 0{,}01$ Wb m^{-2} so ein, daß seine Geschwindigkeitsrichtung mit der Richtung von B den Winkel $\varphi = 30°$ einschließt. Bestimmen Sie den Radius der Windung jener Spirale, auf der sich das Elektron nun bewegen wird, die Höhe einer Windung sowie die Zeitspanne, in der das Elektron in Richtung der Spiralachse eine Strecke $s = 1$ m zurückgelegt haben wird.

Lösung

Wir wollen die Geschwindigkeit v_0, mit der das Elektron in das Magnetfeld eintritt, in zwei Komponenten zerlegen; v_{01} in Richtung der Induktion B und v_{02} senkrecht dazu:

$$v_{01} = v_0 \cos\varphi, \quad v_{02} = v_0 \sin\varphi.$$

Die Bewegung des Elektrons erfolgt so, als ob sie aus zwei Bewegungskomponenten zusammengesetzt sei; einer gleichförmig geradlinigen Bewegung in Richtung der Induktion mit der Geschwindigkeit v_{01} (auf diese Bewegungskomponente hat das Magnetfeld keinerlei Einfluß) und einer Bewegung auf einer Kreisbahn in der zur Induktionsrichtung senkrechten Ebene mit der Geschwindigkeit v_{02}. Letztere Komponente der Elektronenbewegung ist genau derjenigen gleich, die in Beispiel 345 dargestellt wurde. Demzufolge wird sich die resultierende Bewegung des Elektrons auf einer Spirale vollziehen, deren Achse mit der Induktionsrichtung des gegebenen Magnetfeldes zusammenfällt. Für den Windungsradius r der resultierenden Spirale gilt ganz analog zu Beispiel 345 die Bedingung

$$\frac{mv_{02}^2}{r} = eBv_{02}.$$

Daraus ergibt sich

$$r = \frac{mv_{02}}{eB} = \frac{mv_0 \sin\varphi}{eB} = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}} \text{ m} = \underline{2{,}84 \cdot 10^{-6} \text{ m}}.$$

Die Zeit T, in der das Elektron einen Umlauf um die Spiralachse ausführt, ergibt sich aus der Beziehung

$$T = \frac{2\pi r}{v_{02}} = \frac{2\pi r}{v_0 \sin\varphi} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}84 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{10^4 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{1}{2}} = \underline{3{,}57 \cdot 10^{-9} \text{ s}}.$$

Für die Höhe einer einzelnen Windung gilt

$$h = v_{01}T = v_0 \cos\varphi\, T = 10^4 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3{,}57 \cdot 10^{-9} \text{ m} = \underline{3{,}09 \cdot 10^{-5} \text{ m}}.$$

Die Zeit t, in der das Elektron längs der Spiralachse eine Strecke $s = 1$ m zurücklegt, ist schließlich

$$t = \frac{s}{v_{01}} = \frac{1}{v_0 \cos\varphi} = \frac{1}{10^4 \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ s} = \underline{0{,}115 \cdot 10^{-3} \text{ s}}.$$

347. Ein Magnetron besteht aus einer Diode, deren Anode die Form eines Kreiszylinders hat, in dem koaxial der Katodenfaden liegt. Auf den Glaskolben dieser Diodenröhre wird eine Zylinderspule gewickelt, deren Achse mit der der Anode zusammenfällt. Die draußen aufgesetzte Spule ist lang genug, so daß das von ihr erzeugte Magnetfeld längs der Katode als homogen angesehen werden kann. Die vom Katodendraht emittierten Elektronen stehen unter gleichzeitigem Einfluß des elektrischen Feldes zwischen Katode und Anode und unter dem des Magnetfeldes, das von dem die Spulenwindungen durchfließenden elektrischen Strom erzeugt wird. Berechnen Sie den Mindestwert der Induktion B, der erreicht werden muß, um die Elektronen daran zu hindern, die Anode zu erreichen. Der Radius der Anode ist $r_A = 4$ cm, die Spannung zwischen den Elektroden der Diode beträgt $U = 1000$ V.

Lösung

Die Bewegungsgleichung eines Elektrons, das gleichzeitig dem Einfluß eines elektrischen und eines magnetischen Feldes unterliegt, hat die Form

$$m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \tag{1}$$

($\vec{F}_e$ Kraft des elektrischen Feldes auf das Elektron, $\vec{F}_m$ Kraft des magnetischen Feldes). In Bild 196 ist der Sachverhalt in einem Schnitt dargestellt, der senkrecht zur koaxialen Anordnung gelegt wurde. Demnach ist

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}; \quad \vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Aus dem Bild ist ersichtlich, daß $\vec{F}_e$ in jedem Augenblick eine radiale Richtung und $\vec{F}_m$ dagegen eine axiale Richtung hat. Deshalb zerlegen wir die Beschleunigung in eine radiale und eine axiale Komponente, so daß wir schreiben können:

Bild 196

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{\varrho}) = \frac{dr}{dt}\vec{\varrho} + r\frac{d\vec{\varrho}}{dt},$$

so daß für die Beschleunigung folgt

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{\varrho} + r\frac{d^2\vec{\varrho}}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vec{\varrho}}{dt},$$

($\vec{\varrho}$ Einheitsvektor, der von der Katode zur derzeitigen Momentanlage des Elektrons hin gerichtet ist). Ferner ist

$$\frac{d\vec{\varrho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\varrho} = \omega\vec{\tau}$$

($\vec{\omega}$ die momentane Winkelgeschwindigkeit des Elektrons, $\vec{\tau}$ Einheitsvektor in axialer Richtung). Damit wird dann

$$\frac{d^2\vec{\varrho}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\varrho}}{dt} =$$

$$= \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{\varrho}) - \omega^2\vec{\varrho} = \varepsilon\vec{\tau} - \omega^2\vec{\varrho},$$

denn die Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{\varrho}$ stehen senkrecht aufeinander, so daß $\vec{\omega}\vec{\varrho} = 0$ ist. Für die Beschleunigung des Elektrons erhalten wir also

$$\vec{a} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\omega^2\right)\vec{\varrho} + \left(r\varepsilon + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\omega\right)\vec{\tau}.$$

Wenn wir weiterhin bedenken, daß

$$\vec{F}_\mathrm{m} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) = -e\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{\varrho} + r\omega\vec{\tau}\right) \times \vec{B}\right] = eB\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{\tau} + er\omega B\vec{\varrho}$$

ist, dann wird es möglich, aus Gl. (1) zwei weitere Beziehungen zu erhalten, nämlich

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\omega^2\right) = eE + er\omega B, \quad \text{und}$$

$$m\left(r\varepsilon + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\omega\right) = eB\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Die zweite Beziehung können wir in eine andere Form bringen:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\omega) = eB\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$

woraus wir nach Multiplikation mit $\mathrm{d}t$ und Integration erhalten

$$mr^2\omega = \frac{1}{2}\,eBr^2,$$

so daß sich ergibt

$$\omega = \frac{eB}{2m}.$$

Im Grenzfall, wo die Stärke des Magnetfeldes dem Elektron gerade noch das Erreichen der Anode gestattet, tangiert die Elektronenbahn an die zylindrische Anode, und für den Wert $r = r_\mathrm{A}$ wird $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$. Die kinetische Energie des Elektrons erfüllt im Berührungspunkt die Bedingung

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,mr_\mathrm{A}^2\omega^2 = eU.$$

Wenn wir für die Winkelgeschwindigkeit ω den angegebenen Ausdruck einsetzen, erhalten wir

$$\frac{1}{2}\,mr_\mathrm{A}^2\left(\frac{eB}{2m}\right)^2 = eU, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{1}{8}\,r_\mathrm{A}^2\,\frac{eB^2}{m} = U.$$

Daraus können wir die gesuchte Größe B bestimmen zu

$$B = \sqrt{\frac{8mU}{er_\mathrm{A}^2}} = \frac{2}{r_\mathrm{A}}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = \underline{0{,}53 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Wb\,m^{-2}}}.$$

Sobald wir die Induktion des Magnetfeldes über diesen Wert hinaus erhöhen, können die von der Katode emittierten Elektronen die Anode nicht mehr erreichen.

348. Zwischen den Duanten eines Zyklotrons herrscht eine Spannung der Form $U = U_0 \sin \omega t$, wobei $U_0 = 2 \cdot 10^4$ V und die Frequenz $f = 2{,}25 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$ beträgt. Im Zyklotron sollen einwertige Ionen beschleunigt werden, deren Masse etwa 1800mal so groß ist als die Ruhmasse des Elektrons. Die Anordnung ist in Bild 197 wiedergegeben. Das Ion beginne seine Bewegung im Punkt A des Bildes, und nachdem es eine gewisse Zahl aufeinanderfolgender Halbkreise durchlaufen hat, erreicht es die Geschwindigkeit $v_0 = 4{,}4 \cdot 10^7$ m s^{-1}. Ermitteln Sie die Zahl der notwendigerweise zu durchlaufenden Halbkreise sowie den Radius des ersten und des letzten Halbkreises unter der Voraussetzung, daß der Abstand zwischen den Duanten jeweils im Moment maximaler Spannung durchlaufen wird.

Bild 197

Lösung

Die Zeit, in der das Ion einen beliebigen Halbkreis durchläuft, ist immer gleich groß und also vom jeweiligen Bahnradius unabhängig. Sie muß stets einer halben Periodendauer der Wechselspannung entsprechen, also

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{1}{2 \cdot 2{,}25 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}} = \frac{1}{4{,}5 \cdot 10^7}\ \mathrm{s} = 0{,}222 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

Für die Geschwindigkeit des Ions nach Absolvieren von n Halbkreisen erhalten wir denselben Wert, als ob das Ion in einem linearen elektrischen Feld mit der Potentialdifferenz $\Delta\varphi = nU_0$ beschleunigt worden wäre. Deshalb ist

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = Q n U_0,$$

$$n = \frac{m v_0^2}{2 Q U_0} = \frac{1800 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 19{,}36 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^4} = 557.$$

Der Radius der letzten durchlaufenen Halbkreisbahn ist

$$r_0 = \frac{v_0 \tau}{\pi} = \frac{4{,}4 \cdot 10^7 \cdot 0{,}222 \cdot 10^{-7}}{3{,}14}\ \mathrm{m} = 0{,}31\ \mathrm{m} = \underline{31\ \mathrm{cm}}.$$

Der Radius der ersten Bahn ist dementsprechend

$$r_1 = \frac{v_1 \tau}{\pi} = \tau \frac{\sqrt{\frac{2QU_0}{m}}}{\pi} = 0{,}014\ \mathrm{m} = \underline{1{,}4\ \mathrm{cm}}.$$

349. Bestimmen Sie Masse und Geschwindigkeit eines Elektrons, dessen kinetische Energie 200 keV beträgt.

Lösung

Die spezielle Relativitätstheorie liefert für die Masse eines beliebigen Körpers in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit die Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(m_0 die Ruhmasse des betreffenden Körpers bei der Geschwindigkeit $v = 0$). Diese Beziehung können wir umformen in

$$\frac{m_0}{m} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

woraus wir für die kinetische Energie eines Körpers bei der Geschwindigkeit v die Beziehung erhalten

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2 = (m - m_0)\, c^2.$$

Entsprechend der vorgegebenen Aufgabenstellung ist also

$$(m - m_0)\, c^2 = 2 \cdot 10^5\,\text{eV} = 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J},$$

und demnach

$$m = m_0 + \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2}\,\text{kg} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} + 3{,}56 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \approx$$

$$\approx \underline{12{,}7 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}.}$$

Seine Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{12{,}7 \cdot 10^{-31}}}\,\text{m s}^{-1} = \underline{2{,}25 \cdot 10^8\,\text{m s}^{-1}.}$$

350. Welche Spannung müßte ein elektrostatisches Feld aufweisen, damit ein in ihm beschleunigtes Elektron gemäß den klassischen, d. h. vorrelativistischen Vorstellungen, die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann? Welche Geschwindigkeit erreicht es relativistisch?

Lösung

Gemäß der klassischen Theorie können wir schreiben

$$eU = \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

wobei m_0 die Ruhmasse des Elektrons bedeutet. Im Falle $v = c$ wird

$$eU = \frac{1}{2} m_0 c^2,$$

woraus sich für die Spannung ergibt

$$U = \frac{m_0 c^2}{2e} = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}} \approx \underline{256\,\text{kV}.}$$

Entsprechend den Aussagen der relativistischen Mechanik können wir für die kinetische Energie eines Elektrons schreiben (vgl. auch Beispiel 349):

$$\frac{1}{2} mv^2 = (m - m_0)\, c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Dann ist

$$eU = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 c^2,$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{2},$$

und für die gesuchte Geschwindigkeit ergibt sich

$$v = \frac{\sqrt{5}}{3}\, c \approx \underline{0{,}75\, c.}$$

Bei dieser Geschwindigkeit nimmt die Masse des Elektrons den Wert

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{2}\, m_0 = 1{,}5\, m_0$$

an.
Demnach stieg die relativistische Masse des Elektrons gegenüber seiner Ruhmasse um 50% an.

351. Aus einer Silberfläche, die durch monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 1500$ Å beleuchtet wird, werden Photoelektronen ausgelöst. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit, wenn wir voraussetzen, daß bei Silber der lichtelektrische Effekt erst unterhalb der Wellenlänge $\lambda_0 = 2600$ Å einsetzt?

Lösung

Die Geschwindigkeit der Photoelektronen folgt der Beziehung

$$h\nu = W_A + \frac{1}{2} mv^2,$$

wobei $W_A = h\nu_0$ die Ablösearbeit des Elektrons aus dem betreffenden Metall bedeutet. Da

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{und} \quad \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

ist, können wir unter Berücksichtigung der gegebenen Aufgabe schreiben

$$h\frac{c}{\lambda_0} = W_A \quad (\text{für } \lambda = \lambda_0 \text{ gilt ja } v = 0).$$

$$h\frac{c}{\lambda} = W_A + \frac{1}{2}mv^2,$$

so daß sich ergibt

$$h\frac{c}{\lambda} = h\frac{c}{\lambda_0} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Für die gesuchte Geschwindigkeit erhalten wir daraus

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\text{m s}^{-1}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}\left(\frac{1}{1500 \cdot 10^{-10}\,\text{m}} - \frac{1}{2600 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}\right)} =$$

$$= \underline{1{,}109 \cdot 10^{6}\,\text{m s}^{-1}}.$$

352. Wie groß ist die Wellenlänge der DE BROGLIEschen Wellen, die einem Elektron zuzuordnen sind, dessen kinetische Energie 10^6 eV beträgt?

Lösung

Für die Wellenlänge dieser Wellen gilt die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

(m Masse des Elektrons, v Geschwindigkeit, h PLANCKsches Wirkungsquantum). Da

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_k$$

ist, können wir schreiben

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}},$$

und das ergibt

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2W_k}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2mW_k}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}} =$$

$$= 1{,}22 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = \underline{12{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Å}}.$$

Hierbei wurde mit der Ruhmasse des Elektrons gerechnet.

353. Ein Röntgenlichtquant, dem eine Wellenlänge $\lambda = 1$ Å zukommt, tritt in Wechselwirkung mit dem schwach gebundenen Elektron eines Atoms niederer Ordnungszahl und erleidet dabei eine Richtungsabweichung um den Winkel $\vartheta = 90°$. Berechnen Sie, welchen Energiebetrag das Elektron bei diesem Prozeß aufnimmt und in welcher Richtung es sich danach bewegen wird.

Lösung

Ein schwach gebundenes Elektron können wir als frei betrachten. Bei der Wechselwirkung des Photons mit dem Elektron geht ein Teil der Energie des Photons an das Elektron über, so daß das Photon mit verminderter Energie und (im allgemeinen) veränderter Richtung seinen Weg fortsetzt. Wir bezeichnen die Energie des Photons vor dem Prozeß der Wechselwirkung mit $W = h\nu$ und nach dem Prozeß mit $W' = h\nu'$. Dann gilt die Beziehung

$$h\nu' < h\nu$$

bzw.

$$\nu' < \nu.$$

Wir drücken die Frequenz gemäß der Beziehung $\nu = c/\lambda$ durch die Wellenlänge aus und finden

$$\lambda' > \lambda.$$

Demnach ist die Wellenlänge des aus der ursprünglichen Richtung abgelenkten Photons größer als die, die es vor der Wechselwirkung hatte. Aus der Theorie des COMPTON-Effekts ergibt sich die mit der Wechselwirkung verbundene Wellenlängenänderung zu

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tag{1}$$

mit der *Compton*-Wellenlänge

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 2{,}426 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

(m_0 Ruhmasse des Elektrons).

Wenn wir diese Art der Wechselwirkung von Photon und Elektron unter dem Gesichtspunkt des elastischen mechanischen Stoßes behandeln, dann nimmt das Elektron bei der Wechselwirkung die Energie

$$W_e = W - W' = h(\nu - \nu') = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

auf. Nach Umformung dieser Gleichung mit Hilfe von Gl. (1) erhalten wir für den vom Elektron aufgenommenen Energiebetrag die Aussage

$$W_e = \frac{hc}{\lambda} \frac{2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\lambda + 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt das

$$W_e = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-10}} \frac{2 \cdot 2{,}426 \cdot 10^{-12} \sin^2 45°}{10^{-10} + 2 \cdot 2{,}426 \cdot 10^{-12} \sin^2 45°} \text{ J} =$$

$$= 4{,}8 \cdot 10^{-17} \text{ J} \approx \underline{300 \text{ eV}}.$$

Den Winkel φ, der angibt, wie weit das Elektron in seiner Bewegung gegenüber der ursprünglichen Bewegungsrichtung des Photons abweicht, können wir unter Hinzuziehung des Impulserhaltungssatzes bestimmen. Wir wenden diesen Satz auf das System Photon – Elektron an, indem wir den Impuls des von links einfallenden Photons mit p, den des abgelenkten Photons mit p' und den des Elektrons mit $p_e = mv$ bezeichnen. Dann gilt der Impulserhaltungssatz in der Form

$$p' + p_e = p.$$

In Bild 198 ist das Vektordiagramm der hierbei beteiligten Impulse dargestellt.
Der Impuls des Photons vor und nach der Wechselwirkung kann durch seine Absolutbeträge

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{und} \quad p' = \frac{h}{\lambda'}$$

dargestellt werden. Da der Impuls des Elektrons $p_e = mv$ ist, können wir auf das Impulsdreieck in Bild 198 den Sinussatz anwenden:

$$\frac{\sin [2\,\mathrm{R} - (\varphi + \vartheta)]}{\sin \varphi} = \frac{\frac{h}{\lambda}}{\frac{h}{\lambda'}},$$

$$\frac{\sin (\varphi + \vartheta)}{\sin \varphi} = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Bild 198

Mit Hilfe des Additionstheorems für $\sin (\varphi + \vartheta)$ ergibt sich

$$\cot \varphi = \frac{\lambda' - \lambda \cos \vartheta}{\lambda \sin \vartheta}.$$

Wir berücksichtigen ferner, daß $1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \vartheta/2$ und $\sin \vartheta = 2 \sin \vartheta/2 \cos \vartheta/2$ ist, und wenden diese Winkelbeziehungen auf Gl. (1) an. Dann erhalten wir nach Umformung

$$\cot \varphi = \frac{\tan \frac{\vartheta}{2} (\lambda + \lambda_C)}{\lambda}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen finden wir den Winkel

$$\underline{\varphi = 45°41'.}$$

354. Welche Wellenlänge muß ein Photon haben, das ein Zäsiumatom ionisieren soll, wenn das Ionisationspotential des Cs-Atoms mit $U_i = 3{,}88$ V angegeben ist?

Lösung

Für die Ionisierung des Cs-Atoms muß die Arbeit

$$W = eU_i = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{As} \cdot 3{,}88\ \text{V} = 6{,}216 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

verrichtet werden.
Ein Photon, das diese Ionisation bewirken soll, muß mindestens eine Energie haben, die der vorgenannten Arbeit entspricht. Deshalb muß gelten

$$h\nu = W.$$

Da $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$ und $\dfrac{hc}{\lambda} = W$ ist, wird

$$\lambda = \frac{hc}{W} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{6{,}216 \cdot 10^{-19}}\ \text{m} = 3{,}196 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = \underline{3196\ \text{Å}}.$$

355. Ein Elektron hat die Ruhmasse $m_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg. Wie groß ist die dieser Masse entsprechende Ruhenergie des Elektrons?

Lösung

Der Zusammenhang zwischen Masse und Energie wird durch die EINSTEINsche Beziehung ausgedrückt:

$$E = mc^2.$$

Nach Einsetzen der Werte für die Größen erhalten wir

$$E_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2} = 8{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{J}.$$

Da 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J ist, wird die Ruhenergie des Elektrons

$$E_0 = 5{,}12 \cdot 10^5\ \text{eV} = \underline{0{,}51\ \text{MeV}.}$$

356. Bestimmen Sie die Energie, den Impuls sowie die relativistische Masse eines Röntgenlichtquants der Wellenlänge $\lambda = 1$ Å.

Lösung

Für die Energie des Photons können wir schreiben

$$W = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{10^{-10}}\ \text{J} = 1{,}987 \cdot 10^{-15}\ \text{J} = \underline{12{,}7\ \text{keV}}.$$

Für seinen Impuls gilt

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34}}{10^{-10}} \text{kgm s}^{-1} = \underline{6{,}624 \cdot 10^{-24} \text{kgm s}^{-1}}.$$

Die relativistische Masse des Photons bestimmen wir gemäß der Beziehung $E = mc^2$, die den Zusammenhang zwischen Energieeinheit und Masse beliebiger Objekte ausdrückt. Da im vorliegenden Fall $W = h\nu = hc/\lambda$ ist, gilt

$$mc^2 = h\frac{c}{\lambda},$$

so daß wir für die relativistische Masse des Photons den Ausdruck finden:

$$m = \frac{h}{\lambda c} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34}}{10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{kg} \approx \underline{2{,}21 \cdot 10^{-32} \text{kg}}.$$

357. Energie und Impuls eines Lichtquants betrachten wir zunächst bezogen auf ein Inertialsystem S und danach bezogen auf ein zweites Inertialsystem S', das sich gegenüber dem erstgenannten mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Es ist die Differenz zu bestimmen, durch die sich die beiden Wertepaare unterscheiden, die einmal in bezug auf S und zum anderen in bezug auf S' gelten.

Lösung

Wenn wir die Größe der Energie, des Impulses und der Frequenz des Photons bezüglich S mit den Symbolen W, p und ν, bezüglich des Systems S' aber mit W', p' und ν' bezeichnen, können wir schreiben

$$W = h\nu; \quad p = \frac{h\nu}{c};$$

$$W' = h\nu'; \quad p' = \frac{h\nu'}{c}.$$

Diese Größen werden sich demnach durch die folgenden Differenzen unterscheiden:

$$\Delta W = W - W' = h(\nu - \nu'), \quad \Delta p = p - p' = \frac{h}{c}(\nu - \nu').$$

Der Zusammenhang zwischen den Frequenzen ν und ν' ist entsprechend dem DOPPLER-Prinzip durch die Beziehungen

$$\nu' = \nu - \frac{v}{\lambda} = \nu - \frac{v\nu}{c}$$

und

$$\nu - \nu' = \nu\frac{v}{c}$$

gegeben. Damit erhalten wir

$$\Delta E = h(\nu - \nu') = h\nu \frac{v}{c} = \underline{E \frac{v}{c}},$$

$$\Delta p = \frac{h}{c}(\nu - \nu') = \frac{h\nu}{c} \frac{v}{c} = \underline{p \frac{v}{c}}.$$

358. Ein Elektron bzw. ein Proton bewege sich durch eine optisch durchsichtige Substanz mit der relativen Brechzahl $n = 1{,}6$. Wie groß muß die kinetische Energie jedes der beiden Elementarteilchen sein, damit es Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden kann?

Lösung

Elementarteilchen, die Träger elektrischer Ladung sind, können dann zur Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden, wenn ihre Geschwindigkeit in einem bestimmten Medium größer ist als die Phasengeschwindigkeit des Lichtes in eben diesem Medium. In einem Medium mit der Brechzahl n ist die Phasengeschwindigkeit c' des Lichtes durch die Beziehung $c' = c/n$ gegeben, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet. Es gibt demnach für Elementarteilchen, die Träger einer elektrischen Ladung sind, eine Grenzgeschwindigkeit v, die dadurch charakterisiert ist, daß die Teilchen Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden, sobald sie sich in einem Medium mit einer Geschwindigkeit bewegen, die größer als v ist. Es gilt also

$$v = c' = \frac{c}{n}.$$

Die kinetische Energie des Teilchens hat bei dieser Geschwindigkeit den Wert

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).$$

a) Für das Elektron ergibt das

$$W_k = 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 - 1}} - 1 \right) \text{J} = 2{,}295 \cdot 10^{-14}\,\text{J} \approx \underline{143\,\text{keV}}.$$

Demnach wird im angegebenen Medium jedes Elektron zu einer Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung, dessen Inhalt an kinetischer Energie größer oder mindestens gleich 143 keV ist.

b) Für das Proton gilt

$$W_k = 1{,}6722 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 - 1}} - 1 \right) \text{J} =$$

$$= 4{,}21 \cdot 10^{-11}\,\text{J} \approx \underline{263\,\text{MeV}}.$$

Demnach wird im angegebenen Medium jedes Proton zur Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung, dessen kinetische Energie gleich oder größer als 263 MeV ist.

359. In einem durch das Laboratorium definierten Bezugssystem haben π-Mesonen eine kinetische Energie $W_k = 7\, m_0 v^2$, wobei m_0 die Ruhmasse eines π-Mesons ist. In diesem Zustand beträgt ihre mittlere Lebensdauer $\tau = 1{,}76 \cdot 10^{-5}$ s. Ermitteln Sie hieraus die Ruhlebensdauer dieser Mesonen.

Lösung

Die Mesonen bewegen sich mit hoher Geschwindigkeit gegenüber dem Labor-Bezugssystem. Es tritt deshalb eine relativistische Zeitdehnung auf; die Mesonen existieren gegenüber dem Bezugssystem, in dem sie sich bewegen, länger als in dem, in welchem sie ruhen, d. h. relativ zu dem sie sich in Ruhe befinden. Deshalb verstehen wir unter dem Begriff Ruhlebensdauer ihre Lebensdauer in dem System, relativ zu welchem sie ruhen. Zwischen Ruhlebensdauer τ_0 und der gemessenen Lebensdauer τ besteht der Zusammenhang

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Da für die kinetische Energie

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

gilt, können wir schreiben

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{W_k + m_0 c^2},$$

woraus folgt

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\tau}{\frac{W_k + m_0 c^2}{m_0 c^2}} = \frac{\tau}{\frac{W_k}{m_0 c^2} + 1} =$$

$$= \frac{1{,}76 \cdot 10^{-5}}{7 + 1}\,\text{s} = \underline{2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{s}}.$$

A Aufgaben

466. Ein Staubteilchen der Masse $m = 10^{11-}$ g befindet sich zwischen den horizontal liegenden Platten eines Plattenkondensators, deren Abstand 0,5 cm beträgt und zwischen denen eine Potentialdifferenz $\Delta\varphi = 76{,}5$ V liegt, so im Schwebezustand, daß Gravitation und elektrische Kraft im Gleichgewicht sind. Wieviel Elementarladungen trägt das Staubteilchen?

467. Ein Elektron durchläuft, beginnend aus der Ruhelage, in einem elektrostatischen

Feld eine Potentialdifferenz der Größe $\Delta\varphi = 100$ V. Welche Endgeschwindigkeit erreicht es, wenn wir eine relativistische Massenveränderung vernachlässigen?

468. Ein Elektron mit der kinetischen Energie $W_k = 5$ keV tritt in ein zu seiner Geschwindigkeitsrichtung senkrecht stehendes, homogenes elektrostatisches Feld mit der Feldstärke vom Betrag $E = 10^3$ V cm^{-1} ein. Wie groß wird seine Richtungsänderung beim Durchfliegen der Strecke $x_0 = 2$ cm?

469. Ein Elektron tritt mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 1500$ km s^{-1} in ein homogenes Magnetfeld ein, dessen Feldstärke $H = 20$ Oe senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung des Elektrons orientiert ist. Berechnen Sie den Radius der vom Elektron im Magnetfeld beschriebenen Kreisbahn.

470. Zwischen den Polen eines Zyklotrons, mit dem Deuteronen beschleunigt werden, besteht ein Magnetfeld mit der Induktion $B = 14000$ G. Berechnen Sie die Frequenz des elektrischen Feldes.

471. Bestimmen Sie Masse und kinetische Energie eines Elektrons, das sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}6\,c$ bewegt (c Vakuumlichtgeschwindigkeit).

472. Bestimmen Sie Masse und Geschwindigkeit eines Protons, dessen kinetische Energie mit 10^8 eV angegeben ist.

473. Ein frei fliegendes Elektron hat eine kinetische Energie von 1 MeV. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der es sich bewegt.

474. Aus einer Platinfläche, die mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 1500$ Å bestrahlt wird, treten Photoelektronen mit einer Geschwindigkeit $v = 827$ km s^{-1} aus. Berechnen Sie die Austrittsarbeit des Platins.

475. Bei der Streuung von Licht an Protonen wird eine maximale Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = 2{,}6 \cdot 10^{-5}$ Å gemessen Wie groß ist die Masse des Protons?

476. Ermitteln Sie die Wellenlänge der beim COMPTON-Effekt auftretenden Streustrahlung, wenn die Beobachtung senkrecht zum einfallenden Röntgenstrahlenbündel der Wellenlänge $\lambda = 0{,}5$ Å vorgenommen wird.

477. Lichtquanten mit der Wellenlänge $\lambda = 0{,}5$ Å treffen auf freie Elektronen. Berechnen Sie den Winkel der Bewegungsrichtung der dabei getroffenen Elektronen für den Fall, daß die Lichtquanten gegenüber ihrer ursprünglichen Richtung um einen Winkel $\vartheta = 30°$, $60°$, $90°$ bzw. $180°$ abgelenkt werden.

478. Wie groß ist das Ionisationspotential von verdampften Natriumatomen, wenn die Ionisation bei Beleuchtung mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda = 0{,}242$ µm einsetzt?

479. Das Ionisationspotential eines Quecksilberatoms hat den Wert $V_i = 10{,}4$ V. Welche Minimalgeschwindigkeit müßte ein Elektron haben, das beim Zusammenstoß das Hg-Atom zu ionisieren vermag?

480. Welche kinetische Energie hat ein Proton, wenn die Wellenlänge der ihm zuzuordnenden DE-BROGLIE-Welle den Wert $\lambda = 9{,}04 \cdot 10^{-3}$ Å hat?

481. Bestimmen Sie Energie, Impuls und relativistische Masse eines Quants der γ-Strahlung, dessen Wellenlänge 0,01 Å beträgt.

482. Eine bestimmte Art von Elementarteilchen löst, wenn ihre kinetische Energie mehr als 38 MeV beträgt, in einem Medium mit der Brechzahl $n = 1{,}5$ TSCHERENKOW-Strahlung aus. Um welche Art Elementarteilchen handelt es sich?

483. In einer Röntgenröhre bewegen sich Elektronen mit einer Geschwindigkeit, die gleich der halben Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Berechnen Sie die Grenzwellenlänge der beim Aufprall auf die Anode freiwerdenden Röntgenbremsstrahlung.

484. Experimentell wurde festgestellt, daß π-Mesonen, deren Impuls im Bezugssystem des Laboratoriums den Wert $p = 54$ MeV c^{-1} hat, vom Ort ihrer Entstehung bis zum Ort ihres Zerfalls eine durchschnittliche Wegstrecke von $l = 3$ m zurücklegen. Bestimmen Sie die Ruhlebensdauer dieser Art Mesonen. Ihre Ruhmasse ist $m_{\pi 0} = 276\, m_0$, wobei m_0 die Ruhmasse des Elektrons angibt.

5.3. Physik der Elektronenhülle

Die **Bohrsche Theorie des Atomaufbaus**, das **Bohrsche Atommodell**, beruht auf drei BOHRschen Postulaten über die Bewegung der Elektronen um den Atomkern:

1. *Die Elektronen können den Atomkern nicht auf beliebigen Bahnen umlaufen, sondern nur auf bestimmten, sog.* **Quantenbahnen**, *die besondere Bedingungen erfüllen müssen. Für den Fall, daß wir uns auf Kreisbahnen beschränken, kann ein Elektron nur auf solchen Bahnen umlaufen, die der Bedingung genügen:*

$$2\pi m r v = n h$$

(m Masse des Elektrons, v seine Geschwindigkeit, r Bahnradius, h PLANCKsches Wirkungsquantum, n Hauptquantenzahl, die jeden beliebigen positiven, ganzzahligen Wert außer Null annehmen kann). Es ist ersichtlich, daß mrv gleich dem Bahndrehimpuls des Elektrons ist, bezogen auf die durch die Bahnmitte gehende, senkrecht auf der Elektronenbahn stehende Achse. Je nach dem von der Hauptquantenzahl n angenommenen Wert sprechen wir von höheren oder niedrigeren Quantenbahnen.

2. *Auf den angegebenen Quantenbahnen können Elektronen strahlungslos umlaufen.*

3. *Unterschiedliche Quantenbahnen entsprechen unterschiedlichen Energiezuständen. Beim Übergang von einer höheren auf eine niedriger gelegene Quantenbahn emittiert das Elektron ein elektromagnetisches Strahlungsquant, ein Lichtquant der Frequenz ν, wobei die Beziehung erfüllt ist:*

$$h\nu = W_2 - W_1.$$

W_1 bzw. W_2 sind die Energien des Elektrons auf denjenigen Quantenbahnen, zwischen denen der Übergang erfolgte.

Ganz analog kann ein Elektron, wenn ihm eine genügend große Anregungsenergie zugeführt wird, den Übergang von einer niedrigeren auf eine höher gelegene Quantenbahn ausführen, wobei die Größe des Quantensprunges vom Maß der zugeführten Energie abhängig ist.

Die Wellenzahl $\bar{\nu}$ einer bestimmten Spektrallinie stellt den Kehrwert der zugehörigen Wellenlänge λ dar: $\bar{\nu} = {}^1/\lambda$. Für die Wellenzahl der Spektrallinien des Wasserstoffs gilt die Beziehung

$$\bar{\nu} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

($n_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ und $n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, R$ die RYDBERG-Zahl). Unter der Voraussetzung, daß die Masse des Atomkerns gegenüber der des Elektrons als unendlich groß angenommen wird, hat R den Wert $1{,}097373 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$.
Ein Satz von Spektrallinien, die einem bestimmten Wert n_1 zugehören, stellt eine **Serie** dar, für die $n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$ ist. Diejenige Wellenzahl, die bei einem Quantensprung entsteht, der bei $n_2 = \infty$ beginnt, entspricht einer Spektrallinie, die wir als *Seriengrenze* bezeichnen. Die Quantensprünge (Elektronenübergänge) der BALMER-*Serie* enden bei $n_1 = 2$.
Entsprechend der verallgemeinerten BOHRschen Atomtheorie wird der Zustand eines Elektrons in der Elektronenhülle durch vier Quantenzahlen bestimmt: die Hauptquantenzahl n, die Nebenquantenzahl l, die magnetische Quantenzahl m und die Spinquantenzahl s. Diese Quantenzahlen werden gemäß folgenden Festlegungen normiert:
1. Für einen bestimmten Wert der Hauptquantenzahl n kann die Nebenquantenzahl l folgende Werte annehmen:

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

2. Für einen bestimmten Wert der Nebenquantenzahl l kann die magnetische Quantenzahl m folgende Werte annehmen:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(l - 1), \pm l.$$

3. Die Spinquantenzahl kann nur die beiden Werte $s = \pm\, {}^1/_2$ annehmen.
Gemäß dem PAULIschen Ausschließungsprinzip kann ein Atom niemals zwei Elektronen enthalten, die in allen ihren durch die vier Quantenzahlen bestimmten Eigenschaften übereinstimmen.

B **Beispiele**

360. **Berechnen Sie den Radius der kernnächsten Bahn eines Elektrons, das gemäß der BOHRschen Atomtheorie um den Kern eines Wasserstoffatoms umläuft. Berechnen Sie auch die Geschwindigkeit des Elektrons auf dieser Bahn.**

Lösung

Im BOHRschen Atommodell bewegt sich das Elektron um den Atomkern unter dem Einfluß von COULOMB-Kraft und Fliehkraft, so daß die folgende Beziehung gilt:

$$m_0 \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Gemäß dem BOHRschen Postulat muß weiter gelten

$$2\pi r m_0 v = nh,$$

wobei $n = 1, 2, 3, \cdots$ die Hauptquantenzahl und h das PLANCKsche Wirkungsquantum bedeutet. Für den Radius der n-ten Bahn ergibt sich aus den angeführten Gleichungen

$$r = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} n^2.$$

Für den Radius der ersten Bahn ($n = 1$) finden wir

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (6{,}62)^2 \cdot 10^{-68}}{3{,}14 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}} \text{ m} \approx 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ m} =$$
$$= \underline{0{,}53 \text{ Å}}.$$

Für die Geschwindigkeit v des Elektrons entnehmen wir aus den angeführten Gleichungen

$$v = \frac{nh}{2\pi r m_0} = \frac{nh}{2\pi m_0 \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} n^2} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}.$$

Für die Bahn mit $n = 1$ wird

$$v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{(1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34}} \text{ m s}^{-1} = \underline{2{,}188 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}}.$$

361. Mit welcher Kraft ziehen sich gemäß dem BOHRschen Atommodell Kern und Elektron eines Wasserstoffatoms an, wenn das Elektron sich auf der ersten Bahn befindet? Berechnen Sie, wievielmal so groß diese Kraft ist als die zwischen beiden Teilchen wirkende Massenanziehung.

Lösung

Für die Kraft der COULOMB-Anziehung gilt

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_1^2},$$

wobei $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m den Radius der ersten Quantenbahn bedeutet. Mit ihm wird

$$F_1 = \frac{(1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}53)^2 \cdot 10^{-20}} \text{ N} = \underline{0{,}0821 \cdot 10^{-6} \text{ N}}.$$

Die Gravitationskraft, mit der Proton und Elektron in der gleichen Entfernung aufeinander wirken, ergibt sich zu

$$F_1' = \gamma \frac{m_0 m_p}{r_1^2} = \gamma \frac{1840 m_0^2}{r_1^2} = 6{,}685 \cdot 10^{-11} \frac{1840 \cdot (9{,}109)^2 \cdot 10^{-62}}{(0{,}53)^2 \cdot 10^{-20}} \text{ N} =$$

$$= 3{,}63 \cdot 10^{-47} \text{ N}.$$

$$\frac{F_1}{F_1'} = \frac{8{,}21 \cdot 10^{-8}}{3{,}63 \cdot 10^{-47}} = \underline{2{,}26 \cdot 10^{39}}.$$

Demnach ist die COULOMB-Kraft $2{,}26 \cdot 10^{39}$mal so groß wie die hier wirkende Massenanziehung.

362. Berechnen Sie die Gesamtenergie eines Elektrons, das sich auf der zweiten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffatoms bewegt.

Lösung

Die Gesamtenergie des Elektrons setzt sich aus den Anteilen der potentiellen und der kinetischen Energie zusammen. Wenn wir den Radius der n-ten Quantenbahn mit dem Symbol r_n kennzeichnen, können wir für die potentielle Energie des Elektrons auf dieser Quantenbahn – bezogen auf Unendlich, d. h. in unendlicher Entfernung; denn im Zustand der Abgelöstheit, der Ionisation, ist die potentielle Energie des Elektrons gleich Null – schreiben

$$W_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r_n} \frac{e^2}{r^2} \, dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{e^2}{r} \right]_{\infty}^{r_n} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Für die kinetische Energie erhalten wir unter Hinzuziehung der Gleichung

$$m_0 \frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}$$

$$W_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Damit beträgt die Gesamtenergie des Elektrons

$$W = W_p + W_k = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Da $r_n = \dfrac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_0 e^2}$ ist, wird

$$W = -\frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2}.$$

Für den Fall $n = 2$ erhalten wir

$$W_2 = -\frac{m_0 e^4}{32\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602)^4 \cdot 10^{-76}}{32 \cdot (8{,}86)^2 \cdot 10^{-24} \cdot (6{,}62)^2 \cdot 10^{-68}} \text{ J}$$

$$= -5{,}45 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \underline{-3{,}4 \text{ eV}}.$$

363. Bestimmen Sie die Wellenlänge des Lichtquants, das beim Übergang des Wasserstoff-Elektrons von der vierten auf die zweite Quantenbahn emittiert wird.

Lösung

Für die Energie, die beim Quantensprung von der vierten auf die zweite Bahn frei wird, gilt

$$h\nu = W_4 - W_2 = -\frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 4^2 h^2} + \frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 2^2 h^2} = -W_2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4} W_2.$$

In Beispiel 362 fanden wir für $W_2 = -5{,}45 \cdot 10^{-19}$ J. Damit wird

$$h\nu = 4{,}09 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J},$$

und

$$\nu = \frac{4{,}09 \cdot 10^{-19}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}}\ \mathrm{s^{-1}} = 6{,}178 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Für die Wellenlänge des emittierten Quants gilt

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{6{,}178 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}} = 0{,}485 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}485\ \mu\mathrm{m}.}$$

364. Wie groß ist die Wellenlänge des Lichtes, das beim Elektronensprung von der sechsten auf die zweite Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffs freigesetzt wird? Welche Wellenlänge gehört zur Seriengrenze der BALMER-Serie?

Lösung

Für die Wellenzahl des freigesetzten Lichtes gilt

$$\bar{\nu} = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) = \frac{2}{9} R_\mathrm{H} = 1{,}097373 \cdot 10^7 \cdot 0{,}2222\ \mathrm{m^{-1}} =$$
$$= 2{,}438363 \cdot 10^6\ \mathrm{m^{-1}}.$$

Demnach erhalten wir für die Wellenlänge die Angabe

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\nu}} = 0{,}410 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}410\ \mu\mathrm{m}.}$$

Die zur Seriengrenze der BALMER-Serie gehörige Wellenzahl ist

$$\bar{\nu}_\infty = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{2^2}\right) = \frac{R_\mathrm{H}}{4}.$$

Die zur Seriengrenze der BALMER-Serie gehörige Wellenlänge ist daher

$$\lambda_\infty = \frac{1}{\bar{\nu}_\infty} = \frac{4}{R_\mathrm{H}} = 0{,}364 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}364\ \mu\mathrm{m}.}$$

365. Wie groß ist, entsprechend der BOHRschen Atomtheorie, das magnetische Bahnmoment des Elektrons im Wasserstoffatom, das sich im Grundzustand befindet?

Lösung

Das magnetische Moment einer Stromschleife mit dem Flächeninhalt A, durch die ein Strom der Stärke I fließt, hat den Wert

$$m = \mu_0 I A$$

(μ_0 magnetische Feldkonstante).
Das Elektron durchläuft die Bahn, die dem Grundzustand entspricht, x-mal, also ist der Strom $I = xe$. Da der Radius dieser Bahn r_1 ist, wird die umlaufene Fläche $A = \pi r_1^2$, so daß für das magnetische Bahnmoment folgt:

$$m = \mu_0 x e \pi r_1^2 = \mu_0 \frac{v_1}{2\pi r_1} e \pi r_1^2 = \mu_0 \frac{v_1 r_1 e}{2} .$$

Da entsprechend Beispiel 360

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}$$

ist (m_0 Ruhmasse des Elektrons, ε_0 elektrische Feldkonstante), gilt

$$m = \frac{1}{2} \mu_0 e \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{he}{m_0} = \underline{1{,}165 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{Vsm}.}$$

366. Bestimmen Sie die höchstmögliche Anzahl von Elektronen, die auf Grund des PAULI-Prinzips in einem Atom gleichzeitig den n-ten Quantenzustand einnehmen können, für den Fall, daß $n = 4$ ist.

Lösung

Da die einzelnen Quantenzahlen der Bedingung folgen, daß für ein bestimmtes n

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(l - 1), \pm l,$$

$$s = \pm \frac{1}{2}$$

sein kann, folgt für

n	l	m	s	maximale Elektronenzahl	
	0	0		2	
4	1	−1, 0, +1,	$\pm \frac{1}{2}$	6	32
	2	−2, −1, 0, +1, +2,		10	
	3	−3, −2, −1, 0, +1, +2, +3		14	

Dabei haben wir auf Grund des PAULI-Prinzips vorausgesetzt, daß sich die Quadrupel aller vier Quantenzahlen, die den Zustand jedes einzelnen Elektrons charakterisieren, in jedem Einzelfall um mindestens eine Kenngröße unterscheiden muß.

A Aufgaben

485. Berechnen Sie die Umlaufgeschwindigkeit des Elektrons auf der dritten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell eines Wasserstoffatoms.
486. Wie groß ist die Umlaufperiode des Elektrons auf der dritten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffatoms?
487. Berechnen Sie die Wellenlängen der ersten drei Linien der BALMER-Serie des Wasserstoffspektrums ($R = 1{,}097373 \times \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$).
488. In einem Glaskolben eingeschlossener, verdünnter Quecksilberdampf wird mit Elektronen bestrahlt, deren kinetische Energie 4,88 eV beträgt. Wie groß ist die Wellenlänge der von den Quecksilberatomen emittierten Strahlung, wenn bei den Stoßprozessen die gesamte Energie der Elektronen auf die Quecksilberatome übertragen wird?
489. In welchem Verhältnis stehen magnetisches Moment und Bahndrehimpuls für ein Elektron des Wasserstoffs, das sich gemäß der BOHRschen Atomtheorie auf der n-ten Quantenbahn befindet?
490. Mit Hilfe des PAULI-Prinzips ist nachzuweisen, wieviel Elektronen maximal auf einer Elektronenschale der Hauptquantenzahl $n = 3$ enthalten sein können.

5.4. Physik des Atomkerns

Natürliche radioaktive Substanzen können drei Arten von Strahlung emittieren: α-, β- und γ-Strahlung.
Die **α-Strahlung** besteht aus einem Strom von Atomkernen des Elements Helium, **β-Strahlung** ist ein Strom von Elektronen, **γ-Strahlung** kann sowohl als eine elektromagnetische Strahlung sehr kurzer Wellenlänge sowie auch als ein Strom von Photonen sehr hoher Frequenz angesehen werden. Bei der Emission eines α- oder β-Teilchens verwandelt sich der radioaktive Kern eines Elements in den eines anderen Elements.
Im Prozeß der radioaktiven α-Umwandlung verschiebt sich ein Atomkern im **Proton-Neutron-Diagramm** (Abszisse: Protonenzahl = Ordnungszahl, Ordinate: Neutronenzahl) der Kerne um zwei Stellen nach links, seine Masse verringert sich um vier Kernmasseneinheiten.
Im Prozeß der radioaktiven β-Umwandlung verschiebt sich der betreffende Kern bei konstant bleibender Masse um eine Stelle nach rechts, zum Element nächsthöherer Ordnungszahl hin. Die Wegstrecke, die ein β-Teilchen bei seiner Bewegung in irgendeinem Medium zurücklegt, wird als die **Reichweite** der β-Strahlung bezeichnet.

Die radioaktive Umwandlung der instabilen Kerne verläuft selbständig und folgt dabei bestimmten Gesetzmäßigkeiten:
Von einer radioaktiven Substanz, die zur Zeit t noch eine Anzahl n nichtzerfallener Kerne enthält, verwandeln sich während des Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ genau $\mathrm{d}n$ Kerne gemäß der Beziehung

$$\mathrm{d}n = -\lambda n \, \mathrm{d}t,$$

wobei λ die **Zerfallskonstante** der betreffenden Kernart bedeutet. Der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n$$

bezeichnet die Geschwindigkeit, mit welcher der Zerfall des betreffenden radioaktiven Stoffes verläuft.
Die Zeitabhängigkeit der Zahl noch nicht zerfallener Kerne einer radioaktiven Substanz wird durch die Exponentialbeziehung

$$n = n_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

ausgedrückt, in der n_0 die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ noch nicht umgewandelten Kerne bedeutet.
Als **Halbwertzeit** wird diejenige Zeitspanne bezeichnet, in der die Hälfte einer anfänglich vorhanden gewesenen Zahl von Kernen ihre radioaktive Umwandlung vollzieht. Den Zusammenhang zwischen der Halbwertzeit $T_{1/2}$ und der Zerfallskonstanten λ einer radioaktiven Kernart bezeichnet die Beziehung

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Für die aufeinanderfolgenden Glieder einer radioaktiven **Zerfallsreihe** gilt, daß sie sich dann im radioaktiven Gleichgewicht befinden, wenn die Zerfallsgeschwindigkeit der Glieder der Reihe gleich groß ist.
In einem Gemisch von Kernen, das sich im Zustand des radioaktiven Gleichgewichts befindet, ist die Zahl der vorhandenen Kerne proportional zu ihren jeweiligen Halbwertzeiten, also

$$n_1 : n_2 : n_3 : \ldots = T_{1/2\,1} : T_{1/2\,2} : T_{1/2\,3} : \ldots$$

Die **Kernladungszahl** Z eines Elements bestimmt die elektrische Ladung des Atomkerns und ist gleichbedeutend mit der Ordnungszahl des betreffenden Elements im Periodensystem von MENDELEJEW. Die **Kernmassenzahl** A gibt die Masse eines Kernes, ausgedrückt in ganzzahligen Kernmasseneinheiten, an. Kerne mit gleicher Kernladungszahl, aber unterschiedlicher Massenzahl, werden **Isotope** genannt.

Der Kern eines Elements mit der Ordnungszahl Z und der Kernmassenzahl A setzt sich aus Z Protonen und $A - Z$ Neutronen zusammen.
Als **künstliche Kernumwandlung** wird ein Prozeß bezeichnet, bei dem ein mit Elementarteilchen oder Photonen (Lichtquanten) beschossener Kern in einen anderen umgewandelt wird. Bei diesen Reaktionen können Veränderungen des Energieinhalts oder der Ruhmasse eines Kerns auftreten. Unter **Massendefekt** versteht man den Verlust an Masse, den die Summe der Ruhmassen aller am Kernaufbau beteiligten Elementarteilchen erleidet: die Summe der Ruhmassen der einzelnen Teilchen ist größer als die der gleichen Teilchen, wenn sie zu einem Kern vereinigt sind. Der im Verlauf einer Kernreaktion frei werdende Energiebetrag ΔE hängt mit dem im Laufe dieser Reaktion auftretenden Massendefekt zusammen, was durch die Gleichung

$$\Delta E = \Delta m c^2 \tag{1}$$

ausgedrückt wird (c die Vakuumlichtgeschwindigkeit).
Dem Massendefekt um eine Kernmasseneinheit (Masse eines Nukleons) entspricht eine Energiedifferenz der Größe $\Delta E = 931{,}8$ MeV.
Aus genauen Messungen ergibt sich, daß die Masse eines Atomkerns stets kleiner ist als die Summe der Massen der isolierten Protonen und Neutronen, aus denen der Kern sich zusammensetzt. Diese Massendifferenz ermöglicht die Berechnung der Kernbindungsenergie E_B entsprechend der Beziehung

$$E_B = \Delta m c^2.$$

B Beispiele

367. Der Kern Uran $^{238}_{92}\mathrm{U}$ erleidet nacheinander vier α- und zwei β-Umwandlungen, wobei er sich in den Kern eines anderen Elements umwandelt. Bestimmen Sie die nach den Umwandlungen resultierende Kernart.

Lösung

Wir können die Umwandlung schematisch darstellen:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow 4\,^{4}_{2}\mathrm{He} + 2\,^{0}_{-1}\mathrm{e} + ^{a}_{b}X.$$

Da die Gesetze von der Erhaltung der Massenzahl und der elektrischen Ladung gelten, müssen für die Bestimmungsgrößen a und b die Gleichungen

$$a + 0 + 16 = 238,$$
$$b - 2 + 8 = 92$$

und das ergibt

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2W_k}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2mW_k}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}} =$$

$$= 1{,}22 \cdot 10^{-12}\,\text{m} = \underline{12{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{Å}.}$$

Hierbei wurde mit der Ruhmasse des Elektrons gerechnet.

353. Ein Röntgenlichtquant, dem eine Wellenlänge $\lambda = 1$ Å zukommt, tritt in Wechselwirkung mit dem schwach gebundenen Elektron eines Atoms niederer Ordnungszahl und erleidet dabei eine Richtungsabweichung um den Winkel $\vartheta = 90°$. Berechnen Sie, welchen Energiebetrag das Elektron bei diesem Prozeß aufnimmt und in welcher Richtung es sich danach bewegen wird.

Lösung

Ein schwach gebundenes Elektron können wir als frei betrachten. Bei der Wechselwirkung des Photons mit dem Elektron geht ein Teil der Energie des Photons an das Elektron über, so daß das Photon mit verminderter Energie und (im allgemeinen) veränderter Richtung seinen Weg fortsetzt. Wir bezeichnen die Energie des Photons vor dem Prozeß der Wechselwirkung mit $W = h\nu$ und nach dem Prozeß mit $W' = h\nu'$. Dann gilt die Beziehung

$$h\nu' < h\nu$$

bzw.

$$\nu' < \nu.$$

Wir drücken die Frequenz gemäß der Beziehung $\nu = c/\lambda$ durch die Wellenlänge aus und finden

$$\lambda' > \lambda.$$

Demnach ist die Wellenlänge des aus der ursprünglichen Richtung abgelenkten Photons größer als die, die es vor der Wechselwirkung hatte. Aus der Theorie des COMPTON-Effekts ergibt sich die mit der Wechselwirkung verbundene Wellenlängenänderung zu

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tag{1}$$

mit der *Compton*-Wellenlänge

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 2{,}426 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$$

(m_0 Ruhmasse des Elektrons).

Wenn wir diese Art der Wechselwirkung von Photon und Elektron unter dem Gesichtspunkt des elastischen mechanischen Stoßes behandeln, dann nimmt das Elektron bei der Wechselwirkung die Energie

$$W_e = W - W' = h(\nu - \nu') = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

auf. Nach Umformung dieser Gleichung mit Hilfe von Gl. (1) erhalten wir für den vom Elektron aufgenommenen Energiebetrag die Aussage

$$W_e = \frac{hc}{\lambda} \frac{2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\lambda + 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt das

$$W_e = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-10}} \frac{2 \cdot 2{,}426 \cdot 10^{-12} \sin^2 45°}{10^{-10} + 2 \cdot 2{,}426 \cdot 10^{-12} \sin^2 45°} \text{ J} =$$

$$= 4{,}8 \cdot 10^{-17} \text{ J} \approx \underline{300 \text{ eV}}.$$

Den Winkel φ, der angibt, wie weit das Elektron in seiner Bewegung gegenüber der ursprünglichen Bewegungsrichtung des Photons abweicht, können wir unter Hinzuziehung des Impulserhaltungssatzes bestimmen. Wir wenden diesen Satz auf das System Photon – Elektron an, indem wir den Impuls des von links einfallenden Photons mit p, den des abgelenkten Photons mit p' und den des Elektrons mit $p_e = mv$ bezeichnen. Dann gilt der Impulserhaltungssatz in der Form

$$p' + p_e = p.$$

In Bild 198 ist das Vektordiagramm der hierbei beteiligten Impulse dargestellt.
Der Impuls des Photons vor und nach der Wechselwirkung kann durch seine Absolutbeträge

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{und} \quad p' = \frac{h}{\lambda'}$$

dargestellt werden. Da der Impuls des Elektrons $p_e = mv$ ist, können wir auf das Impulsdreieck in Bild 198 den Sinussatz anwenden:

$$\frac{\sin [2\,\mathrm{R} - (\varphi + \vartheta)]}{\sin \varphi} = \frac{\frac{h}{\lambda}}{\frac{h}{\lambda'}},$$

$$\frac{\sin (\varphi + \vartheta)}{\sin \varphi} = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Bild 198

Mit Hilfe des Additionstheorems für $\sin (\varphi + \vartheta)$ ergibt sich

$$\cot \varphi = \frac{\lambda' - \lambda \cos \vartheta}{\lambda \sin \vartheta}.$$

Wir berücksichtigen ferner, daß $1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \vartheta/2$ und $\sin \vartheta = 2 \sin \vartheta/2 \cos \vartheta/2$ ist, und wenden diese Winkelbeziehungen auf Gl. (1) an. Dann erhalten wir nach Umformung

$$\cot \varphi = \frac{\tan \frac{\vartheta}{2} (\lambda + \lambda_C)}{\lambda}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen finden wir den Winkel

$$\underline{\varphi = 45°41'}.$$

354. Welche Wellenlänge muß ein Photon haben, das ein Zäsiumatom ionisieren soll, wenn das Ionisationspotential des Cs-Atoms mit $U_i = 3{,}88$ V angegeben ist?

Lösung

Für die Ionisierung des Cs-Atoms muß die Arbeit

$$W = eU_i = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{As} \cdot 3{,}88\ \text{V} = 6{,}216 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

verrichtet werden.
Ein Photon, das diese Ionisation bewirken soll, muß mindestens eine Energie haben, die der vorgenannten Arbeit entspricht. Deshalb muß gelten

$$h\nu = W.$$

Da $\lambda = \frac{c}{\nu}$ und $\frac{hc}{\lambda} = W$ ist, wird

$$\lambda = \frac{hc}{W} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{6{,}216 \cdot 10^{-19}}\ \text{m} = 3{,}196 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = \underline{3196\ \text{Å}}.$$

355. Ein Elektron hat die Ruhmasse $m_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg. Wie groß ist die dieser Masse entsprechende Ruhenergie des Elektrons?

Lösung

Der Zusammenhang zwischen Masse und Energie wird durch die EINSTEINsche Beziehung ausgedrückt:

$$E = mc^2.$$

Nach Einsetzen der Werte für die Größen erhalten wir

$$E_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2} = 8{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{J}.$$

Da 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J ist, wird die Ruhenergie des Elektrons

$$E_0 = 5{,}12 \cdot 10^{5}\ \text{eV} = \underline{0{,}51\ \text{MeV}}.$$

356. Bestimmen Sie die Energie, den Impuls sowie die relativistische Masse eines Röntgenlichtquants der Wellenlänge $\lambda = 1$ Å.

Lösung

Für die Energie des Photons können wir schreiben

$$W = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{10^{-10}}\ \text{J} = 1{,}987 \cdot 10^{-15}\ \text{J} = \underline{12{,}7\ \text{keV}}.$$

Für seinen Impuls gilt

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34}}{10^{-10}} \text{ kgm s}^{-1} = \underline{6{,}624 \cdot 10^{-24} \text{ kgm s}^{-1}}.$$

Die relativistische Masse des Photons bestimmen wir gemäß der Beziehung $E = mc^2$, die den Zusammenhang zwischen Energieeinheit und Masse beliebiger Objekte ausdrückt. Da im vorliegenden Fall $W = h\nu = hc/\lambda$ ist, gilt

$$mc^2 = h\frac{c}{\lambda},$$

so daß wir für die relativistische Masse des Photons den Ausdruck finden:

$$m = \frac{h}{\lambda c} = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34}}{10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ kg} \approx \underline{2{,}21 \cdot 10^{-32} \text{ kg}}.$$

357. Energie und Impuls eines Lichtquants betrachten wir zunächst bezogen auf ein Inertialsystem S und danach bezogen auf ein zweites Inertialsystem S', das sich gegenüber dem erstgenannten mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Es ist die Differenz zu bestimmen, durch die sich die beiden Wertepaare unterscheiden, die einmal in bezug auf S und zum anderen in bezug auf S' gelten.

Lösung

Wenn wir die Größe der Energie, des Impulses und der Frequenz des Photons bezüglich S mit den Symbolen W, p und ν, bezüglich des Systems S' aber mit W', p' und ν' bezeichnen, können wir schreiben

$$W = h\nu; \quad p = \frac{h\nu}{c};$$

$$W' = h\nu'; \quad p' = \frac{h\nu'}{c}.$$

Diese Größen werden sich demnach durch die folgenden Differenzen unterscheiden:

$$\Delta W = W - W' = h(\nu - \nu'), \quad \Delta p = p - p' = \frac{h}{c}(\nu - \nu').$$

Der Zusammenhang zwischen den Frequenzen ν und ν' ist entsprechend dem Doppler-Prinzip durch die Beziehungen

$$\nu' = \nu - \frac{v}{\lambda} = \nu - \frac{v\nu}{c}$$

und

$$\nu - \nu' = \nu\frac{v}{c}$$

gegeben. Damit erhalten wir

$$\Delta E = h(\nu - \nu') = h\nu \frac{v}{c} = E \frac{v}{c},$$

$$\Delta p = \frac{h}{c}(\nu - \nu') = \frac{h\nu}{c} \frac{v}{c} = p \frac{v}{c}.$$

358. Ein Elektron bzw. ein Proton bewege sich durch eine optisch durchsichtige Substanz mit der relativen Brechzahl $n = 1{,}6$. Wie groß muß die kinetische Energie jedes der beiden Elementarteilchen sein, damit es Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden kann?

Lösung

Elementarteilchen, die Träger elektrischer Ladung sind, können dann zur Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden, wenn ihre Geschwindigkeit in einem bestimmten Medium größer ist als die Phasengeschwindigkeit des Lichtes in eben diesem Medium. In einem Medium mit der Brechzahl n ist die Phasengeschwindigkeit c' des Lichtes durch die Beziehung $c' = c/n$ gegeben, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet. Es gibt demnach für Elementarteilchen, die Träger einer elektrischen Ladung sind, eine Grenzgeschwindigkeit v, die dadurch charakterisiert ist, daß die Teilchen Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung werden, sobald sie sich in einem Medium mit einer Geschwindigkeit bewegen, die größer als v ist. Es gilt also

$$v = c' = \frac{c}{n}.$$

Die kinetische Energie des Teilchens hat bei dieser Geschwindigkeit den Wert

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).$$

a) Für das Elektron ergibt das

$$W_k = 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 - 1}} - 1 \right) \text{J} = 2{,}295 \cdot 10^{-14}\ \text{J} \approx \underline{143\ \text{keV}}.$$

Demnach wird im angegebenen Medium jedes Elektron zu einer Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung, dessen Inhalt an kinetischer Energie größer oder mindestens gleich 143 keV ist.

b) Für das Proton gilt

$$W_k = 1{,}6722 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 - 1}} - 1 \right) \text{J} =$$

$$= 4{,}21 \cdot 10^{-11}\ \text{J} \approx \underline{263\ \text{MeV}}.$$

Demnach wird im angegebenen Medium jedes Proton zur Quelle von TSCHERENKOW-Strahlung, dessen kinetische Energie gleich oder größer als 263 MeV ist.

359. In einem durch das Laboratorium definierten Bezugssystem haben π-Mesonen eine kinetische Energie $W_k = 7\, m_0 v^2$, wobei m_0 die Ruhmasse eines π-Mesons ist. In diesem Zustand beträgt ihre mittlere Lebensdauer $\tau = 1{,}76 \cdot 10^{-5}$ s. Ermitteln Sie hieraus die Ruhlebensdauer dieser Mesonen.

Lösung

Die Mesonen bewegen sich mit hoher Geschwindigkeit gegenüber dem Labor-Bezugssystem. Es tritt deshalb eine relativistische Zeitdehnung auf; die Mesonen existieren gegenüber dem Bezugssystem, in dem sie sich bewegen, länger als in dem, in welchem sie ruhen, d. h. relativ zu dem sie sich in Ruhe befinden. Deshalb verstehen wir unter dem Begriff Ruhlebensdauer ihre Lebensdauer in dem System, relativ zu welchem sie ruhen. Zwischen Ruhlebensdauer τ_0 und der gemessenen Lebensdauer τ besteht der Zusammenhang

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Da für die kinetische Energie

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

gilt, können wir schreiben

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{W_k + m_0 c^2},$$

woraus folgt

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\tau}{\frac{W_k + m_0 c^2}{m_0 c^2}} = \frac{\tau}{\frac{W_k}{m_0 c^2} + 1} =$$

$$= \frac{1{,}76 \cdot 10^{-5}}{7 + 1}\,\text{s} = \underline{2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{s}}.$$

A **Aufgaben**

466. Ein Staubteilchen der Masse $m = 10^{11-}$ g befindet sich zwischen den horizontal liegenden Platten eines Plattenkondensators, deren Abstand 0,5 cm beträgt und zwischen denen eine Potentialdifferenz $\Delta\varphi = 76{,}5$ V liegt, so im Schwebezustand, daß Gravitation und elektrische Kraft im Gleichgewicht sind. Wieviel Elementarladungen trägt das Staubteilchen?

467. Ein Elektron durchläuft, beginnend aus der Ruhelage, in einem elektrostatischen

Feld eine Potentialdifferenz der Größe $\Delta\varphi = 100$ V. Welche Endgeschwindigkeit erreicht es, wenn wir eine relativistische Massenveränderung vernachlässigen?

468. Ein Elektron mit der kinetischen Energie $W_k = 5$ keV tritt in ein zu seiner Geschwindigkeitsrichtung senkrecht stehendes, homogenes elektrostatisches Feld mit der Feldstärke vom Betrag $E = 10^3$ V cm^{-1} ein. Wie groß wird seine Richtungsänderung beim Durchfliegen der Strecke $x_0 = 2$ cm?

469. Ein Elektron tritt mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 1500$ km s^{-1} in ein homogenes Magnetfeld ein, dessen Feldstärke $H = 20$ Oe senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung des Elektrons orientiert ist. Berechnen Sie den Radius der vom Elektron im Magnetfeld beschriebenen Kreisbahn.

470. Zwischen den Polen eines Zyklotrons, mit dem Deuteronen beschleunigt werden, besteht ein Magnetfeld mit der Induktion $B = 14000$ G. Berechnen Sie die Frequenz des elektrischen Feldes.

471. Bestimmen Sie Masse und kinetische Energie eines Elektrons, das sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}6\,c$ bewegt (c Vakuumlichtgeschwindigkeit).

472. Bestimmen Sie Masse und Geschwindigkeit eines Protons, dessen kinetische Energie mit 10^8 eV angegeben ist.

473. Ein frei fliegendes Elektron hat eine kinetische Energie von 1 MeV. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der es sich bewegt.

474. Aus einer Platinfläche, die mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 1500$ Å bestrahlt wird, treten Photoelektronen mit einer Geschwindigkeit $v = 827$ km s^{-1} aus. Berechnen Sie die Austrittsarbeit des Platins.

475. Bei der Streuung von Licht an Protonen wird eine maximale Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = 2{,}6 \cdot 10^{-5}$ Å gemessen Wie groß ist die Masse des Protons?

476. Ermitteln Sie die Wellenlänge der beim COMPTON-Effekt auftretenden Streustrahlung, wenn die Beobachtung senkrecht zum einfallenden Röntgenstrahlenbündel der Wellenlänge $\lambda = 0{,}5$ Å vorgenommen wird.

477. Lichtquanten mit der Wellenlänge $\lambda = 0{,}5$ Å treffen auf freie Elektronen. Berechnen Sie den Winkel der Bewegungsrichtung der dabei getroffenen Elektronen für den Fall, daß die Lichtquanten gegenüber ihrer ursprünglichen Richtung um einen Winkel $\vartheta = 30°$, 60°, 90° bzw. 180° abgelenkt werden.

478. Wie groß ist das Ionisationspotential von verdampften Natriumatomen, wenn die Ionisation bei Beleuchtung mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda = 0{,}242$ µm einsetzt?

479. Das Ionisationspotential eines Quecksilberatoms hat den Wert $V_i = 10{,}4$ V. Welche Minimalgeschwindigkeit müßte ein Elektron haben, das beim Zusammenstoß das Hg-Atom zu ionisieren vermag?

480. Welche kinetische Energie hat ein Proton, wenn die Wellenlänge der ihm zuzuordnenden DE-BROGLIE-Welle den Wert $\lambda = 9{,}04 \cdot 10^{-3}$ Å hat?

481. Bestimmen Sie Energie, Impuls und relativistische Masse eines Quants der γ-Strahlung, dessen Wellenlänge 0,01 Å beträgt.

482. Eine bestimmte Art von Elementarteilchen löst, wenn ihre kinetische Energie mehr als 38 MeV beträgt, in einem Medium mit der Brechzahl $n = 1{,}5$ TSCHERENKOW-Strahlung aus. Um welche Art Elementarteilchen handelt es sich?

483. In einer Röntgenröhre bewegen sich Elektronen mit einer Geschwindigkeit, die gleich der halben Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Berechnen Sie die Grenzwellenlänge der beim Aufprall auf die Anode freiwerdenden Röntgenbremsstrahlung.

484. Experimentell wurde festgestellt, daß π-Mesonen, deren Impuls im Bezugssystem des Laboratoriums den Wert $p = 54$ MeV c^{-1} hat, vom Ort ihrer Entstehung bis zum Ort ihres Zerfalls eine durchschnittliche Wegstrecke von $l = 3$ m zurücklegen. Bestimmen Sie die Ruhlebensdauer dieser Art Mesonen. Ihre Ruhmasse ist $m_{\pi 0} = 276\, m_0$, wobei m_0 die Ruhmasse des Elektrons angibt.

5.3. Physik der Elektronenhülle

Die **Bohrsche Theorie des Atomaufbaus**, das **Bohrsche Atommodell**, beruht auf drei BOHRschen Postulaten über die Bewegung der Elektronen um den Atomkern:

1. *Die Elektronen können den Atomkern nicht auf beliebigen Bahnen umlaufen, sondern nur auf bestimmten, sog.* **Quantenbahnen**, *die besondere Bedingungen erfüllen müssen. Für den Fall, daß wir uns auf Kreisbahnen beschränken, kann ein Elektron nur auf solchen Bahnen umlaufen, die der Bedingung genügen*:

$$2\pi mrv = nh$$

(m Masse des Elektrons, v seine Geschwindigkeit, r Bahnradius, h PLANCKsches Wirkungsquantum, n Hauptquantenzahl, die jeden beliebigen positiven, ganzzahligen Wert außer Null annehmen kann). Es ist ersichtlich, daß mrv gleich dem Bahndrehimpuls des Elektrons ist, bezogen auf die durch die Bahnmitte gehende, senkrecht auf der Elektronenbahn stehende Achse. Je nach dem von der Hauptquantenzahl n angenommenen Wert sprechen wir von höheren oder niedrigeren Quantenbahnen.

2. *Auf den angegebenen Quantenbahnen können Elektronen strahlungslos umlaufen.*

3. *Unterschiedliche Quantenbahnen entsprechen unterschiedlichen Energiezuständen. Beim Übergang von einer höheren auf eine niedriger gelegene Quantenbahn emittiert das Elektron ein elektromagnetisches Strahlungsquant, ein Lichtquant der Frequenz ν, wobei die Beziehung erfüllt ist*:

$$h\nu = W_2 - W_1 .$$

W_1 bzw. W_2 sind die Energien des Elektrons auf denjenigen Quantenbahnen, zwischen denen der Übergang erfolgte.

Ganz analog kann ein Elektron, wenn ihm eine genügend große Anregungsenergie zugeführt wird, den Übergang von einer niedrigeren auf eine höher gelegene Quantenbahn ausführen, wobei die Größe des Quantensprunges vom Maß der zugeführten Energie abhängig ist.

Die Wellenzahl $\bar{\nu}$ einer bestimmten Spektrallinie stellt den Kehrwert der zugehörigen Wellenlänge λ dar: $\bar{\nu} = {}^1/\lambda$. Für die Wellenzahl der Spektrallinien des Wasserstoffs gilt die Beziehung

$$\bar{\nu} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

($n_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ und $n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, R$ die RYDBERG-Zahl). Unter der Voraussetzung, daß die Masse des Atomkerns gegenüber der des Elektrons als unendlich groß angenommen wird, hat R den Wert $1{,}097373 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$.
Ein Satz von Spektrallinien, die einem bestimmten Wert n_1 zugehören, stellt eine **Serie** dar, für die $n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$ ist. Diejenige Wellenzahl, die bei einem Quantensprung entsteht, der bei $n_2 = \infty$ beginnt, entspricht einer Spektrallinie, die wir als *Seriengrenze* bezeichnen. Die Quantensprünge (Elektronenübergänge) der BALMER-*Serie* enden bei $n_1 = 2$.
Entsprechend der verallgemeinerten BOHRschen Atomtheorie wird der Zustand eines Elektrons in der Elektronenhülle durch vier Quantenzahlen bestimmt: die Hauptquantenzahl n, die Nebenquantenzahl l, die magnetische Quantenzahl m und die Spinquantenzahl s. Diese Quantenzahlen werden gemäß folgenden Festlegungen normiert:
1. Für einen bestimmten Wert der Hauptquantenzahl n kann die Nebenquantenzahl l folgende Werte annehmen:

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

2. Für einen bestimmten Wert der Nebenquantenzahl l kann die magnetische Quantenzahl m folgende Werte annehmen:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(l - 1), \pm l.$$

3. Die Spinquantenzahl kann nur die beiden Werte $s = \pm\ {}^1/_2$ annehmen.
Gemäß dem PAULIschen Ausschließungsprinzip kann ein Atom niemals zwei Elektronen enthalten, die in allen ihren durch die vier Quantenzahlen bestimmten Eigenschaften übereinstimmen.

B **Beispiele**

360. Berechnen Sie den Radius der kernnächsten Bahn eines Elektrons, das gemäß der BOHRschen Atomtheorie um den Kern eines Wasserstoffatoms umläuft. Berechnen Sie auch die Geschwindigkeit des Elektrons auf dieser Bahn.

Lösung

Im BOHRschen Atommodell bewegt sich das Elektron um den Atomkern unter dem Einfluß von COULOMB-Kraft und Fliehkraft, so daß die folgende Beziehung gilt:

$$m_0 \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Gemäß dem BOHRschen Postulat muß weiter gelten

$$2\pi r m_0 v = nh,$$

wobei $n = 1, 2, 3, \cdots$ die Hauptquantenzahl und h das PLANCKsche Wirkungsquantum bedeutet. Für den Radius der n-ten Bahn ergibt sich aus den angeführten Gleichungen

$$r = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} n^2.$$

Für den Radius der ersten Bahn ($n = 1$) finden wir

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (6{,}62)^2 \cdot 10^{-68}}{3{,}14 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}} \text{ m} \approx 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ m} =$$
$$= \underline{0{,}53 \text{ Å}}.$$

Für die Geschwindigkeit v des Elektrons entnehmen wir aus den angeführten Gleichungen

$$v = \frac{nh}{2\pi r m_0} = \frac{nh}{2\pi m_0 \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} n^2} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}.$$

Für die Bahn mit $n = 1$ wird

$$v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{(1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34}} \text{ m s}^{-1} = \underline{2{,}188 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}}.$$

361. Mit welcher Kraft ziehen sich gemäß dem BOHRschen Atommodell Kern und Elektron eines Wasserstoffatoms an, wenn das Elektron sich auf der ersten Bahn befindet? Berechnen Sie, wievielmal so groß diese Kraft ist als die zwischen beiden Teilchen wirkende Massenanziehung.

Lösung

Für die Kraft der COULOMB-Anziehung gilt

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_1^2},$$

wobei $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m den Radius der ersten Quantenbahn bedeutet. Mit ihm wird

$$F_1 = \frac{(1{,}602)^2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}53)^2 \cdot 10^{-20}} \text{ N} = \underline{0{,}0821 \cdot 10^{-6} \text{ N}}.$$

Die Gravitationskraft, mit der Proton und Elektron in der gleichen Entfernung aufeinander wirken, ergibt sich zu

$$F_1' = \gamma \frac{m_0 m_p}{r_1^2} = \gamma \frac{1840 m_0^2}{r_1^2} = 6{,}685 \cdot 10^{-11} \frac{1840 \cdot (9{,}109)^2 \cdot 10^{-62}}{(0{,}53)^2 \cdot 10^{-20}} \text{ N} =$$

$$= 3{,}63 \cdot 10^{-47} \text{ N}.$$

$$\frac{F_1}{F_1'} = \frac{8{,}21 \cdot 10^{-8}}{3{,}63 \cdot 10^{-47}} = \underline{2{,}26 \cdot 10^{39}}.$$

Demnach ist die COULOMB-Kraft $2{,}26 \cdot 10^{39}$mal so groß wie die hier wirkende Massenanziehung.

362. Berechnen Sie die Gesamtenergie eines Elektrons, das sich auf der zweiten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffatoms bewegt.

Lösung

Die Gesamtenergie des Elektrons setzt sich aus den Anteilen der potentiellen und der kinetischen Energie zusammen. Wenn wir den Radius der n-ten Quantenbahn mit dem Symbol r_n kennzeichnen, können wir für die potentielle Energie des Elektrons auf dieser Quantenbahn – bezogen auf Unendlich, d. h. in unendlicher Entfernung; denn im Zustand der Abgelöstheit, der Ionisation, ist die potentielle Energie des Elektrons gleich Null – schreiben

$$W_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\infty}^{r_n} \frac{e^2}{r^2} \, dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{e^2}{r}\right]_{\infty}^{r_n} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Für die kinetische Energie erhalten wir unter Hinzuziehung der Gleichung

$$m_0 \frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}$$

$$W_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Damit beträgt die Gesamtenergie des Elektrons

$$W = W_p + W_k = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Da $r_n = \dfrac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_0 e^2}$ ist, wird

$$W = -\frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2}.$$

Für den Fall $n = 2$ erhalten wir

$$W_2 = -\frac{m_0 e^4}{32\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}602)^4 \cdot 10^{-76}}{32 \cdot (8{,}86)^2 \cdot 10^{-24} \cdot (6{,}62)^2 \cdot 10^{-68}} \text{ J}$$

$$= -5{,}45 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \underline{-3{,}4 \text{ eV}}.$$

363. Bestimmen Sie die Wellenlänge des Lichtquants, das beim Übergang des Wasserstoff-Elektrons von der vierten auf die zweite Quantenbahn emittiert wird.

Lösung

Für die Energie, die beim Quantensprung von der vierten auf die zweite Bahn frei wird, gilt

$$h\nu = W_4 - W_2 = -\frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 4^2 h^2} + \frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 2^2 h^2} = -W_2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4} W_2 .$$

In Beispiel 362 fanden wir für $W_2 = -5{,}45 \cdot 10^{-19}$ J. Damit wird

$$h\nu = 4{,}09 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J},$$

und

$$\nu = \frac{4{,}09 \cdot 10^{-19}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}}\ \mathrm{s}^{-1} = 6{,}178 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Für die Wellenlänge des emittierten Quants gilt

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s}^{-1}}{6{,}178 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}} = 0{,}485 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}485\ \mu\mathrm{m}.}$$

364. Wie groß ist die Wellenlänge des Lichtes, das beim Elektronensprung von der sechsten auf die zweite Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffs freigesetzt wird? Welche Wellenlänge gehört zur Seriengrenze der BALMER-Serie?

Lösung

Für die Wellenzahl des freigesetzten Lichtes gilt

$$\bar{\nu} = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) = \frac{2}{9} R_\mathrm{H} = 1{,}097373 \cdot 10^7 \cdot 0{,}2222\ \mathrm{m}^{-1} =$$
$$= 2{,}438363 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Demnach erhalten wir für die Wellenlänge die Angabe

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\nu}} = 0{,}410 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}410\ \mu\mathrm{m}.}$$

Die zur Seriengrenze der BALMER-Serie gehörige Wellenzahl ist

$$\bar{\nu}_\infty = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{2^2}\right) = \frac{R_\mathrm{H}}{4}.$$

Die zur Seriengrenze der BALMER-Serie gehörige Wellenlänge ist daher

$$\lambda_\infty = \frac{1}{\bar{\nu}_\infty} = \frac{4}{R_\mathrm{H}} = 0{,}364 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = \underline{0{,}364\ \mu\mathrm{m}.}$$

365. Wie groß ist, entsprechend der BOHRschen Atomtheorie, das magnetische Bahnmoment des Elektrons im Wasserstoffatom, das sich im Grundzustand befindet?

Lösung

Das magnetische Moment einer Stromschleife mit dem Flächeninhalt A, durch die ein Strom der Stärke I fließt, hat den Wert

$$m = \mu_0 I A$$

(μ_0 magnetische Feldkonstante).
Das Elektron durchläuft die Bahn, die dem Grundzustand entspricht, x-mal, also ist der Strom $I = xe$. Da der Radius dieser Bahn r_1 ist, wird die umlaufene Fläche $A = \pi r_1^2$, so daß für das magnetische Bahnmoment folgt:

$$m = \mu_0 x e \pi r_1^2 = \mu_0 \frac{v_1}{2\pi r_1} e \pi r_1^2 = \mu_0 \frac{v_1 r_1 e}{2}.$$

Da entsprechend Beispiel 360

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}$$

ist (m_0 Ruhmasse des Elektrons, ε_0 elektrische Feldkonstante), gilt

$$m = \frac{1}{2} \mu_0 e \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{he}{m_0} = \underline{1{,}165 \cdot 10^{-29}\ \text{Vsm.}}$$

366. Bestimmen Sie die höchstmögliche Anzahl von Elektronen, die auf Grund des PAULI-Prinzips in einem Atom gleichzeitig den n-ten Quantenzustand einnehmen können, für den Fall, daß $n = 4$ ist.

Lösung

Da die einzelnen Quantenzahlen der Bedingung folgen, daß für ein bestimmtes n

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(l-1), \pm l,$$

$$s = \pm \frac{1}{2}$$

sein kann, folgt für

n	l	m	s	maximale Elektronenzahl	
	0	0		2	
4	1	−1, 0, +1,	$\pm \frac{1}{2}$	6	32
	2	−2, −1, 0, +1, +2,		10	
	3	−3, −2, −1, 0, +1, +2, +3		14	

Dabei haben wir auf Grund des PAULI-Prinzips vorausgesetzt, daß sich die Quadrupel aller vier Quantenzahlen, die den Zustand jedes einzelnen Elektrons charakterisieren, in jedem Einzelfall um mindestens eine Kenngröße unterscheiden muß.

A Aufgaben

485. Berechnen Sie die Umlaufgeschwindigkeit des Elektrons auf der dritten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell eines Wasserstoffatoms.
486. Wie groß ist die Umlaufperiode des Elektrons auf der dritten Quantenbahn im BOHRschen Atommodell des Wasserstoffatoms?
487. Berechnen Sie die Wellenlängen der ersten drei Linien der BALMER-Serie des Wasserstoffspektrums ($R = 1{,}097373 \times \times 10^7 \text{ m}^{-1}$).
488. In einem Glaskolben eingeschlossener, verdünnter Quecksilberdampf wird mit Elektronen bestrahlt, deren kinetische Energie 4,88 eV beträgt. Wie groß ist die Wellenlänge der von den Quecksilberatomen emittierten Strahlung, wenn bei den Stoßprozessen die gesamte Energie der Elektronen auf die Quecksilberatome übertragen wird?
489. In welchem Verhältnis stehen magnetisches Moment und Bahndrehimpuls für ein Elektron des Wasserstoffs, das sich gemäß der BOHRschen Atomtheorie auf der n-ten Quantenbahn befindet?
490. Mit Hilfe des PAULI-Prinzips ist nachzuweisen, wieviel Elektronen maximal auf einer Elektronenschale der Hauptquantenzahl $n = 3$ enthalten sein können.

5.4. Physik des Atomkerns

Natürliche radioaktive Substanzen können drei Arten von Strahlung emittieren: α-, β- und γ-Strahlung.
Die **α-Strahlung** besteht aus einem Strom von Atomkernen des Elements Helium, **β-Strahlung** ist ein Strom von Elektronen, **γ-Strahlung** kann sowohl als eine elektromagnetische Strahlung sehr kurzer Wellenlänge sowie auch als ein Strom von Photonen sehr hoher Frequenz angesehen werden. Bei der Emission eines α- oder β-Teilchens verwandelt sich der radioaktive Kern eines Elements in den eines anderen Elements.
Im Prozeß der radioaktiven α-Umwandlung verschiebt sich ein Atomkern im **Proton-Neutron-Diagramm** (Abszisse: Protonenzahl = Ordnungszahl, Ordinate: Neutronenzahl) der Kerne um zwei Stellen nach links, seine Masse verringert sich um vier Kernmasseneinheiten.
Im Prozeß der radioaktiven β-Umwandlung verschiebt sich der betreffende Kern bei konstant bleibender Masse um eine Stelle nach rechts, zum Element nächsthöherer Ordnungszahl hin. Die Wegstrecke, die ein β-Teilchen bei seiner Bewegung in irgendeinem Medium zurücklegt, wird als die **Reichweite** der β-Strahlung bezeichnet.

Die radioaktive Umwandlung der instabilen Kerne verläuft selbständig und folgt dabei bestimmten Gesetzmäßigkeiten:
Von einer radioaktiven Substanz, die zur Zeit t noch eine Anzahl n nichtzerfallener Kerne enthält, verwandeln sich während des Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ genau $\mathrm{d}n$ Kerne gemäß der Beziehung

$$\mathrm{d}n = -\lambda n \,\mathrm{d}t,$$

wobei λ die **Zerfallskonstante** der betreffenden Kernart bedeutet. Der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n$$

bezeichnet die Geschwindigkeit, mit welcher der Zerfall des betreffenden radioaktiven Stoffes verläuft.
Die Zeitabhängigkeit der Zahl noch nicht zerfallener Kerne einer radioaktiven Substanz wird durch die Exponentialbeziehung

$$n = n_0 \,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

ausgedrückt, in der n_0 die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ noch nicht umgewandelten Kerne bedeutet.
Als **Halbwertzeit** wird diejenige Zeitspanne bezeichnet, in der die Hälfte einer anfänglich vorhanden gewesenen Zahl von Kernen ihre radioaktive Umwandlung vollzieht. Den Zusammenhang zwischen der Halbwertzeit $T_{1/2}$ und der Zerfallskonstanten λ einer radioaktiven Kernart bezeichnet die Beziehung

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Für die aufeinanderfolgenden Glieder einer radioaktiven **Zerfallsreihe** gilt, daß sie sich dann im radioaktiven Gleichgewicht befinden, wenn die Zerfallsgeschwindigkeit der Glieder der Reihe gleich groß ist.
In einem Gemisch von Kernen, das sich im Zustand des radioaktiven Gleichgewichts befindet, ist die Zahl der vorhandenen Kerne proportional zu ihren jeweiligen Halbwertzeiten, also

$$n_1 : n_2 : n_3 : \ldots = T_{1/2\,1} : T_{1/2\,2} : T_{1/2\,3} : \ldots$$

Die **Kernladungszahl** Z eines Elements bestimmt die elektrische Ladung des Atomkerns und ist gleichbedeutend mit der Ordnungszahl des betreffenden Elements im Periodensystem von MENDELEJEW. Die **Kernmassenzahl** A gibt die Masse eines Kernes, ausgedrückt in ganzzahligen Kernmasseneinheiten, an. Kerne mit gleicher Kernladungszahl, aber unterschiedlicher Massenzahl, werden **Isotope** genannt.

Der Kern eines Elements mit der Ordnungszahl Z und der Kernmassenzahl A setzt sich aus Z Protonen und $A - Z$ Neutronen zusammen.
Als **künstliche Kernumwandlung** wird ein Prozeß bezeichnet, bei dem ein mit Elementarteilchen oder Photonen (Lichtquanten) beschossener Kern in einen anderen umgewandelt wird. Bei diesen Reaktionen können Veränderungen des Energieinhalts oder der Ruhmasse eines Kerns auftreten. Unter **Massendefekt** versteht man den Verlust an Masse, den die Summe der Ruhmassen aller am Kernaufbau beteiligten Elementarteilchen erleidet: die Summe der Ruhmassen der einzelnen Teilchen ist größer als die der gleichen Teilchen, wenn sie zu einem Kern vereinigt sind. Der im Verlauf einer Kernreaktion frei werdende Energiebetrag ΔE hängt mit dem im Laufe dieser Reaktion auftretenden Massendefekt zusammen, was durch die Gleichung

$$\Delta E = \Delta mc^2 \tag{1}$$

ausgedrückt wird (c die Vakuumlichtgeschwindigkeit).
Dem Massendefekt um eine Kernmasseneinheit (Masse eines Nukleons) entspricht eine Energiedifferenz der Größe $\Delta E = 931{,}8$ MeV.
Aus genauen Messungen ergibt sich, daß die Masse eines Atomkerns stets kleiner ist als die Summe der Massen der isolierten Protonen und Neutronen, aus denen der Kern sich zusammensetzt. Diese Massendifferenz ermöglicht die Berechnung der Kernbindungsenergie E_B entsprechend der Beziehung

$$E_B = \Delta mc^2.$$

B Beispiele

367. Der Kern Uran $^{238}_{92}U$ erleidet nacheinander vier α- und zwei β-Umwandlungen, wobei er sich in den Kern eines anderen Elements umwandelt. Bestimmen Sie die nach den Umwandlungen resultierende Kernart.

Lösung

Wir können die Umwandlung schematisch darstellen:

$$^{238}_{92}U \rightarrow 4\,^{4}_{2}He + 2\,^{0}_{-1}e + ^{a}_{b}X.$$

Da die Gesetze von der Erhaltung der Massenzahl und der elektrischen Ladung gelten, müssen für die Bestimmungsgrößen a und b die Gleichungen

$$a + 0 + 16 = 238,$$
$$b - 2 + 8 \;\; = 92$$

erfüllt sein. Daraus ergibt sich

$$a = 222,$$
$$b = 86.$$

Durch diese Umwandlung entsteht also ein Kern $\underline{^{222}_{86}\mathrm{Rn}}$ des Elements Radon. Er enthält $Z = 86$ Protonen und $N = A - Z = 136$ Neutronen.

368. Durch den Beschuß der Kerne des stabilen Phosphorisotops $^{31}_{15}\mathrm{P}$ mit Deuteronen wird ein radioaktives Phosphorisotop $^{32}_{15}\mathrm{P}^*$ gebildet, dessen Halbwertzeit $T_{1/2} = 14{,}3$ Tage beträgt. Die Reaktion verläuft gemäß folgender Darstellung:

$$^{31}_{15}\mathrm{P} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{32}_{15}\mathrm{P}^* + {}^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

Berechnen Sie, welche Menge an radioaktiven Kernen des Phosphorisotops $^{32}_{15}\mathrm{P}^*$ zwölf Stunden nach Abbruch der Deuteronenbestrahlung noch vorhanden ist.

Lösung

Für den radioaktiven Zerfall des künstlich aktivierten Phosphorisotops $^{32}_{15}\mathrm{P}^*$ gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie für den der natürlichen radioaktiven Isotope. So verbleiben nach Ablauf der Zeitspanne t von einer ursprünglich vorhandenen Kernanzahl n_0 des radioaktiven Isotops noch n nichtzerfallene Kerne. Dabei ist die Bedingung

$$n = n_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

erfüllt. Da

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

ist, ergibt sich

$$\frac{n}{n_0} = \mathrm{e}^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir für die relative Anzahl noch nicht zerfallener radioaktiver Kerne

$$\frac{n}{n_0} = \mathrm{e}^{-\frac{12\,\mathrm{h}\cdot 0{,}693}{343{,}2\,\mathrm{h}}} = \underline{0{,}98.}$$

369. Eine radioaktive Substanz mit der Halbwertzeit $T_{1/2} = 3$ min liegt in einer Ausgangsmenge $m_0 = 50$ µg vor. Bestimmen Sie die Zeit, innerhalb der die Teilmenge $\Delta m = 10$ µg zerfällt.

Lösung

Nach Ablauf der Zeit t verbleiben von den ursprünglich vorhandenen n_0 Kernen noch

$$n = n_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{1}$$

nichtzerfallene Kerne

Da die Masse einer bestimmten Menge radioaktiver Substanz proportional zur Anzahl der in ihr enthaltenen Kerne ist, kann Gl. (1) auch in die Form

$$m = m_0 \, e^{-\lambda t} \tag{2}$$

gebracht werden (m_0 Masse der Ausgangsmenge, m Masse der nach Ablauf der Zeit t noch nicht zerfallenen Kerne). Da weiter

$$m = m_0 - \Delta m \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

ist, resultiert aus Gl. (2)

$$\frac{m_0 - \Delta m}{m_0} = e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}},$$

woraus wir nach einer Umformung erhalten

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\lg 2} \lg \frac{m_0 - \Delta m}{m_0}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt sich

$$t = -\frac{180 \text{ s}}{0{,}30103} \lg \frac{40}{50} = \underline{58 \text{ s.}}$$

370. Berechnen Sie, welche Anzahl von Kernen innerhalb einer Sekunde in einem Kilogramm Uran des Isotops $^{238}_{92}U$ zerfallen, wenn dessen Halbwertzeit mit $T_{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre gegeben ist.

Lösung

Zur Zeit t möge die angegebene Substanz noch n unzerfallene Kerne enthalten. Von diesen erleiden in einem Zeitintervall dt

$$dn = -n\lambda \, dt$$

und in der Zeiteinheit

$$Z = -\frac{dn}{dt} = n\lambda \tag{1}$$

ihren Zerfall.

Ein Kilomol Uran $^{238}_{92}U$ enthält $10^3 \, N_A = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ Atome. Da ein Kilogramm Uran $^1/_{238}$ Kilomol enthält, sind in einem Kilogramm Uran

$$n_0 = \frac{1000}{238} \, 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ Atome} \tag{2}$$

zur Zeit $t = 0$ enthalten. Innerhalb der Zeiteinheit zerfallen von ihnen gemäß Gl. (1)

$$Z = n_0 \lambda$$

Kerne. Wenn wir noch berücksichtigen, daß die Gleichung

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}$$

den Zusammenhang zwischen der Zerfallskonstanten λ und der Halbwertzeit $T_{1/2}$ angibt erhalten wir aus Gl. (2)

$$Z = \frac{1000}{238} 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{0{,}693}{1{,}4 \cdot 10^{17}} \text{ s}^{-1} = \underline{1{,}25 \cdot 10^{7} \text{ s}^{-1}}.$$

371. Berechnen Sie, welche Mengen Radium $^{226}_{88}\text{Ra}$ und Radon $^{222}_{86}\text{Rn}$ sich mit einem Gramm Uran $^{238}_{92}\text{U}$ im Gleichgewicht befinden. Die Halbwertzeiten der beteiligten Substanzen Uran, Radium und Radon sind jeweils $T_{1/2\,1} = 4{,}4 \cdot 10^9$ a, $T_{1/2\,2} = 1590$ a, $T_{1/2\,3} = 3{,}825$ d.

Lösung

Die Atomkerne $^{226}_{88}\text{Ra}$ und $^{222}_{86}\text{Rn}$ sind Glieder einer Zerfallsreihe, deren erstes Glied der Kern $^{238}_{92}\text{U}$ ist.
Die Elemente einer bestimmten Reihe radioaktiver Substanzen, einer ‚Zerfallsreihe', sind dann miteinander im Gleichgewicht, wenn die Zahl $\mathrm{d}n_i$ der im Zeitintervall zwischen t und $t + \mathrm{d}t$ zerfallenden Kerne für die Muttersubstanz und für die Elemente ihrer Zerfallsreihe gleich groß ist. Es gilt also die Bedingung

$$\mathrm{d}n_1 = \mathrm{d}n_2 = \ldots = \mathrm{d}n_k. \tag{1}$$

Wenn wir die Zahl der zur Zeit t noch intakten Kerne eines Elements mit dem Symbol n kennzeichnen, dann wird die Beziehung

$$\mathrm{d}n_i = -\lambda_i n_i \,\mathrm{d}t$$

erfüllt, und wir können Gl. (1) umschreiben in

$$\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2 = \ldots = \lambda_k n_k. \tag{2}$$

An Stelle der Zerfallskonstanten λ_i setzen wir entsprechend der Gleichung

$$\lambda_i = \frac{\ln 2}{T_{1/2\,i}}$$

die Halbwertzeiten $T_{1/2\,i}$ ein und erhalten die Bedingung für radioaktives Gleichgewicht

$$\frac{n_1}{T_{1/2\,1}} = \frac{n_2}{T_{1/2\,2}} = \ldots = \frac{n_k}{T_{1/2\,k}}.$$

In unserem Fall stehen n_1 Urankerne mit n_2 Radiumkernen und n_3 Radonkernen im radioaktiven Gleichgewicht und erfüllen deshalb die Beziehung

$$\frac{n_1}{T_{1/2\,1}} = \frac{n_2}{T_{1/2\,2}} = \frac{n_3}{T_{1/2\,3}}.$$

Daraus resultiert

$$n_2 = n_1 \frac{T_{1/2\,2}}{T_{1/2\,1}} \quad \text{und} \quad n_3 = n_1 \frac{T_{1/2\,3}}{T_{1/2\,1}}.$$

Für die n Kerne eines Elements, dessen Grammatom die Masse M hat, gilt, daß ihnen eine Masse

$$m = \frac{M}{N_A} n \text{ g} \tag{3}$$

zukommt. Wir berücksichtigen weiter, daß ein Gramm Uran $^{238}_{92}U$

$$n_1 = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{238} \text{ Atome}$$

enthält, und finden unter Verwendung der Gl. (3) eine Beziehung für die Radiummenge m_2 und die Radonmenge m_3, die sich mit einem Gramm der Muttersubstanz im radioaktiven Gleichgewicht befinden, zu

$$m_2 = \frac{M_2}{N_A} n_1 \frac{T_{1/2\,2}}{T_{1/2\,1}} \quad \text{und} \quad m_3 = \frac{M_3}{N_A} n_1 \frac{T_{1/2\,3}}{T_{1/2\,1}} .$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir schließlich

$$m_2 = \frac{226}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{238} \frac{1590}{4{,}4 \cdot 10^9} \text{ g} = \underline{3{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ g}},$$

$$m_3 = \frac{222}{238} \frac{3{,}825}{4{,}4 \cdot 10^9 \cdot 365} \text{ g} = \underline{2{,}2 \cdot 10^{-12} \text{ g}}.$$

372. Mit Hilfe von Zählrohrmessungen ist festgestellt worden, daß 1 g Radium in einer Sekunde $3{,}7 \cdot 10^{10}$ α-Teilchen emittiert. Bestimmen Sie den Wert der Avogadroschen Zahl unter Verwendung der weiteren Angaben, daß die Halbwertzeit des Radiums 1590 Jahre und seine relative Atommasse 226,05 beträgt.

Lösung

Wir gehen von der Zerfallsgleichung in der Differentialform

$$\mathrm{d}n = -\lambda n \, \mathrm{d}t$$

aus, die wir umformen in

$$\left| \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \right| = \lambda n .$$

Im vorstehenden Fall bedeutet der Bruch $\left| \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \right|$ die Zahl der in der Zeiteinheit in einem Gramm Radium stattfindenden Zerfallsakte. Dabei ist n die Zahl der in 1 g Ra enthaltenen Atome. Für die Avogadrosche Zahl N_A, d. h. für die im Grammatom Radium enthaltenen Atome, gilt dann

$$N_A = 226{,}05\, n = 226{,}05 \frac{1}{\lambda} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} =$$

$$= 226{,}05 \frac{1590 \cdot 365 \cdot 86400}{0{,}693} 3{,}7 \cdot 10^{10} = \underline{6{,}02 \cdot 10^{23}}.$$

Zu diesem Ergebnis gelangen wir unter der Voraussetzung, daß wir den Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante λ und Halbwertzeit $T_{1/2}$ entsprechend der Gleichung $\lambda = 0{,}693/T_{1/2}$ berücksichtigt haben.

373. Im Innern einer Kapsel, deren Wandmaterial für α-Strahlung völlig undurchlässig ist, befindet sich 1 g Radium. Berechnen Sie den Betrag der Gesamtenergie, die innerhalb einer Stunde im Innern der Kapsel freigesetzt wird, wenn wir voraussetzen, daß die Energie jedes bei den Zerfallsakten frei werdenden α-Teilchens den Wert $E_\alpha = 4{,}7$ MeV hat.

Lösung

Wir beschränken uns auf den durch die α-Strahlung transportierten Energieanteil. Bei der Emission des α-Teilchens erhält der emittierende Kern einen Rückstoß, wodurch er sich mit der Geschwindigkeit v_K in entgegengesetzter Richtung zum emittierten α-Teilchen bewegt. Entsprechend dem Satz von der Erhaltung des Impulses bleibt der Gesamtimpuls des Systems Kern + α-Teilchen konstant. Unter Beschränkung auf die Absolutbeträge können wir schreiben

$$m_K v_K = m_\alpha v_\alpha. \tag{1}$$

Nach der Emission ist die gesamte freigesetzte Energie gleich der Summe der Bewegungsenergie von Kern und emittiertem α-Teilchen, also

$$E = E_K + E_\alpha = \frac{1}{2} m_K v_K^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2.$$

Unter Einbeziehung der Gl. (1) erhalten wir für die Energie den Ausdruck

$$E = E_\alpha + \frac{1}{2} \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{m_K} = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_K}\right). \tag{2}$$

Das α-Teilchen ist ein Heliumkern ${}^4_2$He; durch seine Emission verringert sich die Kernmasse des emittierenden Kerns um vier Masseneinheiten. Wir berücksichtigen, daß die Massenzahl A des Kerns zu seiner Masse proportional ist, und finden demnach

$$\frac{m_\alpha}{m_K} = \frac{A_\alpha}{A_K}.$$

Diese Voraussetzung erlaubt uns, Gl. (2) in die Form

$$E = E_\alpha \left(1 + \frac{A_\alpha}{A_K}\right) = E_\alpha \left(1 + \frac{4}{A-4}\right) = \frac{A}{A-4} E_\alpha$$

zu bringen (A Massenzahl des radioaktiven Mutterkerns). Im Verlauf einer Stunde werden von einem Gramm Radium n α-Teilchen emittiert. Also ist die während dieser Zeit freigesetzte Gesamtenergie

$$E' = n \frac{A}{A-4} E_\alpha. \tag{3}$$

Die Zahl der in einem Gramm Radium während einer Stunde stattfindenden Zerfallsakte läßt sich leicht durch Vergleich mit der Lösung von Beispiel 370 ermitteln:

$$n = 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 3600\ \text{h}^{-1}.$$

Durch Einsetzen der gegebenen Größen in Gl. (3) finden wir

$$E' = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 3600\ \text{h}^{-1} \cdot 226}{222} \cdot 4{,}7 \cdot 10^{6}\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{eV}} \cdot 0{,}239\ \text{cal J}^{-1} =$$

$$= \underline{24{,}5\ \text{cal h}^{-1}}.$$

374. Berechnen Sie, welche Energiemenge bei der Reaktion

$$^{10}_{5}\text{B} + {}^{2}_{1}\text{D} \rightarrow {}^{11}_{5}\text{B} + {}^{1}_{1}\text{H}$$

frei wird, wenn die Kernmasse des Isotops $^{10}_{5}\text{B}$ mit 10,01618 und die des Isotops $^{11}_{5}\text{B}$ mit 11,01284 Kernmasseneinheiten angegeben wird.

Lösung

Wir gehen von der Summe der Ruhmassen der in die Reaktion eingehenden Teilchen aus. Danach ist

$$m_1 + m_2 = 10{,}01618\ \text{ME} + 2{,}01472\ \text{ME} = 12{,}03090\ \text{ME}.$$

Demgegenüber haben die aus der Reaktion hervorgehenden Teilchen die Ruhmassen

$$m_3 + m_4 = 11{,}01284\ \text{ME} + 1{,}00813\ \text{ME} = 12{,}02097\ \text{ME}.$$

Im Verlauf der Reaktion tritt ein Massendefekt auf von

$$\Delta m = 0{,}009930\ \text{ME}.$$

Es handelt sich hierbei ausschließlich um einen Massendefekt des Kerns, denn die Zahl der beteiligten Elektronen ändert sich im vorliegenden Fall nicht.
Bei der Reaktion wird ein Energiebetrag ΔE *frei*, die Reaktion ist *exotherm.* Mit dem Massendefekt hängt der freigesetzte Energiebetrag durch die Beziehung

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

zusammen. Der auftretende Massendefekt kann leicht in Masseneinheiten ausgedrückt werden, wenn wir berücksichtigen, daß die nukleare Masseneinheit 1 ME $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg ist. Damit wird

$$\Delta m = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \frac{\text{kg}}{\text{ME}} \cdot 0{,}00993\ \text{ME},$$

und für die freigesetzte Energie erhalten wir

$$\Delta E = 1{,}648\,39 \cdot 10^{-29}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 1{,}4843 \cdot 10^{-12}\ \text{J} = \underline{9{,}28\ \text{MeV}}.$$

375. Das Ergebnis der Kernreaktion

$$^{7}_{3}\text{Li} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\text{He},$$

bei der Lithium mit Protonen beschossen wird, die eine Energie von 600 keV haben, sind zwei α-Teilchen, die sich mit einer kinetischen Energie von 8,94 MeV bewegen. Bestimmen Sie aus den bekannten Kernmassen von Proton und α-Teilchen die Kernmasse des Isotops $^{7}_{3}\text{Li}$.

Lösung

Im Verlauf dieser Reaktion tritt ein Massendefekt Δm auf; er ist gleich der Differenz der Ruhmassen der in die Reaktion eintretenden und der aus ihr hervorgehenden Teilchen:

$$\Delta m = m_{Li} + m_H - 2m_{He},$$

woraus für die Masse eines Lithiumkerns resultiert

$$m_{Li} = \Delta m - m_H + 2m_{He}. \qquad (1)$$

Im Verlauf der exothermen Reaktion wird die Gesamtenergie

$$\Delta E = 2 \cdot 8{,}94 \text{ MeV} - 0{,}6 \text{ MeV} = 17{,}28 \text{ MeV}$$

frei. Der dieser Energiedifferenz entsprechende Massendefekt errechnet sich gemäß der EINSTEINschen Relation zu

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Wie oben in 5.4. erwähnt, entspricht dem Massendefekt von einer Kernmasseneinheit ME (= Nukleonenmasse) eine Energie von 931,8 MeV. Demzufolge gilt für den mit der Energiedifferenz $\Delta E = 17{,}28$ MeV verbundenen Massendefekt

$$\Delta m = \frac{17{,}28 \text{ MeV}}{931{,}8 \, \frac{\text{MeV}}{\text{ME}}} = 0{,}01854 \text{ ME}.$$

Für die Kernmasse des angegebenen Lithiumisotops finden wir also

$$m_{Li} = 0{,}01854 \text{ ME} - 1{,}00813 \text{ ME} + 8{,}00772 \text{ ME} = \underline{7{,}01813 \text{ ME}}.$$

376. Die Quanten der harten Gammastrahlung des Radiothors können bei der Wechselwirkung mit einem Deuteriumkern diesen zur Zerlegung in Proton und Neutron entsprechend der Reaktion

$$^2_1\text{D} + \gamma \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^1_0\text{n}$$

bringen. Bei der Zerlegung erhält das Proton die kinetische Energie $\Delta E_1 = 0{,}217$ MeV. Die Energie der einfallenden γ-Quanten beträgt $\Delta E_2 = 2{,}62$ MeV. Die Massen von Proton und Deuteron sind bekannt. Berechnen Sie die Masse des Neutrons.

Lösung

Im Verlauf dieser Reaktion tritt ein Massendefekt

$$\Delta m = m_D - (m_H + m_n)$$

auf, wobei m_D, m_H und m_n die Ruhmassen von Deuteron, Proton bzw. Neutron bedeuten. Zwischen ihnen besteht der Zusammenhang

$$m_n = m_D - m_H - \Delta m. \qquad (1)$$

Wir können voraussetzen, daß die Massen von Proton und Neutron nur unwesentlich voneinander abweichen. Deshalb werden die beiden Zerlegungsprodukte des Deuterons, Proton und Neutron, praktisch die gleiche Energie haben. Bei der Reaktion wird die

Energie

$$\Delta E = 2\Delta E_1 - \Delta E_2$$

frei. Dieser Energiedifferenz entspricht ein Massendefekt

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Demnach ergibt sich für die Masse des Neutrons nach Gl. (1)

$$m_n = m_D - m_H - \frac{2\Delta E_1 - \Delta E_2}{c^2}.$$

Nach Einsetzen der bekannten Größen erhalten wir

$$m_n = 2{,}01472 \text{ ME} - 1{,}00813 \text{ ME} + \frac{2{,}186 \text{ MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} \frac{\text{J}}{\text{MeV}}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß die Kernmasseneinheit gleich $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg ist, erhalten wir für die Neutronenmasse

$$m_n = 1{,}00659 \text{ ME} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{ME}} + 0{,}389 \cdot 10^{-29} \text{ kg} = \underline{1{,}6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}.$$

377. Berechnen Sie die Bindungsenergie a) für ein Deuteron, b) für ein α-Teilchen.

Lösung

Ein Ausdruck für die Bindungsenergie ist der bei der Bildung der angegebenen Teilchen aus ihren elementaren Bestandteilen auftretende Massendefekt. Massendefekt und Bindungsenergie stehen in dem einfachen Zusammenhang

$$\Delta E = \Delta m c^2. \tag{1}$$

a) Das Deuteron ist der Kern des schweren Wasserstoffisotops, der sich aus je einem Proton und Neutron aufbaut. Wir bezeichnen mit m_p, m_n und m_D die Massen von Proton, Neutron und Deuteron und erhalten für den bei der Bildung des Deuterons auftretenden Massendefekt den Ausdruck

$$\Delta m = m_n + m_p - m_D = 1{,}00895 \text{ ME} + 1{,}00758 \text{ ME} - 2{,}01418 \text{ ME} =$$
$$= 0{,}00235 \text{ ME}.$$

Gemäß dem Zusammenhang in Gl. (1) entspricht einer Kernmasseneinheit ME eine Energie von 931,8 MeV; daraus folgt, daß dem Massendefekt Δm die Bindungsenergie

$$\Delta E = 0{,}00235 \text{ ME} \cdot 931{,}8 \frac{\text{MeV}}{\text{ME}} = \underline{2{,}19 \text{ MeV}}$$

zukommt.

b) Das α-Teilchen ist der Kern des Heliumatoms; es besteht aus je zwei Protonen und Neutronen. Bei seiner Bildung tritt ein Massendefekt

$$\Delta m = 2m_n + 2m_p - m_\alpha$$

auf. In Zahlen ausgedrückt, hat er den Wert

$$\Delta m = 2{,}01790\ \text{ME} + 2{,}01516\ \text{ME} - 4{,}00276\ \text{ME} = 0{,}0303\ \text{ME}.$$

Damit ergibt sich für das α-Teilchen eine Bindungsenergie

$$\Delta E = 0{,}0303\ \text{ME} \cdot 931{,}8\,\frac{\text{MeV}}{\text{ME}} = \underline{28{,}2\ \text{MeV}.}$$

378. Radon wird durch radioaktiven Zerfall des Radiumisotops $^{226}_{88}\text{Ra}$ gebildet. Dabei emittiert der Radiumkern ein α-Teilchen der Energie $\Delta E = 4{,}9$ MeV. Der der Bindungsenergie des α-Teilchens zukommende Massendefekt hat den Wert $\Delta m = 0{,}0303$ ME. Berechnen Sie aus den vorgegebenen Angaben die Differenz der Massendefekte von Mutterkern (Radium) und Tochterkern (Radon).

Lösung

Da der Mutterkern $^{226}_{88}\text{Ra}$ aus 88 Protonen und 138 Neutronen besteht, kommt ihm ein Massendefekt

$$\Delta m_{\text{Ra}} = 88\, m_\text{p} + 138\, m_\text{n} - m_{\text{Ra}}$$

zu. Dagegen hat der Massendefekt des Tochterkerns $^{222}_{86}\text{Rn}$, der aus 86 Protonen und 136 Neutronen besteht, den Wert

$$\Delta m_{\text{Rn}} = 86\, m_\text{p} + 136\, m_\text{n} - m_{\text{Rn}}.$$

Die beiden Massendefekte unterscheiden sich somit um

$$\Delta m = \Delta m_{\text{Ra}} - \Delta m_{\text{Rn}} = 2m_\text{p} + 2m_\text{n} - (m_{\text{Ra}} - m_{\text{Rn}}). \tag{1}$$

Bei der Umwandlung des Radiums in Radon entsprechend der Reaktion

$$^{226}_{88}\text{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\alpha \tag{2}$$

wird die Energie $\Delta E = 4{,}9$ MeV frei, die dem α-Teilchen zukommt. Dieser Energie entspricht ein Massendefekt

$$\Delta m' = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4{,}9\ \text{MeV}}{931{,}8\,\frac{\text{MeV}}{\text{ME}}} = 0{,}00526\ \text{ME}.$$

Wenn wir diesen Massendefekt mit der in Gl. (2) angegebenen Reaktion in Beziehung setzen, ergibt sich

$$\Delta m' = m_{\text{Ra}} - (m_{\text{Rn}} + m_\alpha).$$

Wir können mit Hilfe dieser Beziehung die Massendifferenz der Kerne $m_{\text{Ra}} - m_{\text{Rn}}$ ausdrücken und damit in Gl. (1) hineingehen. Das ergibt

$$\Delta m = 2m_\text{p} + 2m_\text{n} - m_\alpha - \Delta m'.$$

Hierbei bedeutet $2m_p + 2m_n - m_\alpha$ den Massendefekt Δm_α, der bei der Bildung des α-Teilchens auftritt, in Zahlen:

$$\Delta m = \Delta m_\alpha - \Delta m' = 0{,}03030 \text{ ME} - 0{,}00526 \text{ ME} = \underline{0{,}025 \text{ ME.}}$$

379. Berechnen Sie, wie groß die Wellenlänge einer elektromagnetischen Strahlung höchstens sein darf, wenn diese Strahlung die Bildung von Elektron-Positron-Paaren verursachen soll.

Lösung

Paarbildung vollzieht sich durch die Wechselwirkung von genügend energiereichen Photonen im Feld schwerer Kerne. Die Ruhmasse des gebildeten Paares ist gleich der Summe der Ruhmassen von Elektron (m_e) und Positron (m_{e+}). Die Erzeugung dieser Ruhmassen erfolgt auf Kosten der Energie eines Photons. Der Zusammenhang zwischen den beteiligten Größen wird durch die EINSTEINsche Gleichung angegeben:

$$\Delta E = \Delta m c^2. \qquad (1)$$

Die Energie des Photons hat den Wert $\Delta E = h\nu$. Daraus folgt, wenn wir Gl. (1) umstellen, für die Frequenz des Photons

$$\nu = \frac{\Delta m c^2}{h},$$

und wegen der Beziehung $\lambda = c/\nu$ für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{\Delta m c}. \qquad (2)$$

Wenn wir die entsprechenden Größen einsetzen, ergibt sich

$$\Delta m = 5{,}489 \cdot 10^{-4} \text{ ME} + 5{,}489 \cdot 10^{-4} \text{ ME} = 10{,}978 \cdot 10^{-4} \text{ ME}.$$

Da eine Kernmasseneinheit gleich $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg ist, hat der oben errechnete Massendefekt, in absoluten Einheiten ausgedrückt, den Wert

$$\Delta m = 18{,}22 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

Diesen Wert in Gl. (2) eingesetzt, ergibt die erforderliche Höchstwellenlänge

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{18{,}22 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 12 \cdot 10^{-13} \text{ m} = \underline{12 \cdot 10^{-3} \text{ Å}.}$$

380. Urankerne des Isotops $^{235}_{92}$U zerlegen sich unter Beschuß mit thermischen (langsamen) Neutronen exotherm in 2 annähernd gleich schwere Kernbruchstücke. Bei dieser Art Kernspaltung wird eine Energiemenge von ungefähr $\Delta E = 200$ MeV freigesetzt. Berechnen Sie, welche Energiemenge bei der vollständigen Spaltung von 1 kg Uran freigesetzt würde. Berechnen Sie, welche Masse an spaltbarem Uranbrennstoff ein mit einer Leistung von 1 MW betriebener Kernreaktor innerhalb 24 Stunden verbrauchen würde.

Lösung

Bei der Spaltung von 1 kg Uran wird die Energie

$$E = n\,\Delta E \tag{1}$$

freigesetzt. Dabei ist ΔE die bei der Spaltung eines Kerns freigesetzte Energie und n die Zahl der in der Masseneinheit enthaltenen Urankerne. Für diese Zahl gilt

$$n = \frac{1000}{235} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}^{-1}.$$

Demnach ergibt sich die gesamte, bei der Spaltung von 1 kg Uran freigesetzte Energie zu

$$E = \frac{1000}{235}\, 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}^{-1} \cdot 200\ \mathrm{MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{MeV}} =$$

$$= 8{,}2 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J\,kg}^{-1} = \underline{1{,}97 \cdot 10^{10}\ \mathrm{kcal\,kg}^{-1}}.$$

Unter der Voraussetzung eines idealen Wirkungsgrades würde der Reaktor bei einer Leistung $P = 1\ \mathrm{MW} = 10^6\ \mathrm{W}$ innerhalb von 24 Stunden die Energie

$$E_0 = 10^6\ \mathrm{W} \cdot 86400\ \mathrm{s} = 8{,}64 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

freisetzen. Da bei der Spaltung von 1 kg Uran die Energie $E = 8{,}2 \cdot 10^{13}$ J frei wird, würde der Reaktor bei der angegebenen Leistung einen Brennstoffbedarf von

$$m = \frac{8{,}64 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}}{8{,}2 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J\,kg}^{-1}} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \approx \underline{1\ \mathrm{g\ Uran}\ ^{235}_{92}\mathrm{U}}$$

haben.

A Aufgaben

491. Als Endprodukt der Zerfallsreihe des Thoriums, die mit dem Isotop $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ beginnt, erscheint das Bleiisotop $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$. Berechnen Sie die Zahl der im Verlauf der ganzen Zerfallsreihe emittierten α- und β-Teilchen.
492. Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeit die Hälfte der Kerne eines Radiumpräparats zerfällt, wenn die Zerfallskonstante des betreffenden Radiums mit $\lambda = 1{,}42 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}$ angegeben wird.
493. Berechnen Sie, wieviel Prozent der Kerne eines Poloniumpräparats mit der Halbwertzeit $T_{1/2} = 40$ min innerhalb von 5 min zerfallen.
494. Die Halbwertzeit eines Aktiniumisotops beträgt 13,5 a. Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeit von 10^7 Kernen einer seinen Zerfall ausführt.
495. Berechnen Sie, wieviel α-Teilchen von einem Gramm Radium mit der Halbwertzeit $T_{1/2} = 1590$ a innerhalb einer Sekunde emittiert werden.
496. Entsprechend dem GEIGER-NUTTALLschen Reichweitegesetz kann man die Reichweite (d) eines von einem radio-

aktiven Präparat emittierten α-Teilchens mit der für dieses Präparat charakteristischen Zerfallskonstanten λ in Beziehung setzen. Das erfolgt angenähert durch die empirische Formel

$$\lg d = A \lg \lambda + B,$$

in der A und B Konstanten sind. Berechnen Sie die Reichweiten der α-Strahlung des Urans $^{238}_{92}U$ und des Radiums $^{226}_{88}Ra$, deren Halbwertzeiten bekannt sind. Für die Zerfallsreihe des Urans gelten die Zahlenwerte $A = 0{,}0167$ und $B = 0{,}7059$, wobei die Reichweite in cm und die Zerfallskonstante in s^{-1} gemessen sind.

497. Ein Poloniumpräparat der Aktivität 0,1 Curie befindet sich in einem Kalorimeter, dessen Wärmekapazität 1 cal × × grd^{-1} beträgt. Die vom Polonium emittierten α-Teilchen haben eine Energie von 5,3 MeV. Die Rückstoßenergie der emittierten Kerne wird vernachlässigt. Berechnen Sie die im Kalorimeter innerhalb einer Stunde auftretende Temperaturerhöhung.

498. Durch natürlichen radioaktiven Zerfall des Uranisotops $^{238}_{92}U$ bildet sich das Uranisotop $^{234}_{92}U$. Das natürliche Uran ist ein Isotopengemisch von $^{238}_{92}U$, $^{235}_{92}U$ und $^{234}_{92}U$, das 99,3% des $^{238}_{92}U$-Isotops und nur 0,006% des $^{234}_{92}U$-Isotops enthält. Die Halbwertzeit des Uranisotops $^{238}_{92}U$ beträgt $4{,}4 \cdot 10^9$ Jahre. Berechnen Sie die Halbwertzeit des Uranisotops $^{234}_{92}U$.

499. Berechnen Sie, welches Volumen des radioaktiven Edelgases Radon sich bei einer Temperatur von 0 °C und einem Druck von 1 at mit der Menge von 1 g Radium im radioaktiven Gleichgewicht befindet.

500. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich ein frei beweglicher Kern des Radiums nach der Emission eines α-Teilchens von der Energie $E_\alpha = 4{,}7$ MeV bewegen wird.

501. Berechnen Sie –, in J und eV ausgedrückt –, welcher Energie die nukleare Masseneinheit ME entspricht.

502. Berechnen Sie die bei der Kernreaktion

$$^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{30}_{14}Si + {}^{1}_{1}H$$

frei werdende Energiemenge. Die Kernmassen betragen: $m_{Al} = 26{,}9899$ ME, $m_{Si} = 29{,}9832$ ME.

503. Berechnen Sie den auf das Mol bezogenen Massendefekt, der bei der chemischen Reaktion

$$2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O$$

eintritt, wenn bei einer Reaktionstemperatur von 25 °C je Mol entstehenden Wassers eine Energie vom Betrag $W = 68{,}4$ kcal frei wird.

504. Im Verlauf der Kernreaktion

$$^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H$$

wird ein Energiebetrag von 0,6 MeV freigesetzt. Die Kernmasse des Stickstoffisotops $^{14}_{7}N$ beträgt 14,00756 ME. Berechnen Sie die Kernmasse des Kohlenstoffisotops $^{14}_{6}C$.

505. Im Verlauf der Kernreaktion

$$^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$$

wird je Grammatom des gebildeten Sauerstoffisotops eine Energiezufuhr von $12{,}5 \cdot 10^{10}$ J notwendig. Die Kernmasse des Stickstoffisotops $^{14}_{7}N$ beträgt 14,00756 ME. Wie groß ist demnach die Kernmasse des Sauerstoffisotops $^{17}_{8}O$?

506. Berechnen Sie die Bindungsenergie der Kerne a) des Stickstoffisotops $^{14}_{7}N$, b) des Bleiisotops $^{207}_{82}Pb$. Wie groß ist die jeweils auf ein Nukleon bezogene Bindungsenergie? Die Kernmassen der genannten Isotope betragen 14,00756 ME für $^{14}_{7}N$, 207,21 ME für $^{207}_{82}Pb$.

507. Berechnen Sie den bei der Bildung von einem Gramm Helium aus Protonen und Neutronen frei werdenden Energiebetrag.

6. Quantentheorie

6.1. Welleneigenschaften der Materie

Von DAVISSON und GERMER wurde 1927 nachgewiesen, daß auch Teilchen, die mit einer Ruhmasse behaftet sind, Welleneigenschaften zeigen können. Sie untersuchten die Reflexion von Elektronen an einem Nickel-Einkristall und fanden, daß die Elektronen entsprechend wellenoptischen Gesetzmäßigkeiten gestreut wurden (Bild 199). Mit diesem Experiment wurde eine 1924 von DE BROGLIE aufgestellte Hypothese bestätigt, wonach jedes sich frei bewegende Teilchen mit einer ebenen Welle der Form

$$\Psi(\vec{r}, t) = C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

verknüpft ist ($\vec{r}$ Ortsvektor, t Zeit). Die Amplitude C der **de-Broglie-Welle** bleibt vorläufig unbestimmt.

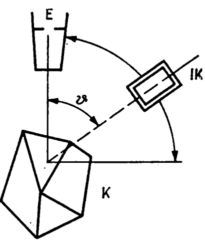


Bild 199. Versuch von DAVISSON und GERMER

Im Falle, daß sich die DE-BROGLIE-Welle im Vakuum ausbreitet, sind ihre Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ und ihr *Wellenzahlvektor* $\vec{k}$ mit der Energie E und dem Impuls $\vec{p}$ des Teilchens durch die *de Broglieschen Gleichungen*

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

verknüpft. Wellenzahlvektor $\vec{k}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ sind demnach gleichgerichtet. Mit der Wellenzahl k ist gemäß der Beziehung $|\vec{k}| = 2\pi\frac{1}{\lambda}$ auch die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle bestimmt. Die Konstante $\hbar$ hat den Wert

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}.$$

($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js PLANCKsches Wirkungsquantum).

In einem Kristall ist die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle vom **Gitterpotential** E_p abhängig. Bei einem Übertritt der DE-BROGLIE-Wellen aus dem Vakuum in den Kristall gilt für die Brechzahl n die Beziehung (Bild 200)

$$n = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \bar{\varepsilon}} = \sqrt{1 - \frac{E_{pot}}{E}}.$$

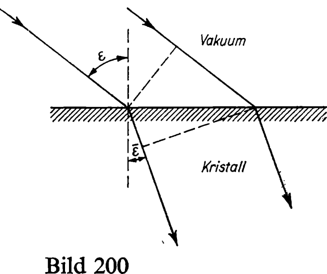


Bild 200

Aus den Welleneigenschaften der Materie haben wir nach SCHRÖDINGER und HEISENBERG die Konsequenz zu ziehen, daß sich die Quanten- oder Wellenmechanik als Mechanik der atomaren Prozesse in ihren Grundlagen und Vorstellungen gegenüber der klassischen Mechanik prinzipiell unterscheidet. Insbesondere läßt sich der Begriff der Bahnkurve eines Teilchens aus der klassischen Mechanik nicht in die Quantentheorie übertragen. An die Stelle genau fixierter Größen für die Ortskoordinate q und die Impulskoordinate p eines Teilchens tritt in der Wellenmechanik eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung.* Orts- und Impulskoordinate sind demzufolge mit prinzipiellen Ungenauigkeiten Δq und Δp behaftet. Nach HEISENBERG besteht zwischen diesen Ungenauigkeiten der Zusammenhang

$$\overline{\Delta p^2}\,\overline{\Delta q^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4},$$

der auch in der Form

$$\Delta p\, \Delta q \approx h$$

geschrieben wird.
Durch diese **Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation** wird weder die Genauigkeit der Ortsbestimmung noch die der Impulsbestimmung für sich allein begrenzt. Eine Beschränkung besteht dagegen insofern, als die genauere Bestimmung der einen Größe unvermeidlich mit einer Zunahme des Fehlers der *konjugierten Größe* verbunden ist.

B Beispiele

381. Das Wasserstoffatom hat die Masse $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Wie groß ist die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle des Teilchens, wenn es sich mit der Geschwindigkeit $v = 1000 \text{ m s}^{-1}$ bewegt?

Lösung

Die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle bestimmt sich aus der Beziehung

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Hieraus folgt

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{3}}\,\mathrm{m} = \underline{3{,}96 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}.}$$

Die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle liegt also in der Größenordnung des Atomdurchmessers.

382. Ein Elektron bewegt sich im homogenen elektrischen Feld. Die das Elektron beschleunigende Potentialdifferenz hat den Wert $U = 1000$ V. Es wird vorausgesetzt, daß die resultierende Endgeschwindigkeit des Elektrons klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c bleibt, so daß ohne Berücksichtigung relativistischer Korrekturglieder gerechnet werden kann.
Wegen $v \ll c$ kann die Masse des Elektrons mit seiner Ruhmasse $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg gleichgesetzt werden. Die Elementarladung des Elektrons ist $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As. Wie groß ist die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle des Elektrons am Ende des Beschleunigungsvorgangs?

Lösung

Für die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle des Elektrons gilt

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Zwischen der Geschwindigkeit des Elektrons und seiner kinetischen Energie besteht der Zusammenhang

$$E_k = \frac{m}{2} v^2;$$

andererseits ist die kinetische Energie gemäß $E_k = eU$ durch die Potentialdifferenz des vorliegenden elektrischen Feldes bestimmt. Hieraus erhalten wir für die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Setzt man für h, m, e die gegebenen Größen ein, so folgt

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, U/\mathrm{Volt}}}\,\mathrm{m} = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{U/\mathrm{Volt}}}\,\mathrm{m},$$

womit eine allgemeine Zahlenwertgleichung für die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Potentialdifferenz U in Volt gefunden ist. Setzt man für U den Zahlenwert 10^3 ein, ergibt sich schließlich

$$\lambda = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{10^3}}\,\mathrm{m} = \underline{0{,}387 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}.$$

383. Es ist die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle eines Elektrons im starken elektrischen Feld $U = 10^5$ V zu bestimmen. Dabei sind die *relativistischen Korrekturglieder* in erster Näherung zu berücksichtigen, wobei für den Impuls $\vec{p}$ und für die kinetische Energie E_k die Ausdrücke $\vec{p} = m\vec{v}$, $E_k = (m - m_0)c^2$ zu verwenden sind (vgl. Beispiel 349!).

Lösung

Nach den DE BROGLIEschen Grundgleichungen besteht zwischen dem Betrag des Impulses $\vec{p}$ und der Wellenlänge λ die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p}. \tag{1}$$

Andererseits ist

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Für nicht zu große Werte der Geschwindigkeit v können wir schreiben

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{v^2}{2c^2} \tag{3}$$

und erhalten damit

$$p = \frac{m_0 v}{1 - \dfrac{v^2}{2c^2}}. \tag{4}$$

Wir beachten den Zusammenhang zwischen kinetischer Energie E_k und Potentialdifferenz U:

$$E_k = (m - m_0)\,c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m_0 c^2 = eU \tag{5}$$

und finden

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{eU + m_0 c^2}. \tag{6}$$

Daraus erhalten wir durch Umformung

$$v = \frac{\sqrt{e^2U^2 + 2m_0c^2\,eU}}{eU + m_0c^2}\,c.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$eU \ll m_0c^2$$

ist, so läßt sich die Geschwindigkeit v auch schreiben

$$v = \frac{\sqrt{2m_0c^2eU\left(1 + \dfrac{eU}{2m_0c^2}\right)}}{m_0c^2\left(1 + \dfrac{eU}{m_0c^2}\right)}\,c = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}\,c\left(1 - \frac{3eU}{4m_0c^2}\right). \tag{7}$$

Aus den Gln. (1), (4), (7) ergibt sich für die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}}\left(1 - \frac{eU}{4m_0c^2}\right). \tag{8}$$

Wir setzen die bekannten Werte für die Konstanten m_0, e, h und c in Gl. (8) ein und erhalten

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,U}}\left(1 - \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,U}{4 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}\right)\text{m} =$$

$$= \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{U}}(1 - 0{,}49 \cdot 10^{-6}\,U)\,\text{m}. \tag{9}$$

Für die angegebene Potentialdifferenz $U = 10^5$ V ergibt sich

$$\lambda = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{10^5}}(1 - 0{,}049)\,\text{m} = \underline{0{,}368 \cdot 10^{-11}\,\text{m}}.$$

384. Es ist die Beziehung für die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle des Protons im starken elektrischen Feld zahlenwertmäßig aufzustellen, wobei die relativistischen Korrekturen in erster Näherung zu berücksichtigen sind. Welche Grenzen ergeben sich für die Spannung, wenn die Gültigkeit der entwickelten Formel auf Werte des Korrekturgliedes zwischen 0,1 % und 10 % des Hauptgliedes begrenzt ist? Für die Ruhmasse des Protons ist $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg zu setzen.

Lösung

Wir gehen von Gl. (8) in Beispiel 383 aus. An die Stelle der Ruhmasse m_0 des Elektrons tritt aber die des Protons m_p. Das Verhältnis beider Massen ist

$$\frac{m_p}{m_0} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}}{0{,}91 \cdot 10^{-30}} = 1836.$$

Unter Bezugnahme auf Gl. (9) in Beispiel 383 erhalten wir somit

$$\lambda = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{1836\,U}}\left(1 - 0{,}49 \cdot 10^{-6}\,\frac{U}{1836}\right)\text{m},$$

bzw.

$$\lambda = \frac{2{,}87 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{U}} (1 - 0{,}27 \cdot 10^{-9}\, U)\,\mathrm{m}.$$

Wenn das Korrekturglied $0{,}27 \cdot 10^{-9}\, U$ im Bereich

$$0{,}001 \leqq 0{,}27 \cdot 10^{-9}\, U \leqq 0{,}1$$

liegen soll, so muß die Spannung U ihrerseits Werte zwischen $3{,}7 \cdot 10^6$ V und $3{,}7 \cdot 10^8$ V annehmen. Unterhalb einer Beschleunigungsspannung von $3{,}7 \cdot 10^6$ V kann somit eine relativistische Korrektur des Protons vernachlässigt werden. Dagegen müssen oberhalb einer Spannung von $3{,}7 \cdot 10^8$ V Korrekturglieder höherer Ordnung in die Berechnung einbezogen werden.

385. Aus den DE BROGLIEschen und aus den relativistischen Grundgleichungen ist der Zusammenhang zwischen der *Phasengeschwindigkeit* $u = \lambda\nu$ einer DE-BROGLIE-Welle und der Geschwindigkeit v des substantiellen Teilchens abzuleiten. Wie groß sind Phasengeschwindigkeit und *Teilchengeschwindigkeit* für ein Elektron, das seine kinetische Energie im elektrischen Feld der Potentialdifferenz $U = 100$ V erhält?

Lösung

Es werden die relativistischen Grundgleichungen

$$E = mc^2, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

und die DE BROGLIEschen Gleichungen in der Form

$$E = \hbar\omega = h\nu, \quad p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

herangezogen. Aus den letzten beiden Beziehungen ergibt sich

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}.$$

Damit erhalten wir

$$u = \lambda\nu = \frac{E}{p}$$

und unter Verwendung der relativistischen Grundgleichungen

$$u = \frac{mc^2}{mv} \quad \text{bzw.} \quad uv = c^2.$$

Da entsprechend der Relativitätstheorie für die Geschwindigkeit v eines materiellen Teilchens die Beziehung

$$v \leqq c$$

gelten muß, folgt für die Phasengeschwindigkeit $u = \lambda\nu$ der DE-BROGLIE-Welle

$$u \geqq c.$$

Für den Fall eines Elektrons im elektrischen Feld $U = 100$ V erhalten wir aus

$$E_k = \frac{m_0}{2} v^2 = eU$$

die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\frac{e}{m_0}U} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} U \mathrm{ms^{-1}} = 0{,}593 \cdot 10^6 \sqrt{U} \mathrm{ms^{-1}},$$

d. h.,

$$\underline{v = 0{,}593 \cdot 10^7 \ \mathrm{m\,s^{-1}}.}$$

Hieraus ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$u = \frac{c^2}{v} = \frac{9 \cdot 10^{16}}{0{,}593 \cdot 10^7} \mathrm{m\,s^{-1}} = \underline{1{,}52 \cdot 10^{10} \ \mathrm{m\,s^{-1}}.}$$

386. Berechnen Sie die Wellenlänge einer DE-BROGLIE-Welle von Elektronen in einem Kristall. Das Gitterpotential des Kristalls hat den Wert $E_p = -15$ eV, die betrachteten Elektronen haben im Vakuum eine kinetische Energie von 100 eV.

Lösung

Im Fall nichtrelativistischer Rechnung gilt für die Gesamtenergie der Teilchen im Vakuum

$$E = \frac{m_0}{2} v^2 \tag{1}$$

und im Kristall

$$E = E_p + \frac{m_0}{2} \bar{v}^2 \tag{2}$$

Dabei gibt $\bar{v}$ die Geschwindigkeit der materiellen Teilchen im Kristall an. Aus Gl. (1) u. (2) folgt für die jeweiligen Geschwindigkeiten

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2(E - E_p)}{m_0}} \tag{3}$$

und daraus wegen $u = \lambda \nu = c^2/v$ für das Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten

$$n = \frac{u}{\bar{u}} = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \sqrt{\frac{E - E_p}{E}} = \sqrt{1 - \frac{E_p}{E}}, \tag{4}$$

wobei n als die Brechzahl der DE-BROGLIE-Welle zu bezeichnen ist. Für die Wellenlänge $\bar{\lambda}$ der DE-BROGLIE-Welle im Kristall erhalten wir demnach

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{n} = \lambda \sqrt{\frac{E}{E - E_p}}. \tag{5}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich aus Gl. (4) die Brechzahl zu

$$n = \sqrt{\frac{100 + 15}{100}} = 1{,}072.$$

Die Wellenlänge λ der DE-BROGLIE-Welle im Vakuum ergibt sich zu

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}. \tag{6}$$

Wir berücksichtigen die Umrechnung

$$1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

und erhalten für die Wellenlänge im Vakuum

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} \text{ m} = 12{,}2 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Für die Wellenlänge im Kristall erhalten wir

$$\bar{\lambda} = \frac{12{,}2}{1{,}072} 10^{-11} \text{ m} = \underline{11{,}4 \cdot 10^{-11} \text{ m}.}$$

387. Röntgenstrahlen und DE-BROGLIE-Wellen gleicher *Vakuum-Wellenlänge* λ zeigen bei einem Übergang zwischen Vakuum und Kristall unterschiedliches Brechungsverhalten. Während der Röntgenstrahl praktisch keine Brechung erfährt, erfolgt für den Elektronenstrahl eine Brechung gemäß

$$n = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \bar{\varepsilon}}$$

(Bild 201). Aus der hierdurch sich ergebenden Zuordnung von Röntgenstrahlen und gebeugten Elektronenstrahlen werde eine Brechzahl $n = 1{,}044$ gemessen. Die Wellenlänge im Vakuum beträgt $\lambda = 10^{-10}$ m. Welcher Wert folgt daraus für das Gitterpotential?

Lösung

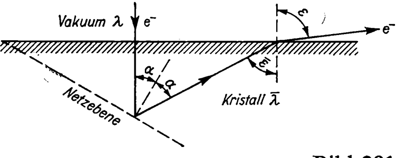


Bild 201

Zwischen der gemessenen Wellenlänge λ und dem Potential U des beschleunigenden elektrischen Feldes besteht die Beziehung (vgl. Beispiel 382)

$$\lambda = \frac{1{,}225 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{U}} \text{ m},$$

woraus folgt

$$U = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-18}}{\lambda^2} \text{ V}.$$

Im vorgegebenen Falle $\lambda = 10^{-10}$ m ergibt sich demnach eine kinetische Energie der Elektronen von

$$E_k = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-18}}{10^{-20}}\,\text{eV} = 150\,\text{eV},$$

die mit der Gesamtenergie E identisch ist.
Aus

$$n = \sqrt{1 - \frac{E_p}{E}}$$

folgt für das gesuchte Gitterpotential

$$E_p = E\,(1 - n^2),$$

d. h.,

$$E_p = 150\,(1 - 1{,}044^2)\,\text{eV} = -150 \cdot 0{,}09\,\text{eV} = \underline{-13{,}5\,\text{eV}.}$$

388. Ein Elektronenstrahl falle senkrecht auf einen Spalt Sp der Breite $a = 0{,}1\ \mu$m und werde an diesem gebeugt. Es soll die Ungenauigkeit bei der Festlegung der Geschwindigkeit bestimmt werden. Dabei können alle Teilchen, die außerhalb des ersten Beugungsminimums liegen, unberücksichtigt bleiben.

Lösung

Die Ausbreitungsrichtung vor dem Spalt Sp wählen wir als z-Achse; die Spaltebene wird als x,y-Ebene festgelegt (Bild 202). Der Teilchenimpuls vor dem Spalt hat deshalb die Komponenten

$$\bar{p}_x = 0, \quad \bar{p}_y = 0, \quad \bar{p}_z = p.$$

Beim Durchgang durch den Spalt wird die DE-BROGLIE-Welle gebeugt, d. h., der Teilchenimpuls wird verändert. Für die in der y,z-Ebene liegenden Strahlen ergibt sich gemäß den Aussagen der Beugungsoptik das erste Beugungsminimum aus

$$\sin \gamma_{\min} = \pm \frac{\lambda}{a}$$

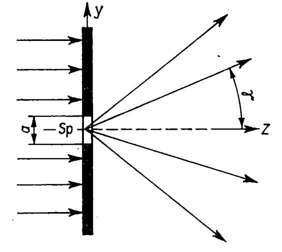


Bild 202

(λ Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle). Für die Strahlen in der y,z-Ebene gilt

$$p_y = p \sin \gamma.$$

Die zu berücksichtigenden Teilchen haben demnach Impulse mit y-Komponenten im Bereich

$$-p \sin \gamma_{\min} = -\frac{p\lambda}{a} \cdots + \frac{p\lambda}{a} = p \sin \gamma_{\min}.$$

Nach den DE BROGLIEschen Gleichungen ist

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

somit folgt

$$\Delta p_y = p \sin \gamma_{\min} = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}.$$

Ferner ist die Ungenauigkeit des Ortes durch die Spaltbreite bestimmt, d. h., es gilt

$$\Delta y = a.$$

Somit folgt

$$\Delta p_y \, \Delta y = h.$$

Da $p = mv$ ist, ergibt sich auch $\Delta p = m\Delta v$. Daraus erhalten wir schließlich

$$\Delta v_y = \frac{h}{m\Delta y} = \frac{h}{ma} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-7}} \text{ m s}^{-1} = \underline{727 \text{ m s}^{-1}}.$$

389. Bei der Untersuchung des MÖSSBAUER-*Effekts* wird häufig die Strahlung des ^{57}Fe-Kernes beobachtet. Dieser Kern emittiert beim Übergang vom ersten angeregten Kernniveau eine γ-Strahlung der Energie $E = 14{,}4$ keV. Welcher Mindestwert ergibt sich nach der HEISENBERGschen Unschärferelation für die Meßzeit Δt, in deren Verlauf eine Entscheidung über eine erfolgte Emission nicht möglich ist?

Lösung

In die HEISENBERGsche Unschärferelation

$$\Delta p \Delta q \approx h$$

wird $\Delta q = v\Delta t$ eingesetzt.
Aus der relativistischen Massenveränderlichkeit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

erhalten wir die Beziehung

$$m_0^2 = m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

und daraus für die Gesamtenergie

$$E^2 = m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + m^2 v^2 c^2 = (m_0^2 c^2 + p^2)\, c^2.$$

Hieraus finden wir durch Differentiation ($\Delta E = \mathrm{d}E$, $\Delta p = \mathrm{d}p$ gesetzt)

$$2E\,\Delta E = 2c^2 p\,\Delta p, \quad \Delta p = \frac{E\,\Delta E}{c^2 p}.$$

Mit $E = mc^2$ und $p = mv$ ergibt sich

$$\Delta q\,\Delta p \doteq v\,\Delta t\,\frac{E\,\Delta E}{c^2 p} = \Delta t\,\Delta E \approx h.$$

Wir setzen die gegebenen Größen ein

$$\Delta E = E = 14{,}4\,\mathrm{keV} = 14{,}4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$$

und finden für die Emissionszeit den Wert

$$\Delta t \approx \frac{h}{\Delta E} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2{,}3 \cdot 10^{-15}}\,\mathrm{s} = \underline{2{,}8 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{s}.}$$

390. Entsprechend der *Hypothese von* MARCH-FORADORI gibt es sowohl eine **Elementarlänge** (kleinste Länge)

$$l_0 \approx 3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m},$$

als auch eine **Elementarzeit**

$$t_0 = \frac{l_0}{c} \approx 10^{-23}\,\mathrm{s}.$$

Welche oberen Grenzen ergeben sich aus dieser Hypothese für Impuls- und Energieänderungen bei elementaren Prozessen, wenn man die HEISENBERGsche Unschärferelation in der Form $\Delta p \Delta q \approx h$ voraussetzt?

Lösung

Orts- und Zeitmessungen sind mit Fehlern behaftet, die mindestens $\pm l_0$ bzw. $\pm t_0$ betragen. Hieraus folgt

$$\Delta q \geqq 2l_0, \quad \Delta t \geqq 2t_0.$$

Aus der HEISENBERGschen Unschärferelation ergibt sich damit

$$h \approx \Delta p\,\Delta q \geqq \Delta p\,2l_0$$

und daraus für eine Impulsänderung

$$\Delta p \leqq \frac{h}{2l_0} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}} \approx \underline{10^{-19}\,\mathrm{kgm\,s^{-1}}.}$$

Ebenso folgt

$$h \approx \Delta E\,\Delta t \geqq \Delta E\,2t_0,$$

und damit für die Energieänderung

$$\Delta E \lessapprox \frac{h}{2t_0} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}}{2 \cdot 10^{-23}\,\text{s}} \approx \underline{3 \cdot 10^{-11}\,\text{J}.}$$

In anderen Einheiten ausgedrückt finden wir

$$3 \cdot 10^{-11}\,\text{J} = 3 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{12}\,\text{MeV} \approx 200\,\text{MeV}.$$

Dieser Wert entspricht der größten experimentell bekanntgewordenen Energieausbeute bei einem Elementarprozeß.

391. Nach MARCH besteht zwischen der Impulsänderung Δp und der hierdurch bedingten Energieänderung ein Zusammenhang der Form

$$\left| c^2 |\Delta p|^2 - |\Delta E|^2 \right| \leqq \left(\frac{hc}{2l_0}\right)^2. \tag{1}$$

Es ist zu berechnen, welche obere Grenze sich daraus für die Energie eines Quants der Elektronenbremsstrahlung ergibt.

Lösung

Für die Elektronenbremsstrahlung gilt die Beziehung

$$eU = (m - m_0)\,c^2 = \frac{m_0}{2}\,v^2 = h\nu_{max}. \tag{2}$$

(m Masse, m_0 Ruhmasse des Elektrons, ν_{max} obere Grenze der ausgestrahlten Frequenz, U Potentialdifferenz des Beschleunigungsfeldes).

Die bei der Abbremsung eines Elektrons maximal auftretenden Werte der Impuls- bzw. der Energieänderung sind

$$\Delta p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

und

$$\Delta E = E_k = (m - m_0)\,c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{4}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in Gl. (1) von MARCH einsetzen, ergibt sich

$$c^2 |\Delta p|^2 - |\Delta E|^2 = m_0 c^2 \left[\frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - c^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)\right] =$$

$$= 2 m_0^2 c^4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right), \tag{5}$$

d. h.,

$$c^2\,|\Delta p|^2 - |\Delta E|^2 = 2m_0^2c^4\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) < \left(\frac{hc}{2l_0}\right)^2. \tag{6}$$

Aus dem Vergleich von Gl. (4) u. (6) erhalten wir

$$\Delta E = E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) < \frac{1}{2m_0}\left(\frac{h}{2l_0}\right)^2, \tag{7}$$

d. h., für die bei der Elektronenbremsstrahlung frei werdende Energie gilt die Ungleichung

$$\Delta E < \frac{h^2}{8m_0l_0^2} = \frac{(6{,}62\cdot 10^{-34})^2}{8\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,(3\cdot 10^{-15})^2}\,\mathrm{J} = 6{,}72\cdot 10^{-9}\,\mathrm{J} = \underline{4{,}2\cdot 10^4\,\mathrm{MeV}}.$$

Hiernach muß die Anfangsenergie von Elektronen bei der Bremsstrahlung unterhalb einer Grenze von rd. 10^5 MeV liegen.

392. Es sind die *strahlungsfreien Kreisbahnen* im BOHRschen Atommodell, die zugehörigen Umlauffrequenzen und die Gesamtenergie E zu berechnen. Dabei ist vorauszusetzen, daß die DE-BROGLIEschen Gleichungen für freie Teilchen auch für die im Atom gebundenen Elektronen gültig sind und daß nur solche Bahnen möglich sind, auf denen die DE-BROGLIEsche Welle längs der Kreisbahn mit sich selbst zur Interferenz kommt.

Lösung

Die DE-BROGLIEsche Welle eines Elektrons kann nur dann entlang der gesamten Umlaufbahn mit sich selbst zur Interferenz kommen, wenn deren Länge ein ganzzahliges Vielfaches der DE-BROGLIE-Wellenlänge λ ist. Hieraus folgt für die möglichen Bahnradien r die Beziehung

$$2\pi r = n\lambda, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Setzt man hierin die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle des Elektrons aus

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \tag{2}$$

ein, so folgt mit $v = r\omega$ (ω Kreisfrequenz)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mr\omega} \tag{3}$$

und weiter aus Gl. (1) u. (3)

$$2\pi r = n\frac{h}{p} = \frac{nh}{mr\omega} \quad \text{bzw.} \quad 2\pi rp = \oint p\,\mathrm{d}q = nh. \tag{4}$$

Die letzte Gleichung drückt die Phasenintegralbedingung von BOHR aus.
Aus dem Zusammenhang von COULOMB-Kraft und Fliehkraft ergibt sich

$$\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mr\omega^2 \tag{5}$$

($\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As V^{-1} m^{-1} elektrische Feldkonstante, z Zahl der Elementarladungen im Kern). Löst man Gl. (4) u. Gl. (5) nach dem Bahnradius r und nach der Kreisfrequenz ω auf, so ergibt sich

$$r = r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{ze^2 m}, \quad \omega = \omega_n = \frac{z^2 e^4 m}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 n^3 \hbar^3}. \tag{6}$$

Für die Gesamtenergie E folgt

$$E = \frac{m}{2} r^2 \omega^2 - \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{z^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2}. \tag{7}$$

Setzt man die für das Wasserstoffatom geltenden Daten ein, so erhält man für den Grundzustand ($n = 1$)

$$r_1 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \text{ m} = \underline{0{,}529 \cdot 10^{-10} \text{ m}},$$

$$\omega_1 = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{16\,(3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (1{,}05 \cdot 10^{-34})^3} \text{ s}^{-1} = \underline{4{,}16 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}},$$

$$E_1 = -\frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{18}}{32\,(3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (1{,}05 \cdot 10^{-34})^2} \text{ eV} = \underline{-13{,}6 \text{ eV}}.$$

393. Nach der BOHR*schen Quantisierungsregel* gilt für jede Ortskoordinate q und für den dazugehörigen *verallgemeinerten Impuls*

$$p_q = \frac{\partial E_k}{\partial q}$$

die *Phasenintegralbedingung*

$$\oint p_q \, \mathrm{d}q = n_q h, \qquad n_q = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Auf der Grundlage dieser BOHRschen Theorie ist nachzuweisen, daß auch auf einer elliptischen Umlaufbahn die Zahl der ihr entsprechenden DE-BROGLIE-Wellen ganzzahlig ist.

Lösung

Gemäß der BOHRschen Theorie gelten für die elliptischen Bahnen (Bild 203) die beiden Bedingungen

$$\oint p_r \, \mathrm{d}r = n_r h, \qquad n_r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

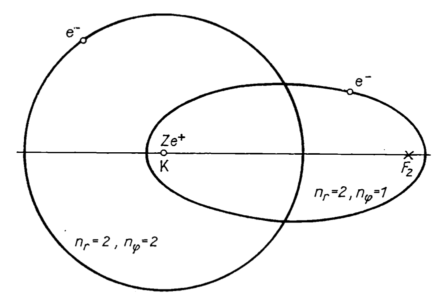
$$\oint p_\varphi \, \mathrm{d}\varphi = n_\varphi h, \qquad n_\varphi = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Dabei wird n_r als die *radiale*, n_φ als die *azimutale* Quantenzahl bezeichnet. Die verallgemeinerten Impulse sind durch die Beziehungen

$$p_r = \frac{\partial E_\mathrm{k}}{\partial \dot{r}}, \quad p_\varphi = \frac{\partial E_\mathrm{k}}{\partial \dot{\varphi}}$$

bestimmt. Für die kinetische Energie ergibt sich (Bild 204) demnach

$$E_\mathrm{k} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} (p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi}).$$



K Atomkern im Kreismittelpunkt bzw. Brennpunkt
F_1 der Ellipse
F_2 Ellipsenbrennpunkt

Bild 203. Darstellung der Quantenbahnen nach BOHR

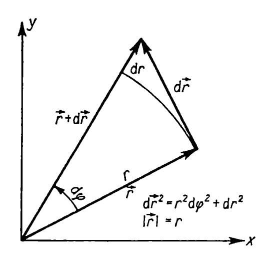


Bild 204

Damit erhält man aus den Phasenintegralbedingungen

$$\oint p_r \,\mathrm{d}r + \oint p_\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \oint (p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi})\,\mathrm{d}t = 2 \oint E_\mathrm{k} \mathrm{d}t = (n_r + n_\varphi)\, h.$$

Wenn wir die kinetische Energie in der Form

$$E_\mathrm{k} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} v \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

schreiben (s Länge der durchlaufenen Bahnkurve, v Bahngeschwindigkeit), dann erhalten wir aus

$$2 \oint E_\mathrm{k} \,\mathrm{d}t = (n_r + n_\varphi)\, h = nh$$

die Beziehung

$$\oint mv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \oint mv \,\mathrm{d}s = nh.$$

Durch Einsetzen der DE BROGLIEschen Gleichung

$$p = mv - \frac{h}{\lambda}$$

erhalten wir das Resultat

$$\oint \mathrm{d}s = n\lambda, \qquad n = n_r + n_\varphi = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

394. Die elliptische Umlaufbahn eines Elektrons um einen Atomkern wird in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$r = \frac{p_0}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \tag{1}$$

dargestellt (Bild 205). Dabei bedeutet

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E (4\pi\varepsilon_0)^2}{z^2 e^4 m}} \tag{2}$$

die numerische Exzentrizität der Bahn,

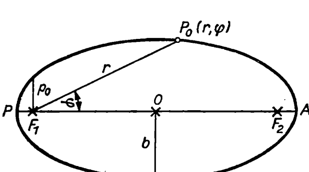
$$p_0 = \frac{L^2 4\pi\varepsilon_0}{z e^2 m} \tag{3}$$

den Parameter der Ellipse, E die Gesamtenergie und

$$L = m r^2 \dot{\varphi} = p_\varphi$$

den nach dem Flächensatz konstanten Drehimpuls.

Es sind die sich aus den Bohrschen Quantisierungsbedingungen ergebenden Halbachsen a und b der Bahnellipse zu bestimmen. Welcher Ausdruck ergibt sich für die Gesamtenergie E?



F_1, F_2 Brennpunkte der Ellipse
$F_1O = OF_2 = e$
$PO = OA = a$
P_0 Ellipsenpunkt
P Perihel
A Aphel

Bild 205. Elliptische Umlaufbahn eines Elektrons um einen Atomkern

Lösung

Die Bohrschen Quantisierungsbedingungen (s. Beispiel 393) lauten

$$\oint p_\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} L \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi L = n_\varphi h \quad \text{bzw.} \quad L = n_\varphi \hbar, \tag{5}$$

$$\oint p_r \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} p_r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \mathrm{d}\varphi = n_r h. \tag{6}$$

Dabei ist

$$p_r = \frac{\partial E_\mathrm{k}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = m \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{7}$$

Wenn wir die Gln. (7) u. (1) in Gl. (6) einsetzen, so finden wir

$$\oint p_r \,\mathrm{d}r = L \int \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 \mathrm{d}\varphi = L\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi \,\mathrm{d}\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} = n_r h. \tag{8}$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$2\pi L\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-1\right)=n_r h, \tag{9}$$

sowie unter Berücksichtigung von Gl. (5) nach Umformung

$$1-\varepsilon^2=\left(\frac{n_\varphi}{n_\varphi+n_r}\right)^2=\left(\frac{n_\varphi}{n}\right)^2 \tag{10}$$

mit $n_r + n_\varphi = n$. Aus Gl. (10) erhalten wir unter Hinzuziehung der Gln. (2) u. (5) einen Ausdruck für die Energie

$$E=-\frac{z^2e^4m}{8h^2\varepsilon_0^2n^2}.$$

Demnach ist die Gesamtenergie E nur von der Hauptquantenzahl $n = n_r + n_\varphi$ abhängig. Es ergibt sich der gleiche Ausdruck wie bei der Annahme von Kreisbahnen. Zur Bestimmung der gesuchten Halbachsen erhalten wir nach Bild 205 aus Gl. (1) für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$

$$a-\sqrt{a^2-b^2}=\frac{p_0}{1+\varepsilon},\quad a+\sqrt{a^2-b^2}=\frac{p_0}{1-\varepsilon}$$

und daraus

$$a=\frac{p_0}{1-\varepsilon^2}=\frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{ze^2m} \tag{11}$$

sowie unter Verwendung von Gl. (10)

$$b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=\frac{an_\varphi}{n}. \tag{12}$$

Die großen Halbachsen $a = a_n$ der Ellipsen stimmen hiernach mit den Radien der strahlungsfreien Kreisbahnen überein. Im Fall $n = 3$ ergibt sich für das Wasserstoffatom

$$a_3=\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 9\,(1{,}05\cdot 10^{-34})^2}{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}\,\mathrm{m}=\underline{4{,}74\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}},$$

$$b_{31}=4{,}74\cdot 10^{-10}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{m}=\underline{1{,}58\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}},$$

$$b_{32}=4{,}74\cdot 10^{-10}\cdot\frac{2}{3}\,\mathrm{m}=\underline{3{,}16\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}},$$

$$b_{33}=\underline{4{,}74\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}.$$

Der Sonderfall $n_\varphi = 0$ ist offensichtlich auszuschließen, denn er führt zu einer Pendelbewegung, bei der das Elektron durch den Atomkern hindurchgehen müßte.

A Aufgaben

508. Die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines Deuteriumatoms ist für den Fall zu bestimmen, daß die Geschwindigkeit des Teilchens $v = 400\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ beträgt. Die Masse des Deuteriumatoms ist $m_d = 3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg.
509. Wie groß wäre die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines Geschosses von 1 g Masse, das sich mit einer Geschwindigkeit $v = 100\ \mathrm{ms^{-1}}$ bewegt?
510. Es ist die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines Protons im elektrischen Feld zu bestimmen, dessen beschleunigendes Potential den Wert 1 V hat. Die Masse des Protons ist $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.
511. Berechnen Sie die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines Elektrons im elektrischen Feld mit der beschleunigenden Potentialdifferenz $U = 2{,}5 \cdot 10^5$ V.
512. Welche Potentiale sind erforderlich, damit die DE-BROGLIE-Welle eines Deuteriumatoms die Wellenlängen $\lambda_1 = 10^{-11}$ m, $\lambda_2 = 10^{-12}$ m und $\lambda_3 = 10^{-13}$ m annimmt?
513. Stellen Sie eine Formel auf, nach der die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle eines α-Teilchens in Abhängigkeit von der Feldspannung zu berechnen ist. Welche Wellenlänge ergibt sich demnach für die Spannung 10^6 V? $m_\alpha = 4m_p$, Ladung $Q = 2\,e^+$.
514. Berechnen Sie die Phasengeschwindigkeit der DE-BROGLIE-Welle für ein Elektron im elektrischen Feld der Spannung 1 kV.
515. Zur Messung des Gitterpotentials eines Nickelkristalls werden Elektronen der folgenden Energien betrachtet: $E = 160; 185; 210; 235; 260; 285$ eV. Für die gebrochene Welle werden dabei die folgenden Wellenlängen gemessen: $\lambda = (0{,}921; 0{,}861; 0{,}811; 0{,}769; 0{,}735; 0{,}703) \cdot 10^{-10}$ m. Wie groß sind die jeweils zugeordneten Röntgenwellenlängen? Welche Brechzahlen folgen daraus? Welche Gitterpotentiale ergeben sich? Geben Sie das mittlere Gitterpotential für Nickel an.
516. Bei der Reflexion eines Elektronenstrahls an einem Aluminiumgitter ($E_p = -17{,}0$ eV) soll sich eine Brechzahl $n = 1{,}2$ ergeben. Bestimmen Sie die dafür notwendige beschleunigende Potentialdifferenz sowie die Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle der Elektronen.
517. Es werde vorausgesetzt, daß bis hinauf zu einer Geschwindigkeit $v = {}^1/_{10}\,c = 3 \cdot 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ nichtrelativistisch gerechnet werden darf. Welcher Bereich der DE-BROGLIE-Wellen und welcher Spannungsbereich für Elektronen läßt sich damit erfassen?
518. Wie groß muß die Öffnung eines Spalts mindestens sein, damit bei der Beugung langsamer Elektronen, Neutronen, α-Teilchen, die prinzipielle Ungenauigkeit der Geschwindigkeitsbestimmung den Wert $\pm 100\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ nicht übersteigt?
519. Welche Spaltbreite müßte man wählen, wenn sich beim Durchgang von α-Strahlen und von β-Strahlen ein Beugungsfleck mit dem Radius $r = 1$cm (1. Minimum) ergeben soll. Der Schirmabstand betrage 10 cm. Die Energie der Teilchen werde durch ein elektrisches Feld mit dem Potential $\varphi = 100$V erzeugt.
520. Die Energie eines α-Teilchens beträgt bei der Emission 4,8 MeV. Es werde vorausgesetzt, daß bei einer Impulsmessung Abweichungen von einem Prozent auftreten. Welche Genauigkeit ergibt sich daraus für die Lagebestimmung?
521. Wie groß ist beim Elektron im Wasserstoffatom die Ungenauigkeit der Ge-

schwindigkeit Δv_n im Verhältnis zur Geschwindigkeit v_n, wenn die Ungenauigkeit des Ortes mit $\Delta q = 2r_n$ angesetzt wird?

522. Die Strahlung eines gepulsten Lasers der Wellenlänge $\lambda = 6943 \cdot 10^{-10}$ m erzeugt in der Targetsubstanz einen Krater von $3 \cdot 10^{-3}$ cm Durchmesser. Bei einer Impulsdauer von 5 ns (1 ns = $= 10^{-9}$ s) wird dabei eine Energiedichte von $5 \cdot 10^{17}$ Wm^{-2} festgestellt. Berechnen Sie ein Energiequant $h\nu$, die emittierte Gesamtenergie, die Zahl der emittierten Quanten und die Ungenauigkeit der gemessenen Energie. Wie groß ist der Impuls eines Quants, und wie groß ist die Ungenauigkeit des Impulses?

523. Die Halbwertbreite $\Delta\lambda$ einer Spektrallinie und die mittlere Lebensdauer eines angeregten Atoms ergeben sich nach der klassischen Theorie strahlender Dipole entsprechend den Formeln

$$\Delta\lambda = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 mc^2}, \quad \Delta t = \frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta\lambda}.$$

Berechnen Sie daraus die mittlere Lebensdauer eines im angeregten Zustand befindlichen Wasserstoffatoms vor dessen Aussendung eines Quants der H_α-Linie. Wie groß ist die Ungenauigkeit ΔE bei der Bestimmung des Energiequants, wenn die Zeitungenauigkeit gleich der mittleren Lebensdauer des angeregten Zustands angenommen wird?

524. Bei Verwendung von 14,4-keV-γ-Quanten des ^{57}Fe-Kerns im MÖSSBAUER-Effekt hat die Frequenzungenauigkeit den Wert

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 3 \cdot 10^{-13}.$$

Berechnen Sie daraus die Ungenauigkeit der Energiebestimmung ΔE und die mittlere Lebensdauer des angeregten Zustands, die, entsprechend dem HEISENBERGschen Prinzip, der Zeitungenauigkeit gleichzusetzen ist.

525. Die Hohlraumstrahlung kann als eine ständige Hin- und Herreflexion von Strahlungsquanten des Impulses $p = \frac{h}{\lambda}$ aufgefaßt werden. Welche untere Grenze für die Wellenlänge und welche obere Grenze für die Frequenz ergeben sich aus dieser Annahme unter Berücksichtigung der Hypothese von MARCH-FORADORI?

526. Bei Elementarakten können Strahlungsquanten zur Erzeugung ruhmassebehafteter Teilchen führen. Wo liegt die obere Grenze der Masse von solcherart erzeugten Teilchen?

527. Berechnen Sie die Halbachsen der Elektronenbahnen des einfach ionisierten Heliumatoms für den Fall $n = 2$.

6.2. Grundlagen der Quantentheorie

M. BORN gab den DE-BROGLIE-Wellen $\Psi = \Psi(x;y;z;t)$ eine statistische Deutung. Sie verknüpft den Atomismus der Elementarteilchen mit ihren Welleneigenschaften Wenn Ψ^* den konjugiert komplexen Wert der Größe Ψ und dτ das Volumen eines. Raumelements bezeichnet, dann gibt

$$(\mathrm{d}Wx; y; z; t) = |\Psi|^2\,\mathrm{d}\tau = \Psi\Psi^*\,\mathrm{d}\tau$$

die Wahrscheinlichkeit an, das betrachtete Teilchen im Raumelement $d\tau$ anzutreffen. Da sich das Teilchen mit Sicherheit irgendwo im Raum befindet, hat man die DE BROGLIEsche Wellenfunktion Ψ so zu normieren, daß das Integral über $\Psi\Psi^*$, über den gesamten Raum erstreckt, gleich Eins wird:

$$\int \Psi\Psi^* \, d\tau = 1. \qquad (\textit{Normierungsbedingung})$$

Der physikalische Zustand eines Quantensystems sei durch die **Wellenfunktion** $\Psi = \Psi(x; y; z; t)$ charakterisiert. Der Mittelwert einer physikalischen Zustandsgröße L in diesem Quantensystem ergibt sich dann aus der Wellenfunktion Ψ durch die Beziehung

$$\bar{L} = \int \Psi^* \boldsymbol{L} \Psi \, d\tau.$$

Dabei gibt $\boldsymbol{L}$ den für die betreffende physikalische Größe L charakteristischen *Operator* an.

Die in der Quantentheorie auftretenden Operatoren sind **Hermitesche Operatoren.** Als solche werden Operatoren bezeichnet, die *linear* und *selbstadjungiert* sind. Für lineare Operatoren gilt die Beziehung

$$\boldsymbol{L}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \boldsymbol{L} u_1 + c_2 \boldsymbol{L} u_2;$$

als selbstadjungiert wird ein Operator bezeichnet, der die Bedingungsgleichung

$$\int u_1^* \boldsymbol{L} u_2 \, d\tau = \int u_2 \boldsymbol{L}^* u_1^* \, d\tau$$

erfüllt. Das Integral ist dabei über den gesamten Bereich der Variablen zu erstrecken. Die u_1 und u_2 sind quadratisch integrierbare Funktionen.

Die wichtigsten Operatoren der Quantentheorie sind (in Ortskoordinatendarstellung) der *Operator des Impulses*:

$$\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

der *Operator der kinetischen Energie*:

$$\boldsymbol{E}_k = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

der *Operator des Ortsvektors*, der eine Multiplikation mit dem Ortsvektor vollzieht:

$$\boldsymbol{r} = \vec{r}(x; y; z),$$

der *Operator der potentiellen Energie*, der gleichfalls in einer Multiplikation

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{p} = E_\mathrm{p}\,(x; y; z)$$

besteht, sowie der **Hamilton-Operator** *der Gesamtenergie*

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}_\mathrm{k} + \boldsymbol{E}_\mathrm{p}$$

und der zeitliche Operator der Gesamtenergie

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}.$$

Die Gleichung

$$\boldsymbol{L}\Psi = L\Psi$$

wird als **Eigenwertgleichung** des Operators $\boldsymbol{L}$ bezeichnet. Es besteht die Forderung, daß die sich ergebenden Lösungen *eindeutig, stetig und endlich* sein müssen. Daraus folgt, daß im allgemeinen nur für spezielle Eigenwerte $L = L_1, L_2, \dots$ nichttriviale Lösungen existieren. *Diese Lösungen werden als* **Eigenfunktionen** *bezeichnet.*
Wenn die Operatoren $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{M}$ *kommutativ* sind, so daß für alle Funktionen Ψ die Beziehung

$$(\boldsymbol{L}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{L})\,\Psi = 0$$

gilt, so gehören zu den beiden Operatoren gleiche Eigenfunktionen. In diesem Fall sind die physikalischen Größen L und M prinzipiell gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit meßbar. Dagegen sind für *nichtvertauschbare Operatoren* der Art

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{L} \neq 0$$

die physikalischen Zustandsgrößen L und M im Sinne der HEISENBERGschen Unschärferelation nicht gleichzeitig meßbar.
Für die verschiedenen Quantenzustände, in denen sich die Elementarteilchen befinden, wird die zugehörige Wellenfunktion $\Psi = \Psi(x; y; z; t)$ durch die **Schrödinger-Gleichung**

$$\boldsymbol{H}\Psi = \boldsymbol{E}\Psi$$

bestimmt. Im Fall stationärer Zustände geht diese Gleichung über in

$$\boldsymbol{H}\psi = E\psi, \quad \psi = \psi(x;y;z),$$

wobei E die Gesamtenergie angibt. Aus ψ ergibt sich die Massendichte des Teilchenstroms gemäß

$$\vec{j} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi\,\Delta\psi^* - \psi^*\,\Delta\psi).$$

B Beispiele

395. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $c = a + ib$ stellt eine Operation dar. Es ist zu bestimmen, unter welchen Bedingungen die Multiplikation eine HERMITEsche Operation ist.

Lösung

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist linear, denn es gilt

$$c\,(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 c u_1 + c_2 c u_2 .$$

Wenn die Zahl $c = a + ib$ einen selbstadjungierten Operator darstellen soll, dann muß gelten

$$\int u_1^*(a + ib)\, u_2\, \mathrm{d}x = \int u_2(a - ib)\, u_1^*\, \mathrm{d}x,$$

d. h.

$$(a + ib) \int u_1^*\, u_2\, \mathrm{d}x = (a - ib) \int u_1^*\, u_2\, \mathrm{d}x .$$

Diese Beziehung ist nur für $b = 0$ erfüllt, d. h., nur die Multiplikation mit einer reellen Zahl stellt eine HERMITEsche Operation dar.

396. Unter der Voraussetzung, daß die betrachteten Funktionen im Unendlichen verschwinden, ist nachzuweisen, daß der Operator

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

ein HERMITEscher Operator ist.

Lösung

Die Differentation stellt eine lineare Operation dar. Um den Nachweis zu führen, daß der Operator selbstadjungiert ist, gehen wir aus von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^* p_x u_2\, \mathrm{d}x = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^*\, i\hbar \frac{\partial u_2}{\partial x}\, \mathrm{d}x .$$

Durch partielle Integration wird die rechte Seite gleich

$$\left[-i\hbar u_1^* u_2\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\hbar u_2 \frac{\partial u_1^*}{\partial x}\, \mathrm{d}x .$$

Da u_1 und u_2 im Unendlichen verschwinden, verbleibt lediglich noch das zweite Glied, das auch in der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_2 i\hbar \frac{\partial u_1^*}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 p_x^* u_1^* \, dx$$

geschrieben werden kann. Es gilt also

$$\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^* p_x u_2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 p_x^* u_1^* \, dx,}$$

womit der Nachweis der Hermitizität des Operators p_x erbracht ist.

397. Auf Grund der Definition des Impulsoperators

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1}$$

und des Ortsoperators

$$\vec{r} = \vec{r}(x; y; z) = (x; y; z) \tag{2}$$

ist nachzuweisen, daß gleichgerichtete Komponenten des Impulses und des Ortsvektors nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden können.

Lösung

Wir greifen für diesen Nachweis die x-Komponente heraus. Es gilt

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad x = x. \tag{3}$$

Wenn zwei physikalische Größen L und M gleichzeitig meßbar sein sollen, so muß für ihre Operatoren gelten

$$LM\psi - ML\psi = 0.$$

Dagegen erhalten wir im vorliegenden Fall

$$p_x x\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\hbar\psi,$$

$$xp_x\psi = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

d. h.,

$$\underline{(xp_x - p_x x)\,\psi = i\hbar\psi.}$$

Es können also die Größen x und p_x nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden.

398. Es soll untersucht werden, ob die Ortskoordinate y und die Impulskoordinate p_x gleichzeitig gemessen werden können.

Lösung

Es ist

$$p_x = -\mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad y = y.$$

Daraus folgt

$$(p_x y - y p_x)\,\psi = -\mathrm{i}\,\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}y - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi.$$

Da x und y voneinander unabhängige Variablen sind, folgt

$$\frac{\partial}{\partial x}y\psi = y\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und damit

$$\underline{(y p_x - p_x y)\,\psi = 0.}$$

Demnach sind die Ortskoordinate y und die Impulskoordinate p_x gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit meßbar.

399. Es soll untersucht werden, ob die Komponenten L_x, L_y, L_z des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ gleichzeitig gemessen werden können.

Lösung

Die Koordinaten des Drehimpulsoperators folgen aus

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir

$$L_x = y p_z - z p_y,$$

$$L_y = z p_x - x p_z,$$

$$L_z = x p_y - y p_x.$$

Weiter ergibt sich

$$L_x L_y = (y p_z - z p_y)(z p_x - x p_z) =$$
$$= y p_z\, z p_x - z^2 p_x p_y - x y p_x^2 + x z p_y p_z.$$

Dagegen folgt

$$L_y L_x = (z p_x - x p_z)(y p_z - z p_y) =$$
$$= y z p_x p_z - x y p_z^2 - z^2 p_x p_y + x p_z z p_y.$$

Damit erhalten wir

$$L_x L_y - L_y L_x = y p_z z p_x - y z p_x p_z + x z p_y p_z - x p_z z p_y.$$

Beachten wir, daß

$$p_z z - z p_z = -\mathrm{i}\,\hbar \quad \text{nebst} \quad yzp_xp_z = yp_xzp_z,$$

so folgt

$$L_xL_y - L_yL_x = \mathrm{i}\,\hbar(xp_y - yp_x) = \mathrm{i}\,\hbar L_z.$$

Ebenso ergibt sich

$$\underline{L_yL_z - L_zL_y = \mathrm{i}\,\hbar L_x},$$

$$\underline{L_zL_x - L_xL_z = \mathrm{i}\,\hbar L_y}.$$

Die Komponenten des Drehimpulses sind also nicht gleichzeitig meßbar.

400. Berechnen Sie den Operator der kinetischen Energie und untersuchen Sie, ob die kinetische Energie gleichzeitig mit dem Impuls gemessen werden kann.

Lösung

Aus

$$E_k = \frac{m}{2}v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

folgt

$$E_k = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(-\mathrm{i}\,\hbar\nabla)^2}{2m} = -\hbar^2\frac{\Delta}{2m}$$

mit

$$\nabla^2 = \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Wenn wir entscheiden wollen, ob beide Größen gleichzeitig gemessen werden können. müssen wir berechnen:

$$E_k\vec{p} - \vec{p}E_k = -\hbar^2\frac{\Delta}{2m}(-\mathrm{i}\,\hbar\nabla) - (-\mathrm{i}\,\hbar\nabla)\left(-\hbar^2\frac{\Delta}{2m}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{i}\,\hbar^3}{2m}(\Delta\nabla - \nabla\Delta).$$

Die Reihenfolge, in der die Operatoren Δ und ∇ auf eine Funktion angewandt werden, ist ohne Einfluß auf das Resultat. Damit folgt

$$\underline{E_k\vec{p} - \vec{p}E_k = 0.}$$

Kinetische Energie und Impuls eines Teilchens sind gleichzeitig meßbar.

401. Es soll die SCHRÖDINGER-Gleichung aus der allgemeinen Form

$$H\Psi(x; y; z; t) = E\Psi(x; y; z; t) \tag{1}$$

für den Fall des Potentials $E_p = E_p(x;y;z)$ abgeleitet werden.

Lösung

Der HAMILTON-Operator H hat die Gestalt

$$H = E_k + E_p. \tag{2}$$

Für den Operator der kinetischen Energie ist zu schreiben:

$$E_k = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(-\mathrm{i}\,\hbar\nabla)^2}{2m} = -\hbar^2\,\frac{\Delta}{2m}, \tag{3}$$

während für den Operator der potentiellen Energie gilt

$$E_p = E_p(x; y; z).$$

Ferner ist

$$E = \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}.$$

Damit folgt aus Gl. (1) die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\Psi - E_p(x; y; z)\,\Psi = 0. \tag{4}$$

402. Ermitteln Sie eine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für den Fall, daß keine zeitlich veränderlichen äußeren Kräfte wirken und daher der HAMILTON-Operator H nicht von der Zeit abhängt.

Lösung

Zur Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H(x; y; z)\,\Psi \tag{1}$$

wird der Produktansatz

$$\Psi(x; y; z; t) = \varphi(t)\,\psi(x; y; z) \tag{2}$$

verwendet. Wir setzen diesen in die SCHRÖDINGER-Gleichung ein und erhalten

$$\mathrm{i}\,\hbar\psi(x; y; z)\,\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi(t)\,H\psi(x; y; z). \tag{3}$$

Wir separieren Gl. (3) nach den Variablen t und x, y, z und erhalten

$$\frac{\mathrm{i}\,\hbar\,\dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}}{\varphi(t)} = \frac{H\psi(x; y; z)}{\psi(x; y; z)}. \tag{4}$$

Wenn wir die Separationskonstante mit E bezeichnen, so folgen aus Gl. (3) die beiden Differentialgleichungen

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = E\varphi(t), \quad H\psi(x;y;z) = E\psi(x;y;z). \tag{5,1) (5,2}$$

Gl. (5,1) hat die Lösung

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}, \tag{6}$$

Gl. (5,2) lautet, nach den einzelnen Summanden des HAMILTON-Operators aufgelöst,

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi = E_\mathrm{p}\psi = E\psi. \tag{7}$$

Diese Gleichung wird als SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände bezeichnet. Wenn man ihre Lösung $\psi = \psi_n(x;y;z)$ kennt, so läßt sich damit die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung (1) schreiben:

$$\underline{\Psi(x;y;z;t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t}\,\psi_n(x;y;z).} \tag{8}$$

403. Der Grundzustand des Wasserstoffatoms wird durch die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi = C\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}, \quad a_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}\mathrm{m} \tag{1}$$

beschrieben. Diese Funktion ist zu normieren. Wie groß ist nach Gl. (1) die Wahrscheinlichkeit, das umlaufende Elektron innerhalb einer Kugel vom Radius $4a_1$ anzutreffen?

Lösung

Entsprechend der Normierungsvorschrift muß

$$\int \psi\psi^*\,\mathrm{d}\tau = 1 \tag{2}$$

sein, wobei das Integral über den gesamten Bereich, in dem sich das Elektron aufhalten kann, zu erstrecken ist. Wir unterteilen diesen Raum in Kugelschalen (Bild 206) mit dem Volumen

$$\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r. \tag{3}$$

Demnach muß gelten

$$4\pi\,|C|^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\,r^2\,\mathrm{d}r = 1. \tag{4}$$

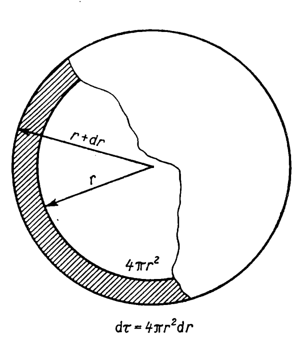


Bild 206

Zur Berechnung dieses Integrals verwenden wir die Formel

$$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x} = \frac{n!}{\beta^{n+1}} \tag{5}$$

und erhalten aus Gl. (4)

$$\pi\,|C|^2\,a_1^3 = 1 \quad \text{bzw.} \quad C = \frac{1}{\sqrt{\pi\,a_1^3}}\,. \tag{6}$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb einer Kugel mit dem Radius $4a_1$ ergibt sich aus

$$\int \psi\psi^*\,d\tau = \frac{1}{\pi\,a_1^3}\int_0^{4a_1} e^{-\frac{2r}{a_1}}\,4\pi r^2\,dr. \tag{7}$$

Wenn wir transformieren

$$\xi = \frac{2r}{a_1},$$

so ergibt sich

$$\int \psi\psi^*\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^8 e^{-\xi}\,\xi^2\,d\xi = \frac{1}{2}\left[e^{-\xi}(\xi^2 + 2\xi + 2)\right]_0^8 =$$

$$= \frac{-0{,}00034\,(64 + 16 + 2) + 2}{2} = 0{,}986.$$

In 98,6% aller Fälle befindet sich das durch die Lösungsfunktion nach Gl. (1) beschriebene Teilchen innerhalb einer Kugel mit dem Radius $4a_1$.

404. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den durch die Lösungsfunktion

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}}\,e^{-\frac{r}{a_1}}$$

beschriebenen Grundzustand des Wasserstoffatoms, das Elektron innerhalb einer Kugelschale mit dem Radius a_1 und der Dicke $dr = 0{,}1\,a_1$ anzutreffen (Bild 206)?

Lösung

Wegen der geringen Dicke der Kugelschale $dr = 0{,}1\,a_1$ ist eine Integration nicht erforderlich. Wir können daher schreiben:

$$\psi\psi^*\,d\tau = \frac{1}{\pi a_1^3}\,e^{-\frac{2r}{a_1}}\,4\pi r^2\,dr = 4\,e^{-2}\,\frac{dr}{a_1} = 4\cdot 0{,}135\cdot 0{,}1 = 0{,}054.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,4% befindet sich das Teilchen in der angegebenen Kugelschale.

405. Die Funktion

$$\psi_n = C_n H_n(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{1}$$

mit den HERMITEschen Polynomen

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} = (2\xi)^n \quad \frac{n(n-1)}{1!} (2\xi)^{n-2} + \cdots \tag{2}$$

sowie

$$\xi = \frac{x}{x_0}; \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$$

stellt eine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für den harmonischen Oszillator dar (m Masse, ω_0 Eigenfrequenz, x Auslenkung). Gl. (1) ist zu normieren.

Lösung

Zur Normierung der Funktion ψ_n muß die Bedingung

$$\int \psi_n \psi_n^* \, dx = \int \psi_n^2 \, dx = 1 \tag{3}$$

erfüllt werden. Es gilt zunächst

$$\int \psi_n^2(\xi)\, d\xi = C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(\xi)\, e^{-\xi^2}\, d\xi = C_n^2 (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}\, d\xi. \tag{4}$$

Der letzte Ausdruck ergibt nach partieller Integration

$$C_n^2 (-1)^n \left\{ \left[H_n(\xi) \frac{d^{n-1} e^{-\xi^2}}{d\xi^{n-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1} e^{-\xi^2}}{d\xi^{n-1}} \frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\, d\xi \right\}. \tag{5}$$

Hierin verschwindet der erste Summand beim Einsetzen der Integrationsgrenzen, da der Exponentialfaktor für das Verhalten der gesamten Funktion bestimmend ist. Der zweite Summand wird weiter partiell integriert. Wenn wir dieses Verfahren n-mal anwenden, ergibt sich schließlich

$$\int \psi_n^2(\xi)\, d\xi = C_n^2 (-1)^n (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n}\, d\xi. \tag{6}$$

Aus Gl. (2) folgt

$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!$$

Ferner ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\pi}. \tag{7}$$

Wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{x_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2 \frac{x}{x_0}\,\mathrm{d}x = C_n^2(-1)^{2n}\,2^n\,n!\,\sqrt{\pi} \tag{8}$$

erhalten wir schließlich unter Beachtung von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2\left(\frac{x}{x_0}\right)\mathrm{d}x = 1 \tag{9}$$

für die gesuchte Normierungskonstante den Ausdruck

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\,\sqrt{\pi}\,x_0}} = \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\sqrt[4]{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}}. \tag{10}$$

406. Der Quantenzustand eines in der ersten Grundschwingung befindlichen harmonischen Oszillators wird durch die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_1 = -C_1 H_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

beschrieben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das betrachtete Teilchen, ein Proton mit der Masse $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, im Intervall $2x_0 < x < 2{,}1x_0$ anzutreffen? Es ist $\omega_0 = 5{,}21 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$. Die Bezeichnungen wurden wie in Beispiel 405 verwendet.

Lösung

Nach Beispiel 405, Gl. (2), gilt

$$\psi_1 = \frac{-1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}\,x_0}} H_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

mit

$$H_1(\xi) = 2\xi, \quad \xi = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}.$$

Wir erhalten damit für die gesuchte Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$\psi_1^2\,\mathrm{d}x = \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}\,x_0^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x_0^2}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\frac{0{,}1}{2}\,\mathrm{e}^{-4} = \frac{4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0183}{1{,}77} = 0{,}00413.$$

Dabei ist

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} = \sqrt{\frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 5{,}21 \cdot 10^{14}}}\ \mathrm{m} = \sqrt{1{,}21 \cdot 10^{-22}}\ \mathrm{m},$$

$$x_0 = 0{,}11 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

Demnach hat der betrachtete Oszillator mit einer Wahrscheinlichkeit von <u>0,413 %</u> eine Auslenkung zwischen $0{,}22 \cdot 10^{-10}$ m und $0{,}231 \cdot 10^{-10}$ m.

407. Nach dem **Greenschen Satz** gilt

$$\iiint (\psi_k \Delta\psi_l^* - \psi_l^* \Delta\psi_k)\, d\tau = \oiint \left(\psi_k \frac{\partial \psi_l^*}{\partial \vec{u}} - \psi_l \frac{\partial \psi_k^*}{\partial \vec{u}}\right) \partial\sigma. \quad (1)$$

Dabei gibt $\vec{u}$ die Richtung der äußeren Normalen auf die Oberfläche σ an. Es ist nachzuweisen, daß die Lösungsfunktionen ψ_k, ψ_l der SCHRÖDINGER-Gleichung orthogonal sind.

Lösung

Das Integrationsgebiet wird über den gesamten Raum erstreckt. Da im Unendlichen die Lösungsfunktionen ψ_k und ψ_l verschwinden, muß auch das Oberflächenintegral verschwinden.
Nach SCHRÖDINGER gelten im stationären Fall die Gleichungen

$$\Delta\psi_{l\,k} = \frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E_{k,l})\,\psi_{k,l}, \quad \Delta\psi_{k,l}^* = \frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E_{k,l})\,\psi_{k,l}^*. \quad (2)$$

E_k und E_l geben dabei die Gesamtenergien E in den Quantenzuständen k und l an. Wenn wir die Gl. (2) in den GREENschen Satz einsetzen, erhalten wir

$$\frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E_l)\iiint \psi_k\psi_l^*\, d\tau = \frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E_k)\iiint \psi_k\psi^{l*}\, d\tau \quad (3)$$

und daraus

$$(E_k - E_l)\iiint \psi_k\psi_l^*\, d\tau = 0.$$

Für $E_k \neq E_l$ folgt somit die Orthogonalitätsbeziehung

$$\underline{\iiint \psi_k\psi_l^*\, d\tau = 0.}$$

408. An Hand der SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände ist nachzuweisen, daß die erste Ableitung der Wellenfunktion stetig ist, auch dann, wenn die potentielle Energie sich sprunghaft verändert. Dieser Nachweis ist unter der Voraussetzung zu führen, daß nur von der Ortsvariablen x eine Abhängigkeit besteht.

Lösung

Bei ausschließlicher Abhängigkeit von der Variablen x lautet die SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E_p - E)\,\psi = 0. \quad (1)$$

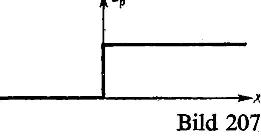


Bild 207

Die potentielle Energie sei an der Stelle $x = 0$ unstetig (Bild 207). Wenn man die SCHRÖDINGER-Gleichung über einen Bereich von $x = -\varepsilon$ bis $x = +\varepsilon$ integriert, so

folgt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(E_p - E)\,\psi\,dx = 0. \qquad (2)$$

Auf Grund der Beziehung

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx = \left[\frac{d\psi}{dx}\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = \frac{d\psi(+\varepsilon)}{dx} - \frac{d\psi(-\varepsilon)}{dx}$$

ergibt sich aus Gl. (2)

$$\frac{d\psi(+\varepsilon)}{dx} - \frac{d\psi(-\varepsilon)}{dx} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(E_p - E)\,\psi\,dx.$$

Im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ verschwindet das rechts stehende Integral, und es bleibt

$$\underline{\frac{d\psi(+\varepsilon)}{dx} = \frac{d\psi(-\varepsilon)}{dx}},$$

d. h., die erste Ableitung der Wellenfunktion ist stetig.

409. Aus der Kontinuitätsgleichung soll auf die Dichte des Teilchenstroms geschlossen werden.

Lösung

Wir wenden die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0 \qquad (1)$$

an. Dabei bezeichnen wir mit $\varrho = \varrho\,(x;y;z;t)$ die mittlere Dichte der Teilchenzahl, mit J die mittlere Dichte des Teilchenstroms. In der Quantentheorie haben wir zu setzen

$$\varrho = \Psi\Psi^*. \qquad (2)$$

Die Wellenfunktionen Ψ und Ψ^* genügen den SCHRÖDINGER-Gleichungen

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\triangle\Psi - E\Psi = 0 \qquad (3)$$

und

$$-\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\triangle\Psi^* - E_p\Psi^* = 0. \qquad (4)$$

Wir multiplizieren Gl. (3) mit Ψ^* und Gl. (4) mit Ψ und subtrahieren, so daß sich ergibt

$$\mathrm{i}\,\hbar\left(\Psi^*\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\,\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\,(\Psi^*\triangle\Psi - \Psi\triangle\Psi^*) = 0. \qquad (5)$$

Auf Grund von Gl. (2) folgt weiter

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi^* \Delta\Psi - \Psi\Delta\Psi^*) = 0. \tag{6}$$

Durch Vergleich mit der Kontinuitätsgleichung (1) ergibt sich somit

$$\operatorname{div}\vec{J} = \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi\Delta\Psi^* - \Psi^*\Delta\Psi). \tag{7}$$

Hieraus folgt

$$\vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi). \tag{8}$$

Wir differenzieren Gl. (8) und erhalten

$$\nabla\vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\nabla\Psi\nabla\Psi^* + \Psi\nabla^2\Psi^* - \nabla\Psi^*\nabla\Psi - \Psi^*\nabla^2\Psi),$$

d. h.

$$\nabla\vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi\Delta\Psi^* - \Psi^*\Delta\Psi),$$

wie es gemäß Gl. (7) sein muß. $\vec{J}$ hat daher den Charakter einer Massenstromdichte. Um die mittlere Dichte $\bar{j}$ des elektrischen Stromes zu erhalten, müssen wir $\vec{J}$ mit der Elementarladung e multiplizieren. Es folgt für die elektrische Stromdichte

$$\bar{j} = e\vec{J} = \frac{\mathrm{i}\hbar e}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi).$$

410. Potentialschwelle. Die potentielle Energie sei wie folgt vorgegeben:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & E_\mathrm{p} = 0 & \text{für} \quad x < 0, \\ \text{II} & E_\mathrm{p} = E_0 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq l, \\ \text{III} & E_\mathrm{p} = 0 & \text{für} \quad x > l. \end{array}\right\} \tag{1}$$

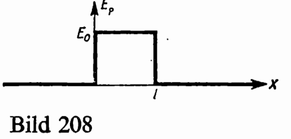


Bild 208

Eine derartige Potentialverteilung wird als Potentialschwelle bezeichnet. Es soll lediglich eine Abhängigkeit des Potentials von der räumlichen Variablen x bestehen.
Von links falle ein Elektronenstrahl ein (Bild 208). Für die einzelnen Bereiche von x sind die Quantenzustände zu berechnen. Insbesondere ist der reflektierte und der durch die Potentialschwelle hindurchgehende Anteil des Elektronenstrahls zu bestimmen. Die Elektronenenergie sei $E = 100$ eV, die Höhe der Potentialschwelle $E_0 = 50$ eV, ihre Breite $l = 10^{-10}$ m.

Lösung

Die Schrödinger-Gleichung für stationäre Zustände bei Abhängigkeit von nur einer Variablen x lautet

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_\mathrm{p})\psi = 0. \tag{2}$$

Wir setzen

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad n = \sqrt{\frac{E - E_p}{E}} \tag{3}$$

und erhalten für die Bereiche I und III

$$n = 1,$$

dagegen für den Bereich II

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{E - E_0}{E}}. \tag{4}$$

Für die Bereiche I und III ergibt sich somit die SCHRÖDINGER-Gleichung zu

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{5}$$

dagegen für den Bereich II

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k^2 n_0^2 \psi = 0. \tag{6}$$

Die Lösungen in den einzelnen Bereichen lauten:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I} \quad \psi = \psi_{\text{I}}(x) = A_{\text{I}}\, e^{ikx} + B_{\text{I}}\, e^{-ikx},\\
&\text{II} \quad \psi = \psi_{\text{II}}(x) = A_{\text{II}}\, e^{ikn_0x} + B_{\text{II}}\, e^{-ikn_0x},\\
&\text{III} \quad \psi = \psi_{\text{III}}(x) = A_{\text{III}}\, e^{ikx} + B_{\text{III}}\, e^{-ikx}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bis auf den nicht aufgeführten Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ erhalten wir also ebene DE-BROGLIE-Wellen.

Dem von links einfallenden Teilchenstrom entspricht im Bereich I eine von links nach rechts fortschreitende DE-BROGLIE-Welle. Es wird daher $A_{\text{I}} = 1$ gesetzt. Ferner können wir $B_{\text{III}} = 0$ annehmen, da $B_{\text{III}} \neq 0$ eine von rechts einfallende Welle bedeuten würde.

Zur Bestimmung der Amplituden B_{I}, A_{II}, B_{II}, A_{III} verwenden wir die Stetigkeit der Lösungsfunktion und ihrer ersten Ableitung. Es muß also erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
&\psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{II}}(0), \qquad \psi_{\text{II}}(l) = \psi_{\text{III}}(l),\\
&\frac{d\psi_{\text{I}}(0)}{dx} = \frac{d\psi_{\text{II}}(0)}{dx}, \quad \frac{d\psi_{\text{II}}(l)}{dx} = \frac{d\psi_{\text{III}}(l)}{dx}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Daraus folgt:

$$1 + B_{\text{I}} = A_{\text{II}} + B_{\text{II}},$$

$$A_{\text{II}}\, e^{ikn_0l} + B_{\text{II}}\, e^{-ikn_0l} = A_{\text{III}}\, e^{ikl},$$

$$1 - B_{\text{I}} = n_0(A_{\text{II}} - B_{\text{II}}),$$

$$A_{\text{II}}\, e^{ikn_0l} - B_{\text{II}}\, e^{-ikn_0l} = A_{\text{III}}\, n_0\, e^{ikl}.$$

Hieraus erhalten wir die Lösung

$$\left.\begin{aligned} B_{\mathrm{I}} &= \frac{-2\,\mathrm{i}\,(1-n_0^2)\sin kn_0l}{\triangle}, \quad A_{\mathrm{II}} = \frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kn_0l}(1+n_0)}{\triangle}, \\ B_{\mathrm{II}} &= \frac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kn_0l}\,(1-n_0)}{\triangle}, \quad A_{\mathrm{III}} = \frac{4n_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl}}{\triangle}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

mit

$$\triangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kn_0l}\,(1+n_0)^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn_0l}\,(1-n_0)^2.$$

Für den Elektronenstrom der einfallenden Welle ergibt sich

$$J_e = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi_{\mathrm{I}}\nabla\psi_{\mathrm{I}}^* - \psi_{\mathrm{I}}^*\nabla\psi_{\mathrm{I}}) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk}}{\mathrm{d}x}\right),$$

d. h.,

$$J_e = \frac{\hbar k}{m}. \tag{10}$$

In gleicher Weise erhalten wir für den Elektronenstrom der reflektierten Welle $B_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ und für den der gebrochenen Welle $A_{\mathrm{III}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$$J_r = -\frac{\hbar k}{m}B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{I}}^*, \quad J_d = \frac{\hbar k}{m}A_{\mathrm{III}}A_{\mathrm{III}}^*. \tag{11}$$

Als Reflexionskoeffizient r und als Durchgangskoeffizient d finden wir somit

$$r = \frac{|\vec{J}_r|}{|\vec{J}_e|} = B_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{I}}^*, \quad d = \frac{|\vec{J}_d|}{|\vec{J}_e|} = A_{\mathrm{III}}A_{\mathrm{III}}^*. \tag{12}$$

Wir setzen $E > E_0$ voraus. Aus den Gln. (9) u. (12) folgt dann

$$r = \frac{(1-n_0^2)^2\sin^2 kn_0l}{2n_0^2(1+\cos^2 kn_0l)+\sin^2 kn_0l(1+n_0^4)}, \tag{13}$$

$$d = \frac{4n_0^2}{2n_0^2(1+\cos^2 kn_0l)+\sin^2 kn_0l(1+n_0^4)}. \tag{14}$$

Wir setzen die vorgegebenen Größen ein und finden aus Gl. (4) die Brechzahl

$$n_0 = \sqrt{\frac{E-E_0}{E}} = \sqrt{\frac{100-50}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707.$$

Aus Gl. (3) folgt für die Wellenzahl

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 100\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{(1{,}05\cdot 10^{-34})^2}}\ \mathrm{m}^{-1} =$$

$$= \frac{5{,}39\cdot 10^{-24}}{1{,}05\cdot 10^{-34}}\,\mathrm{m}^{-1} = 5{,}14\cdot 10^{10}\mathrm{m}^{-1}.$$

Weiter erhalten wir

$$kn_0l = 5{,}14\cdot 10^{10}\cdot 0{,}707\cdot 10^{-10} = 3{,}634,$$

$$\sin kn_0l = \sin 208{,}2° = -\sin 28{,}2° = -0{,}475,$$

$$\sin^2 kn_0l = 0{,}226, \quad \cos^2 kn_0l = 0{,}774.$$

Daraus ergibt sich

$$r = \frac{(1 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}226}{2 \cdot 0{,}5\,(1 + 0{,}774) + 0{,}226\,(1 + 0{,}25)} = \frac{0{,}0565}{2{,}056} = 0{,}027,$$

$$d = \frac{2}{2{,}056} = 0{,}973.$$

Es werden also weniger als drei Prozent reflektiert; der weitaus größere Teil des Strahls geht durch die Potentialschwelle hindurch.

411. Es liege eine Potentialschwelle wie in Beispiel 410 vor, jedoch sei die Höhe E_0 der Schwelle größer als die Teilchenenergie E. Wie lauten die Ausdrücke für den reflektierten, wie für den gebrochenen Teil des einfallenden Strahls? Welche Zahlenwerte ergeben sich für den Fall $E = 10\,\text{eV}$, $E_0 = 20\,\text{eV}$?

Lösung

Gemäß Gl. (4) in Beispiel 410 wird die Brechzahl n_0 imaginär:

$$n_0 = \sqrt{\frac{E - E_0}{E}} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{E_0 - E}{E}} = \mathrm{i}\,|n_0|.$$

Damit folgt aus Gl. (9) von Beispiel 410, wenn wir beachten, daß $\sin \mathrm{i}\,\varphi = \mathrm{i} \sinh \varphi$ ist,

$$B_\mathrm{I} = \frac{2(1 + |n_0|^2) \sinh k\,|n_0|\,l}{\triangle},$$

$$A_\mathrm{III} = \frac{4\,\mathrm{i}\,|n_0|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl}}{\triangle},$$

mit

$$\triangle = \mathrm{e}^{k|n_0|l}\,(1 + \mathrm{i}\,|n_0|)^2 - \mathrm{e}^{-k|n_0|l}\,(1 - \mathrm{i}\,|n_0|)^2.$$

Hieraus erhalten wir

$$r = B_\mathrm{I} B_\mathrm{I}^* = \frac{(1 + |n_0|^2)^2 \sinh^2 k|n_0|\,l}{(1 - |n_0|^2)^2 \sinh^2 k|n_0|\,l + 4\,|n_0|^2 \cosh^2 k\,|n_0|\,l},$$

$$d = A_\mathrm{III} A_\mathrm{III}^* = \frac{4\,|n_0|^2}{(1 - |n_0|^2)^2 \sinh^2 k\,|n_0|\,l + 4\,|n_0|^2 \cosh^2 k\,|n_0|\,l}.$$

Mit den gegebenen Größen folgt

$$n_0 = \mathrm{i}\sqrt{\frac{E_0 - E}{E}} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{20 - 10}{10}} = \mathrm{i},$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}}\ \mathrm{m}^{-1} = 1{,}63 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Daraus folgt weiter

$$\sinh k|n_0|\,l = \sinh 1{,}63 = 2{,}45, \quad \sinh^2 1{,}63 = 6{,}01,$$

$$\cosh k|n_0|\,l = \cosh 1{,}63 = 2{,}65, \quad \cosh^2 1{,}63 = 7{,}01,$$

$$\mathrm{e}^{2k|n_0|l} = \mathrm{e}^{3{,}26} = 26{,}1.$$

Diese Werte, in die Formeln für r und d eingesetzt, ergeben

$$r = \frac{(1 + 1^2)^2 \cdot 6{,}01}{4 \cdot 1^2 \cdot 7{,}01} = \underline{0{,}857},$$

$$d = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 1^2 \cdot 7{,}01} = \underline{0{,}143}.$$

Demnach durchlaufen 14,3 % der einfallenden Elektronen die Potentialschwelle, obwohl ihre Energie E kleiner als das zu überwindende Potential E_0 ist (quantenmechanischer **Tunneleffekt**).

412. Wie groß ist der Anteil der eine Schwelle durchlaufenden Elektronen, wenn wie im vorhergehenden Beispiel $E = 10$ eV, $E_0 = 20$ eV, die Schwellenlänge aber $l = 10^{-9}$ m beträgt?

Lösung

Für die Werte n_0 und k ergibt sich wie in Beispiel 411

$$n_0 = \mathrm{i}, \quad k = 1{,}63 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Damit folgt

$$k\,|n_0|\,l = 1{,}63 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} = 16{,}3 \gg 1.$$

Nach Definition der hyperbolischen Funktionen gilt

$$\sinh \varphi = \frac{\mathrm{e}^{\varphi} - \mathrm{e}^{-\varphi}}{2}, \quad \cosh \varphi = \frac{\mathrm{e}^{\varphi} + \mathrm{e}^{-\varphi}}{2}.$$

Für $\varphi \gg 1$ kann der Summand $\mathrm{e}^{-\varphi}$ vernachlässigt werden. Damit folgt

$$\sinh k|n_0|\,l \approx \cosh k\,|n_0|\,l \approx \frac{\mathrm{e}^{k|n_0|l}}{2}.$$

Der im vorhergehenden Beispiel abgeleitete Durchlässigkeitskoeffizient

$$d = \frac{4\,|n_0|^2}{(1 - |n_0|^2)^2 \sinh^2 k|n_0|\,l + 4\,|n_0|^2 \cosh^2 k\,|n_0|\,l}$$

geht damit wegen $k|n_0|l \gg 1$ über in

$$d = \frac{16\,|n_0|^2\,\mathrm{e}^{-2k|n_0|l}}{(1 + |n_0|^2)^2}.$$

Mit den gegebenen Zahlen folgt

$$d = \frac{16 \cdot 1}{(1 + 1)^2}\,\mathrm{e}^{-32{,}6} = \underline{3 \cdot 10^{-14}}.$$

Der quantenmechanische Tunneleffekt tritt nur auf, wenn die Schwellenbreite von atomarer Größenordnung ist. Mit zunehmender Schwellenbreite nimmt die Durchlässigkeit der Potentialschwelle sehr stark ab.

413. An eine Wolframkatode wird ein elektrisches Feld gelegt. Es ist abzuschätzen, von welcher Feldstärke an die entstehende „kalte Emission" einen nachweisbaren Elektronenstrom ergibt. Für die effektive Austrittsarbeit W sei der Wert $W = 4\,\text{eV}$ angenommen.

Lösung

Die Austrittsarbeit W muß aufgewendet werden, um ein Elektron aus dem Metall freizusetzen. Die potentielle Energie des Elektrons ist im Metall kleiner als im Vakuum. Sie sei im Metall gleich Null angesetzt. Wenn kein äußeres Feld anliegt, so ist außerhalb des Metalls die potentielle Energie gleich der Austrittsarbeit W.
Das angenommene äußere Feld wirkt auf das Elektron mit der Kraft $e\vec{E}$ senkrecht zur Metalloberfläche (Bild 209). Die Richtung dieser Kraft wählen wir als x-Achse. An der Grenzfläche des Metalls ist $x = 0$. Als Potential der äußeren Kraft ergibt sich $-e|\vec{E}|x$. In dem vom elektrischen Feld erfüllten Vakuum beträgt die potentielle Energie

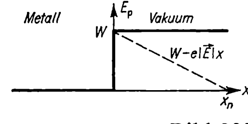


Bild 209

$$E_p = W - e|\vec{E}|\,x. \tag{1}$$

Nach Beispiel 412 ergibt sich als Durchlässigkeitskoeffizient für eine Schwelle der Breite l

$$d = \frac{16\,|n_0|^2}{(1 + |n_0|^2)^2}\, e^{-2k|n_0|l}. \tag{2}$$

Im vorliegenden Fall kann die Gesamtenergie E der Elektronen gegenüber der potentiellen Energie vernachlässigt werden. Somit folgt

$$k|n_0| = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{E_p - E}{E}} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E_p - E)} \approx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_p}. \tag{3}$$

Ebenso wird die infolge Elektronenemission induzierte Kraft vernachlässigt, da ihr Potential in der effektiven Austrittsarbeit enthalten ist.
Die potentielle Energie ist nicht konstant, sie nimmt linear ab. Wir zerlegen die Potentialverteilung in Schwellen konstanten Potentials der Breite dx. Für die Durchlässigkeit folgt

$$d = d_1\, e^{-2k|n_0(x_1)|dx_1} = d_2\, e^{-2k|n_0(x_2)|dx_2} \ldots = \bar{d}\, e^{-\int k|n_0(x)|dx}. \tag{4}$$

Dabei ist das Integral im Exponenten von $x_1 = 0$ bis zu einem Wert x_n zu erstrecken, für den das Potential $E_p = 0$ wird. Aus Gl. (1) ergibt sich

$$x_n = \frac{W}{e|\vec{E}|}. \tag{5}$$

Wir setzen die Gln. (3) u. (5) in Gl. (4) ein und erhalten

$$d = \bar{d} \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int_0^{\frac{W}{e|\vec{E}|}} \sqrt{W - e|\vec{E}|x}\, dx\right]. \tag{6}$$

Zur Auswertung des Integrals setzen wir

$$\frac{e|\vec{E}|}{W}x = \xi$$

und erhalten

$$\int_0^{\frac{W}{e|\vec{E}|}} \sqrt{W - e|\vec{E}|\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{W^{\frac{3}{2}}}{e|\vec{E}|}\int_0^1 \sqrt{1-\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{3}\frac{W^{\frac{3}{2}}}{e|\vec{E}|}.$$

Somit folgt

$$d = \bar{d}\exp\left[-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{W^{\frac{3}{2}}}{e|\vec{E}|}\right].$$

Metallplatte (Wo)

Bild 210

Wir verwenden die Schaltung nach Bild 210, und es ergibt sich ein gleichmäßig fließender Emissionsstrom. Aus seiner Stärke läßt sich die Emissionsdichte $\vec{j}$ bestimmen. Für sie erhalten wir nach Ausrechnung des Faktors $\bar{d}$, die hier nicht wiedergegeben wird,

$$|\vec{j}| = \frac{2{,}48\cdot 10^{-17}|\vec{E}|^2}{W}\exp\left[-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{W^{\frac{3}{2}}}{e|\vec{E}|}\right]\ \mathrm{Am^{-2}}.$$

Mit den entsprechenden Zahlenwerten für e, $\hbar$, m (W in eV ausgedrückt) folgt

$$|\vec{j}| = \frac{2{,}48\cdot 10^{-17}|\vec{E}|^2}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,W}\exp\left[-\frac{4\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}(1{,}6\cdot 10^{-19}\,W)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}|\vec{E}|}\right]\mathrm{Am^{-2}}$$

bzw

$$|\vec{j}| = 1{,}55\cdot 10^2\,\frac{|\vec{E}|^2}{W}\exp\left[-\frac{6{,}85\cdot 10^9\,W^{\frac{3}{2}}}{|\vec{E}|}\right]\mathrm{Am^{-2}}.$$

Wir setzen die effektive Austrittsarbeit $W = 4$ eV ein und finden

$$j = 1{,}55\cdot 10^2\,\frac{|\vec{E}|^2}{4}\exp\left[-\frac{6{,}85\cdot 10^9\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{|\vec{E}|}\right]\mathrm{Am^{-2}} =$$

$$= 38{,}7|\vec{E}|^2\exp\left[-\frac{54{,}8\cdot 10^9}{|\vec{E}|^2}\right]\mathrm{Am^{-2}} = 38{,}7|\vec{E}|^2\cdot 10^{-\frac{54{,}8\cdot 10^9}{|\vec{E}|\ln 10}} = \mathrm{Am^{-2}}$$

$$= 38{,}7|\vec{E}|^2\cdot 10^{-\frac{23{,}8\cdot 10^9}{|\vec{E}|}}\ \mathrm{Am^{-2}}.$$

Hiernach ist zu erwarten, daß erst von Feldstärken der Größenordnung $|\vec{E}| = 10^8 \cdots$ $\cdots 10^9\ \mathrm{V\,m^{-1}}$ an bei Wolfram eine kalte Emission nachweisbar wird.

A Aufgaben

528. Untersuchen Sie, ob der Operator $A = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ein HERMITEscher Operator ist.
529. Untersuchen Sie, ob die folgenden Operatoren HERMITEsche Operatoren sind:

$$A = \sqrt[2]{}, \quad B = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$C = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad D = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

530. Zeigen Sie, daß die Anwendung des Operators $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x$ auf die Funktion e^x ein anderes Ergebnis liefert als die Anwendung des Operators $x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.
531. Zu welchem Ergebnis führt die Anwendung des Operators $L = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)^2$ auf die Funktion $u(x) = \sin x$?
532. Unter welcher Bedingung ist es gestattet, den Operator $F^2 - G^2$ in $(F + G)(F - G)$ umzuformen?
533. Untersuchen Sie, ob die kinetische Energie und eine Ortskoordinate gleichzeitig gemessen werden können. Was folgt daraus zur Frage der gleichzeitigen Meßbarkeit von kinetischer und potentieller Energie?
534. Untersuchen Sie, mit welchen Ortskoordinaten die Komponente $\vec{L}_x$ des Drehimpulses gleichzeitig gemessen werden kann.
535. Untersuchen Sie, mit welchen Impulskoordinaten die Komponente $\vec{L}_x$ des Drehimpulses gleichzeitig gemessen werden kann.
536. Berechnen Sie das Quadrat des Drehimpulses in cartesischen Koordinaten.
537. Untersuchen Sie, ob das Quadrat des Drehimpulses gleichzeitig mit einer Komponente des Drehimpulses gemessen werden kann.
538. Lösen Sie die SCHRÖDINGER-Gleichung unter der Voraussetzung, daß die betrachteten Teilchen keinen äußeren Kräften unterliegen, d. h., daß die potentielle Energie $E_p = 0$ ist. Weiter sei vorausgesetzt, daß eine räumliche Abhängigkeit nur von der Variablen x besteht.
539. Der Grundzustand des Wasserstoffatoms sei durch die Funktion

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}}\, \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}$$

bestimmt. Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Bereich $\mathrm{d}r = a_1 \pm 3 \cdot 10^{-12}$ m anzutreffen ($a_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m).
540. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Grundzustand des Wasserstoffatoms das Elektron im Abstand $r > 2a_1$ anzutreffen?
541. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Grundzustand des Wasserstoffatoms das Elektron im Abstand $a_1 < r < 2a_1$ anzutreffen?
542. Normieren Sie die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi = C\left(2 - \frac{r}{a_1}\right) \mathrm{e}^{-\frac{r}{2a_1}}.$$

543. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, für den in Aufg. 542 angegebenen Quantenzustand das Elektron im Raum $4a_1 < r < 4{,}05\, a_1$ anzutreffen.
544. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem in der ersten Grundschwingung befindlichen harmonischen Oszillator das betrachtete Teilchen im Inter-

vall $x_0 < x < 1{,}1\, x_0$ anzutreffen?

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega_0}}.$$

545. Für einen in der ersten Grundschwingung befindlichen Oszillator sei $\omega_0 = 2{,}95 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$. Die reduzierte Masse zweier gegeneinander schwingender Sauerstoffatome ist $m = 13{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Auslenkung im Bereich $1{,}55 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} < x < 1{,}60 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$ anzutreffen?
546. Berechnen Sie die Durchlässigkeit d einer Potentialschwelle der Höhe $E_0 = 300$ eV, der Breite $l = 10^{-10}$ m für Elektronen mit der Energie $E = 400$ eV.
547. Berechnen Sie die Durchlässigkeit d und das Reflexionsvermögen r einer Potentialschwelle der Höhe $E_0 = 300$ eV und der Breite $l = 10^{-11}$ m für Elektronen der Energie $E = 100$ eV.
548. Wie verändert sich die Durchlässigkeit der Schwelle in Aufgabe 547, wenn sich die Schwellenbreite auf $l = 10^{-10}$ m verändert?
549. Eine Potentialschwelle habe die Höhe $E_0 = 200$ eV, die Elektronenenergie sei $E = 100$ eV. Welche Breite l müßte die Schwelle haben, damit 50% der einfallenden Elektronen reflektiert werden?
550. Eine Potentialschwelle habe die Höhe $E_0 = 10$ MeV, die Breite $l = 3 \cdot 10^{-14}$ m. Wie groß ist ihre Durchlässigkeit für α-Teilchen der Energie $E = 4{,}8$ MeV? Schätzen Sie die Zerfallskonstante $\lambda = n_s d$ und die Halbwertzeit $T_{1/2}$ ab. Die Größe $n_s = v/2r_0$ gibt die Zahl der Stöße an, die ein im Kern enthaltenes α-Teilchen je Sekunde auf den Potentialwall ausübt; die Geschwindigkeit v folgt aus der Wellenlänge der DE-BROGLIE-Welle. Die Wellenlänge ist größenordnungsmäßig gleich dem Kerndurchmesser $2r_0 \approx 2 \cdot 10^{-14}$ m. Zur Ableitung der Halbwertzeit beachte man das Zerfallsgesetz $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$.
551. Die effektive Austrittsarbeit des Nickels werde $W_{\text{eff}} = 10$ eV gesetzt. Welche Spannung muß angelegt werden, um einen durch kalte Emission entstehenden Elektronenstrom nachweisen zu können?
552. Bestimmen Sie die Energieniveaus und die Lösungsfunktionen für das in Bild 211 dargestellte Potential unter der Voraussetzung $E < E_0$.

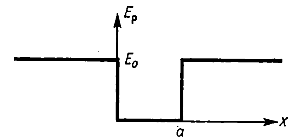


Bild 211

553. Aus der allgemeinen Formel für den Mittelwert einer Quantengröße L ist die zeitliche Ableitung des zugeordneten HERMITEschen Operators L zu bestimmen.
554. Bestimmen Sie die zeitliche Ableitung eines von der Zeit t nicht explizit abhängigen HERMITEschen Operators $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{AB}$.
555. Berechnen Sie die zeitliche Ableitung der Koordinaten x, y, z.
556. Berechnen Sie die zeitliche Ableitung des Impulsoperators.

6.3. Das Spektrum des Wasserstoffs und der wasserstoffähnlichen Atome

Für die Untersuchung kugelsymmetrischer Probleme wird der **Laplace-Operator** in Kugelkoordinaten dargestellt:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi},$$

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad \Delta_{\vartheta,\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Zwischen den verwendeten cartesischen Koordinaten x, y, z und den eingeführten Kugelkoordinaten r, ϑ, φ bestehen dabei (Bild 212) die Beziehungen

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Aus der Darstellung des LAPLACE-Operators in Kugelkoordinaten folgt für den Operator $\boldsymbol{T}_r$ des nur vom Radius r abhängigen Anteils der kinetischen Energie

$$\boldsymbol{T}_r = \boldsymbol{T}_r(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r,$$

während das Quadrat des Drehimpulses mit dem Operator

$$\vec{\boldsymbol{L}}^2 = \vec{\boldsymbol{L}}^2(\vartheta, \varphi) = -\hbar^2\Delta_{\vartheta,\varphi}$$

verknüpft ist.

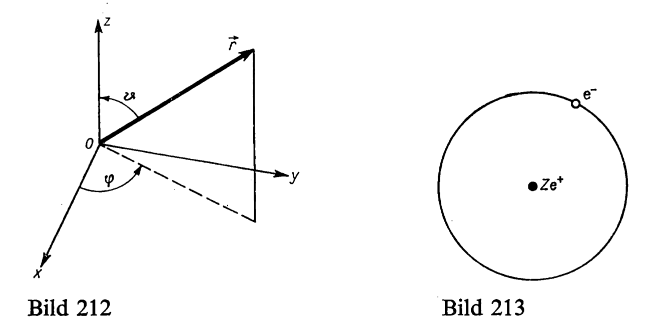


Bild 212 Bild 213

Bei Verwendung dieser beiden Operatoren erhält die SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände die Form

$$\boldsymbol{T}_r\psi + \frac{\vec{\boldsymbol{L}}^2\psi}{2mr^2} + (E_p - E)\psi = 0.$$

Beim Wasserstoff und bei den wasserstoffähnlichen Atomen wird die Kernladung ze^+ von einem Elektron e^- umkreist (Bild 213). Die potentielle Energie des Elektrons ist

$$E_p = -\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Zur Berücksichtigung der Kernmasse m_k wird im folgenden die Elektronenmasse m durch die *reduzierte Masse*

$$\mu = \frac{m m_k}{m + m_k}$$

ersetzt. Des weiteren wird die Variable

$$\varrho = \frac{2\sqrt{-2\mu E}}{\hbar} r = \frac{2zr}{n a_1}$$

eingeführt, wobei

$$a_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2}$$

den Radius der innersten Elektronenbahn des Wasserstoffs nach der BOHRschen Theorie angibt.

Damit erhält die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung die Form

$$\psi = \psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = C_{n,l,m} P_l^{|m|} (\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}\, e^{-\frac{\varrho}{2}} \varrho^l L_{n+l}^{2l+1}(\varrho).$$

Hierin bedeutet

$$L_k^s(\xi) = \frac{d^s}{d\xi^s} L_k(\xi)$$

das LAGUERREsche Polynom, wobei

$$L_k(\xi) = e^{\xi} \frac{d^k}{d\xi^k} (e^{-\xi} \xi^k)$$

ein Polynom k-ten Grades ist. Der Ausdruck

$$P_l^{|m|}(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}} P_l(\xi)$$

gibt die zugeordnete (tesserale) Kugelfunktion der (zonalen) Kugelfunktion l-ten Grades

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} [(\xi^2 - 1)^l]$$

an.

Die **Hauptquantenzahl** n bestimmt das Energieniveau

$$E = E_n = -\frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

die **Nebenquantenzahl** l das Quadrat des Drehimpulses

$$\vec{L}^2 = \vec{L}_l^2 = \hbar^2 l(l+1), \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

die **magnetische Quantenzahl** m die z-Komponente des Drehimpulses

$$L_z = \hbar m, \qquad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l.$$

Das Eigenwertproblem

$$\vec{L}^2 \psi = \vec{L}_l^2 \psi$$

wird durch die Eigenwerte $\vec{L}^2 = \vec{L}_l^2$ und durch die Eigenfunktionen

$$\psi = \psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!\,(2l+1)}{(l+|m|)!\,4\pi}}\, P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

gelöst. Der Faktor vor der Klammer ist dabei so gewählt, daß die Eigenfunktionen $\psi_{l,m}$ auf der Kugeloberfläche mit dem Wert 1 normiert sind. Es gilt

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi_{l',m'}(\vartheta, \varphi)\, \psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi = \delta_{l,l'}\, \delta_{m,m'}.$$

Dabei bedeutet

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} +1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

das **Kroneckersymbol.**

Zur Charakterisierung der Quantenzustände verwendet man Kurzbezeichnungen: Die erste Größe gibt die Hauptquantenzahl n an. Die zweite Bezeichnung steht für die Nebenquantenzahl l. Der Zustand $l = 0$ wird mit dem Symbol s, $l = 1$ mit p, $l = 2$ mit d, $l = 3$ mit f, $l = 4$ mit g usw. bezeichnet.

B Beispiele

414. Fertigen Sie eine Skizze der Spektrallinien des Wasserstoffatoms an.

Lösung

Das Energieniveau des Elektrons im Atom ist durch die Formel

$$E = E_n = -\frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

bestimmt, wobei für Wasserstoff $z = 1$ zu setzen ist. Im Falle $n = 1$ erhalten wir

$$E_1 = -\frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{(4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12})^2 \cdot 2 \cdot (1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}\ \mathrm{J} = -21{,}8 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} =$$

$$= -21{,}8 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{18}\ \mathrm{eV} = -13{,}6\ \mathrm{eV}.$$

Dabei wurde in erster Näherung die reduzierte Masse gleich der Elektronenmasse gesetzt. Die Energie von 13,6 eV ist aufzuwenden, um das Elektron vom Wasserstoffatom abzutrennen, es ist die **Ionisierungsenergie** des Wasserstoffs.
Für den Fall $n = 2$ erhalten wir demgemäß

$$E_2 = -\frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}\,\frac{1}{2^2} =$$

$$= \frac{-13{,}6}{4}\ \mathrm{eV} = -3{,}4\ \mathrm{eV},$$

das ist ein Viertel des Wertes für $n = 1$. In gleicher Weise folgen die Energiewerte für die Hauptquantenzahlen $n = 3, 4, 5, \cdots$. Für eine graphische Darstellung der Energiezustände wählen wir das Niveau des Zustandes $n = 1$ als Nullinie. Der Fall $n = 2$ entspricht somit einem Energieniveau von $-3{,}4 - (-13{,}6)\ \mathrm{eV} = 10{,}2\ \mathrm{eV}$. Für $n \to \infty$ nähert sich das Energieniveau dem Grenzwert 13,6 eV (Bild 214).

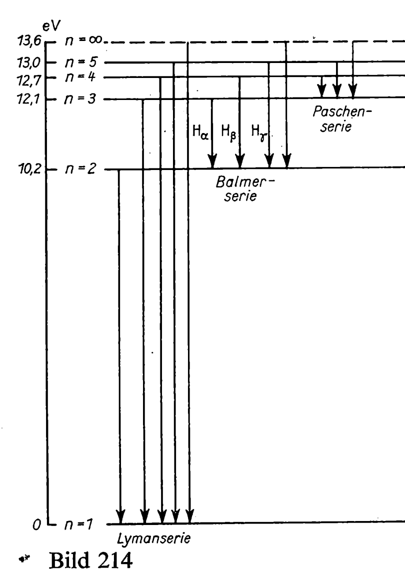
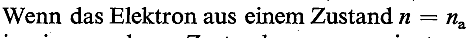


Bild 214


Wenn das Elektron aus einem Zustand $n = n_a$ in einen anderen Zustand $n = n_e$ springt, wird bei $n_a > n_e$ Strahlung emittiert. Die Frequenz der emittierten Strahlung ergibt sich nach dem **Bohrschen Postulat** zu

$$h\nu = E_a - E_e = \frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, \hbar^2}\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right).$$

Nach ihrem Endzustand n_e werden die emittierten Spektrallinien in Serien zusammengefaßt. In Bild 214 ist auch die Balmer-Serie dargestellt, die alle auf dem Zustand $n_e = 2$ endenden Spektrallinien enthält.

415. Berechnen Sie die Wellenlänge der H_α-Linie in Luft unter Normalverhältnissen. Die Brechzahl der Luft beträgt dabei $n_L = 1{,}000293$.

Lösung

Nach Beispiel 414 ist die Frequenz der emittierten Linie durch die Beziehung

$$h\nu = E_a - E_e = \frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right) \tag{1}$$

bestimmt. Wir legen der Berechnung die Wellenzahl $\bar{\nu} = \nu/c$ zugrunde und erhalten

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} = z^2 R \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right), \tag{2}$$

wobei

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)\, h^3 c} = \frac{e^4 \mu}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \tag{3}$$

die RYDBERG-Zahl angibt.
Wir berücksichtigen, daß für Wasserstoff gilt

$$\mu = \frac{m m_H}{m_H + m} = m \frac{1}{1 + \frac{m}{m_H}} = m \frac{1}{1 + \frac{1}{1836}}, \tag{4}$$

und es folgt

$$R_H = \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}}{8\,(8{,}854 \cdot 10^{-12})^2\,(6{,}624 \cdot 10^{-34})^3 \cdot 2{,}997 \cdot 10^8} \frac{1}{1 + \frac{1}{1836}} \,\mathrm{m}^{-1}. \tag{5}$$

Als genauer Wert für die RYDBERG-Zahl des Wasserstoffatoms im Vakuum ergibt sich hiermit

$$R_H = 1{,}09677 \cdot 10^7 \,\mathrm{m}^{-1}. \tag{6}$$

Die Wellenlänge der emittierten Linie werde im Vakuum mit λ, in Luft dagegen mit λ_L bezeichnet. Aus den Gln. (2) u. (3) folgt damit

$$\frac{\lambda}{\lambda_L} = n_L = \frac{R_{HL}}{R_H}. \tag{7}$$

Dabei bezeichnet R_H die RYDBERG-Zahl für Strahlung im Vakuum, R_{HL} für Strahlung in Luft.
Wir erhalten damit aus den Gln. (6) u. (7)

$$R_{HL} = n_L R_H = 1{,}000293 \cdot 1{,}09677 \cdot 10^7 \,\mathrm{m}^{-1} = 1{,}09709 \cdot 10^7 \,\mathrm{m}^{-1}. \tag{8}$$

Bei Emission der H_α-Linie ist $n_a = 3$, $n_e = 2$, ferner $z = 1$. Damit folgt

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_{HL}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1{,}09709 \cdot 10^7 \cdot \frac{5}{36} \,\mathrm{m}^{-1} = 0{,}152374 \cdot 10^7 \,\mathrm{m}^{-1} \tag{9}$$

und

$$\lambda_{H\alpha} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-7}}{1{,}09709} \,\mathrm{m} = \underline{6562{,}8 \cdot 10^{-10} \,\mathrm{m}}. \tag{10}$$

416. Für einfach ionisiertes Helium werde eine Linie der Wellenlänge $\lambda_{He} = 6560{,}4 \cdot 10^{-10}$ m gemessen. Sie entspricht dem Übergang von $n_a = 6$ auf $n_e = 4$. Die Messung der H_α-Linie ergebe die Wellenlänge $\lambda_H = 6563{,}1 \cdot 10^{-10}$ m. Berechnen Sie daraus die RYDBERG-Zahl für das Spektrum des einfach ionisierten Heliums. Für Vakuum ist $R_H = 1{,}09677 \cdot 10^7 \,\mathrm{m}^{-1}$.

Lösung

Die Wellenlänge der vom Helium emittierten Strahlung bestimmt sich aus

$$\frac{1}{\lambda_{He}} = z^2 R_{He} \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right) = 4R_{He}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2}\right) = R_{He}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{36} R_{He}.$$

Für die H_α-Linie gilt die Beziehung

$$\frac{1}{\lambda_H} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36} R_H.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\lambda_H}{\lambda_{He}} = \frac{R_{He}}{R_H}.$$

Korrekturen infolge der Einwirkung des umgebenden Mediums heben sich auf. Die RYDBERG-Zahl des einfach ionisierten Heliums im Vakuum ergibt sich damit zu

$$R_{He} = R_H \frac{\lambda_H}{\lambda_{He}} = 1{,}09677 \cdot 10^7 \frac{6563{,}1}{6560{,}4} \text{ m}^{-1} = \underline{1{,}09722 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}.$$

417. Aus den Werten der RYDBERG-Zahl für Wasserstoff und für einfach ionisiertes Helium ist die Elektronenmasse zu bestimmen.
Die Kernmasse des Heliumatoms ist $m_{He} = m_\alpha = 6{,}6447 \cdot 10^{-27}$kg, die Kernmasse des Wasserstoffatoms $m_H = m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg. Für die betreffenden RYDBERG-Zahlen gelten die genauen Werte $R_H = 1{,}0967757 \cdot 10^7$ m^{-1}, $R_{He} = 1{,}0972226 \cdot 10^7$ m^{-1}.

Lösung

Die RYDBERG-Zahl ist durch den Ausdruck

$$R = \frac{e^4 \mu}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

definiert, wobei

$$\mu = \frac{m m_k}{m + m_k}$$

die reduzierte Masse angibt.
Wir bestimmen das Verhältnis der RYDBERG-Zahlen von einfach ionisiertem Helium und Wasserstoff:

$$\frac{R_{He}}{R_H} = \frac{\mu_{He}}{\mu_H} = \frac{\dfrac{m m_{He}}{m_{He} + m}}{\dfrac{m m_H}{m_H + m}} = \frac{m_{He}(m_H + m)}{m_H(m_{He} + m)}.$$

Wir lösen diese Beziehung nach m auf und erhalten

$$m = \frac{R_{\mathrm{He}} - R_{\mathrm{H}}}{\dfrac{R_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{H}}} - \dfrac{R_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}}}},$$

in Zahlen

$$m = \frac{1{,}0972226 - 1{,}0967757}{(0{,}65573 - 0{,}16513) \cdot 10^{27}} \,\mathrm{kg} = \underline{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}.}$$

418. Bestimmen Sie den Operator L_z der z-Komponente des Drehimpulses in Kugelkoordinaten.

Lösung

Gemäß Beispiel 399 gilt in cartesischen Koordinaten

$$L_z = xp_y - yp_x = -\,\mathrm{i}\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Wenn wir voraussetzen, daß r und ϑ konstant sind und nur φ sich ändert, so folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Wir setzen den Zusammenhang von cartesischen und Kugelkoordinaten ein und erhalten

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} (-r \sin\vartheta \sin\varphi) + \frac{\partial \psi}{\partial y} r \sin\vartheta \cos\varphi = -\,y \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

d. h.,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Daraus folgt

$$L_z = -\mathrm{i}\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \underline{-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.}$$

419. Lösen Sie die Eigenwertgleichung $L_z\psi = L_z\psi$ und bestimmen Sie die Eigenwerte L_z.

Lösung

Es ist

$$L_z = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Somit lautet die Eigenwertgleichung

$$-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = L_z \psi.$$

Die Lösung mit Hilfe eines Exponentialansatzes bringt das Resultat

$$\psi = \text{const} \cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}\, L_z \varphi}{\hbar}\right].$$

Wenn diese Funktion eindeutig sein soll, muß der Bruch $L_z/\hbar$ ganzzahlig sein. Daraus folgt

$$\underline{L_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

420. Es ist zu zeigen, daß die Lösung $\psi = \psi_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ der Eigenwertgleichung $\vec{L}^2\psi = \vec{L}^2\psi$ auch eine Lösung der Eigenwertgleichung $L_z\psi = L_z\psi$ ist. Was folgt daraus bezüglich L^2 und L_z?

Lösung

Der Ausdruck

$$\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \text{const}\; P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung $\vec{L}^2\psi = \vec{L}^2\psi$. Wenn wir diese Lösungsfunktion in die Gleichung $L_z\psi = L_z\psi$ einsetzen, erhalten wir

$$-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\text{const}\; P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\right] = L_z\, \text{const}\; P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

d. h., auf beiden Seiten gekürzt,

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} = L_z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

oder

$$\hbar m = L_z.$$

Das Quadrat des Drehimpulses $\vec{L}^2$ und die Komponente L_z sind also in dem durch $\psi_{m,l}$ repräsentierten Quantenzustand gleichzeitig meßbar.

421. Untersuchen Sie, ob die durch den HAMILTON-Operator H dargestellte Gesamtenergie und das Quadrat des Drehimpulses $\vec{L}^2$ gleichzeitig gemessen werden können. Welche Schlußfolgerungen ergeben sich daraus für die SCHRÖDINGER-Gleichung?

Lösung

Es gilt

$$H = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\Delta + E_\mathrm{p}(r, \vartheta, \varphi).$$

Der LAPLACE-Operator Δ wird zerlegt in

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\vartheta,\varphi}.$$

Damit ergibt sich

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\Delta_r + \frac{\Delta_{\vartheta,\varphi}}{r^2}\right) + E_p(r, \vartheta, \varphi) = T_r(r) + \frac{\vec{L}^2(\vartheta, \varphi)}{2\mu r^2} + E_p(r, \vartheta, \varphi).$$

Da L^2 nur von den Winkelvariablen ϑ und φ, T_r dagegen von r abhängt, folgt

$$H\vec{L}^2 - \vec{L}^2 H = E_p \vec{L}^2 - \vec{L}^2 E_p.$$

Dieser Ausdruck ist Null, wenn die potentielle Energie nicht von den Winkelvariablen ϑ und φ abhängt. Das gilt z. B. für Zentralkräfte. Bei Zentralkräften mit einem Potential $E_p = E_p(r)$ ist also

$$H\vec{L}^2 - \vec{L}^2 H = 0.$$

In diesem Falle sind Gesamtenergie und der Betrag des Drehimpulsvektors gleichzeitig meßbar. Das bedeutet, daß auch die Eigenfunktionen der beiden Eigenwertgleichungen

$$H\psi = E\psi \quad \text{und} \quad \vec{L}^2\psi = \vec{L}^2\psi$$

übereinstimmen. Die erste der beiden Beziehungen ist die SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände:

$$T_r\psi + \frac{L^2\psi}{2\mu r^2} + (E_p - E)\,\psi = 0.$$

Hierin kann man also wegen der zweiten Eigenwertgleichung den Differentialausdruck $\vec{L}^2\psi$ durch $\vec{L}^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi$ ersetzen. Für den Fall $E_p = E_p(r)$ folgt damit die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$T_r\psi + \frac{l(l+1)\,\hbar^2}{2\mu r^2}\,\psi + (E_p - E)\,\psi = 0.$$

Sie enthält nur noch r als unabhängige Variable.

422. Es ist die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein wasserstoffähnliches Atom mit dem Potential

$$E_p = -\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

zu lösen. Dabei ist vorauszusetzen, daß $\psi(0)$ einen endlichen Wert annimmt und $\lim\limits_{r\to\infty} \psi = 0$ gilt. Der Bahndrehimpuls sei Null.

Lösung

Wegen $l = 0$ sowie

$$T_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\Delta_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

erhalten wir die SCHRÖDINGER-Gleichung in der Form

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\psi}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + E\right)\psi = 0.$$

Weiter definieren wir zur Vereinfachung

$$\lambda = \frac{2E\mu}{\hbar^2}, \quad \alpha = \frac{ze^2\mu}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{2\alpha}{r} + \lambda\right)\psi = 0.$$

Aus dem Lösungsansatz

$$\psi = e^{-\beta r}$$

folgt

$$\beta^2 - \frac{2\beta}{r} + \frac{2\alpha}{r} + \lambda = 0.$$

Hieraus erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\alpha = \beta, \quad \lambda = -\beta^2 = -\alpha^2.$$

Wir setzen

$$a_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2\mu} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{2zr}{a_1}.$$

Dabei gibt a_1 gemäß der BOHRschen Theorie den Radius der innersten Elektronenbahn des Wasserstoffatoms an (vgl. Beispiel 392). Die reduzierte Masse

$$\mu = \frac{mm_k}{m + m_k} = \frac{m}{1 + \dfrac{m}{m_k}}$$

kann in erster Näherung der Elektronenmasse m gleichgesetzt werden, da für Wasserstoff

$$\frac{m}{m_k} = \frac{1}{1836} \ll 1$$

ist.
Wir schreiben die gefundene Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung in der Form

$$\psi = C\,e^{-\frac{zr}{a_1}} = C\,e^{-\frac{\varrho}{2}}, \quad \varrho = \frac{2z}{a_1}r.$$

Die Normierungsbedingung erfordert wegen

$$d\tau = 4\pi r^2\,dr$$

$$\int \psi\psi^*\,d\tau = 4\pi\,|C|^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2zr}{a_1}} r^2\,dr = 4\pi\,|C|^2 \frac{2!}{\left(\dfrac{2z}{a_1}\right)^3} = 1.$$

Hieraus folgt

$$|C| = \sqrt{\frac{z^3}{a_1^3\pi}}.$$

Aus der Beziehung $\lambda = -\alpha^2$ ergibt sich das Energieniveau

$$E = \frac{z^2 e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}.$$

Nach der BOHRschen Theorie entspricht das dem Grundzustand.

423. Es ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für den Grundzustand des Wasserstoffatoms zu bestimmen. In welchem Abstand hat die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ ihr Maximum?

Lösung

Der Grundzustand des Wasserstoffs wird für die Quantenzahlen $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$ angenommen. Für diesen Fall lautet die allgemeine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_{1,0,0} = C_{1,0,0} P_0^0 (\cos\vartheta)\, e^{-\frac{\varrho}{2}} L_1^1(\varrho)$$

mit

$$E = E_1 = -\frac{e^4 \mu}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 2\hbar^2}.$$

Für das LAGUERREsche Polynom folgt nach Definition

$$L_1^1(\varrho) = \frac{d}{d\varrho} L_1(\varrho), \quad L_1(\varrho) = e^{\varrho} \frac{d}{d\varrho} (e^{-\varrho}\varrho) = 1 - \varrho.$$

Damit erhalten wir

$$L_1^1(\varrho) = -1.$$

Die Kugelfunktion P_0^0 ist gleich eins. Somit ergibt sich

$$\psi_{1,0,0} = -C_{1,0,0}\, e^{-\frac{\varrho}{2}}.$$

Diese Funktion stimmt mit der in Beispiel 422 direkt aus der SCHRÖDINGER-Gleichung abgeleiteten Lösung überein.
Als Normierungskonstante erhalten wir

$$|C_{1,0,0}| = \sqrt{\frac{1}{\pi a_1^3}}.$$

Wir berechnen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Volumen einer Kugelschale $d\tau = 4\pi r^2\, dr$. Für die gesuchte Aufenthaltswahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\psi\psi^*\, d\tau = \frac{1}{a_1^3 \pi} e^{-\varrho}\, 4\pi r^2\, dr = \frac{4}{a_1^3} e^{-\frac{2r}{a_1}} r^2\, dr = w(r)\, dr.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ nimmt Extremwerte an für

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-\frac{2r}{a_1}}\right) = 0.$$

Daraus folgt die Beziehung

$$e^{-\frac{2r}{a_1}} 2r\left(1-\frac{r}{a_1}\right)=0.$$

Für die Fälle $r = 0$ und $r = \infty$ ergibt sich $w(r) = 0$, d. h., die Wahrscheinlichkeitsdichte nimmt hier ihre geringsten Werte an. Dagegen erhalten wir für

$$\underline{\underline{r = a_1}}$$

das Maximum.
Der innerste Bahnradius nach der BOHRschen Theorie ergibt also gerade das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte für den Grundzustand.

424. Wo liegt das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte bei Wasserstoff im Quantenzustand $2s$ ($n = 2$, $l = 0$)?

Lösung

Bei der Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi\psi^*$ interessieren nur die r-abhängigen Glieder. Entsprechend der allgemeinen Lösung werden diese durch die Quantenzahlen n und l bestimmt. Daher ist die magnetische Quantenzahl m ohne Einfluß auf $\psi\psi^*$. Im Fall $n = 2$, $l = 0$ erhalten wir

$$\psi_{2,0,0} = \text{const}\; e^{-\frac{\varrho}{2}} L_2^1(\varrho)$$

mit

$$\varrho = \frac{r}{a_1}.$$

Das LAGUERREsche Polynom ergibt sich aus

$$L_2^1(\varrho) = \frac{d}{d\varrho}\left[e^{\varrho}\frac{d^2}{d\varrho^2}(e^{-\varrho}\varrho^2)\right] = 2\varrho - 4.$$

Somit folgt

$$\psi_{2,0,0} \sim (\varrho - 2)\, e^{-\frac{\varrho}{2}},$$

$$\psi_{2,0,0}\,\psi_{2,0,0}^*\, r^2\, dr \sim \left(\frac{r}{a_1} - 2\right)^2 r^2\, e^{-\frac{r}{a_1}}\, dr = w(r)\, dr.$$

Die Forderung

$$\frac{dw}{dr} = 0$$

führt zu

$$\left(\frac{r^2}{a_1^2} - 6\frac{r}{a_1} + 4\right)\left(\frac{r}{a_1} - 2\right) = 0.$$

Wir setzen die ermittelten Nullstellen der Gleichung in die zweite Ableitung ein und erhalten als Lösung ein Minimum bei

$$r = r_{\min} = 2a_1,$$

ein kleineres Maximum bei

$$r = r_{\max 1} = 0{,}764\, a_1$$

und ein größeres Maximum bei

$$r = r_{\max 2} = 5{,}236\, a_1 \qquad \text{(Bild 215)}.$$

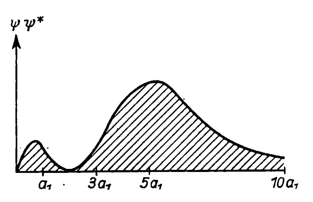


Bild 215

425. Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{r}$ des Elektronenabstandes im Grundzustand des Wasserstoffatoms.

Lösung

Der Mittelwert $\bar{L}$ einer physikalischen Größe ergibt sich aus

$$\bar{L} = \int \psi^* L \psi \, d\tau .$$

Wir setzen für ψ die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_{1,0,0} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_1^3}}\, e^{-\frac{r}{a_1}}$$

ein. Für den Operator L der Ortskoordinate haben wir die Ortskoordinate selbst einzusetzen: r. Damit folgt

$$\bar{r} = \int_0^\infty |\psi_{1,0,0}|^2\, r\, 4\pi r^2\, dr = \frac{4}{a_1^3} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_1}} r^3\, dr .$$

Den Wert des bestimmten Integrals erhalten wir aus

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n\, dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} .$$

Damit ergibt sich

$$\bar{r} = \frac{4}{a_1^3} \frac{3!}{\left(\frac{2}{a_1}\right)^4} = \frac{3}{2} a_1 = \frac{3}{2} \cdot 0{,}529 \cdot 10^{-10}\,\text{m} = \underline{0{,}793 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}.$$

Der Mittelwert des Elektronenabstands unterscheidet sich also vom Abstand der größten Wahrscheinlichkeitsdichte.

426. Berechnen Sie den Mittelwert der z-Komponente des Drehimpulses beim Wasserstoffatom im Zustand $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$.

Lösung

Die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung lautet

$$\psi_{2,1,1} = C_{2,1,1} P_1^{|1|}(\cos\vartheta)\, e^{i\varphi}\, e^{-\frac{\varrho}{2}} \varrho L_3^3(\varrho).$$

Für die Kugelfunktion folgt

$$P_1^1(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\xi}\,[\xi^2-1]\right) = \sqrt{1-\xi^2}$$

$$P_1^1(\cos\vartheta) = \sin\vartheta.$$

Das LAGUERREsche Polynom ergibt

$$L_3^3(\varrho) = \frac{d^3}{d\varrho^3}\left[e^{\varrho}\,\frac{d^3}{d\varrho^3}\,(e^{-\varrho}\varrho^3)\right] = -6.$$

Wegen $\varrho = \dfrac{r}{a_1}$ lautet also die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_{2,1,1} = -\frac{6\,C_{2,1,1}}{a_1}\sin\vartheta\, e^{i\varphi}\, r\, e^{-\frac{r}{2a_1}}.$$

Wir bestimmen die Normierungskonstante $C_{2,1,1}$.
Für das Raumelement $d\tau$ müssen wir wegen der Abhängigkeit von ϑ und φ setzen

$$d\tau = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr.$$

Es folgt damit die Bedingungsgleichung

$$\int \psi\psi^*\, d\tau = \frac{36}{a_1^2}\,|C_{2,1,1}|^2 \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, r^4\, e^{-\frac{r}{a_1}}\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = 1.$$

Wir erhalten

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{4}{3}, \quad \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int\limits_0^{\infty} r^4\, e^{-\frac{r}{a_1}}\, dr = 24\, a_1^5.$$

Aus der Bedingungsgleichung für $C_{2,1,1}$ folgt demnach

$$|C_{2,1,1}| = \frac{1}{48\sqrt{\pi a_1^3}}.$$

Die Lösungsfunktion lautet somit

$$\psi_{2,1,1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi a_1^5}}\sin\vartheta\, e^{i\varphi}\, r\, e^{-\frac{r}{2a_1}}.$$

Entsprechend Beispiel 418 lautet der Operator L_z in Kugelkoordinaten

$$L_z = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Für den gesuchten Mittelwert erhalten wir damit den Ausdruck

$$\overline{L}_z = \int \psi^* L_z \psi \, d\tau = \frac{-i\hbar}{64\pi a_1^5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \, r^4 \, e^{-\frac{r}{a_1}} \, e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{i\varphi} \, d\vartheta \, dr \, d\varphi .$$

Die beiden inneren Integrale werden analog dem Verfahren bei der Normierung ausgewertet. Demnach verbleibt

$$\overline{L}_z = \frac{-i\hbar}{64\pi a_1^5} \frac{4}{3} 24 a_1^5 \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{i\varphi} \, d\varphi = -\frac{i\hbar}{2\pi} \int_0^{2\pi} i \, d\varphi = \hbar .$$

Mit der vorgegebenen magnetischen Quantenzahl $m = 1$ folgt also

$$\underline{\overline{L}_z = \hbar.}$$

427. Ein Elektron befinde sich im Quantenzustand $l = 1$, $m = 1$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dW, das Elektron im Winkelbereich $\vartheta = 90° \pm 3°$ anzutreffen.

Lösung

Wir verwenden den von ϑ und φ abhängigen Teil der Lösungsfunktion $\psi_{n,l,m}$, die Funktion

$$\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l - |m|)! \, (2l + 1)}{(l + |m|)! \, 4\pi}} \, P_l^{|m|}(\cos \vartheta) \, e^{im\varphi} .$$

In der vorliegenden Darstellung erfüllt diese Funktion die Normierungsbedingung

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) \, \psi_{l,m}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 1 .$$

Für den Fall $l = 1$, $m = 1$ erhalten wir wegen $0! = 1$ den Ausdruck

$$dW = \psi_{1,1}(\vartheta, \varphi) \, \psi_{1,1}^*(\vartheta, \varphi) \, 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta$$

mit

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad d\vartheta = \frac{\pi}{30} .$$

Damit folgt für die Wahrscheinlichkeit

$$dW = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{3}{4} \frac{1}{30} \pi = 0{,}078 ,$$

also sind $\underline{7{,}8\,\%}$ aller Teilchen im Quantenzustand $l = 1$, $m = 1$ hiernach unter einem Winkel $\vartheta = 90° \pm 3°$ anzutreffen.

428. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W, das Elektron im Zustand $l = 1$, $m = 1$ unter einem Winkel zwischen $\vartheta = -60°$ und $\vartheta = +60°$ anzutreffen.

Lösung

Wir verwenden wieder die Lösungsfunktion

$$\psi_{1,1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{8\pi}} \sin \vartheta \, e^{i\varphi}$$

Wegen der Symmetrie bezüglich $\vartheta = 0$ können wir schreiben:

$$W = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \psi_{1,1}(\vartheta, \varphi)\, \psi_{1,1}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= 2 \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \left[- \frac{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \vartheta \, d\vartheta \right\} = - \frac{1}{2} \left[\cos \vartheta \left(2 + \sin^2 \vartheta \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} .$$

Wenn wir

$$\cos 60° = 0{,}5 \quad \text{und} \quad \sin^2 60° = 0{,}75$$

einsetzen, so folgt

$$W = - \frac{1}{2} \, 0{,}5 \, (2 + 0{,}75) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 0{,}6875 = 0{,}3125.$$

Es befinden sich also 31,25% aller Elektronen mit $l = 1$, $m = 1$ im angegebenen Winkelbereich $-60° < \vartheta < +60°$.

429. Bestimmen Sie die Extremwerte der Winkelverteilung im Zustand $l = 3$, $m = 2$.

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron unter dem Raumwinkel $d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ anzutreffen, ist

$$dW = w \, d\Omega = \psi\psi^* \, d\Omega.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir also das Maximum der Funktion $w = \psi\psi^*$ zu bestimmen.

In der Lösungsfunktion $\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ können wir die Normierungskonstante unberücksichtigt lassen und schreiben

$$\psi_{3,2}(\vartheta, \varphi) \sim P_3^{|2|} \, e^{2i\varphi} \sim \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, e^{2i\varphi},$$

$$w = \psi_{3,2}(\vartheta, \varphi)\, \psi_{3,2}^*(\vartheta, \varphi) \sim \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta.$$

Aus der Forderung, daß die erste Ableitung verschwinden muß, folgt

$$2\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,(2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = 0.$$

Für $\vartheta = 0$ und für $\vartheta = \pi/2$ hat die Wahrscheinlichkeitsdichte w den Wert Null. Diese Winkel ergeben also Minima der Winkelverteilung. Das dazwischenliegende Maximum ist durch

$$2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = 0$$

bestimmt.
Man erhält hiernach für

$$\vartheta = \arctan\sqrt{2} = \underline{54°44'}$$

das Maximum der Winkelverteilung.

430. Wegen des Elektronenspins $s = \pm\hbar/2$ gehören zu jedem Wertetripel n, l, m zwei Elektronenzustände. Weisen Sie aus den Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung $\psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi)$ nach, daß zu jeder Hauptquantenzahl n insgesamt $2n^2$ Zustände gehören.

Lösung

Die drei Quantenzahlen n, l, m bestimmen die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\psi_{n,l,m} \sim P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, e^{i|m|\varphi}\, e^{-\frac{\varrho}{2}}\, \varrho^l L_{n+l}^{2l+1}(\varrho).$$

Hierin gibt $P_l^{|m|}$ bis auf einen konstanten Faktor die $|m|$. Ableitung der Kugelfunktion P_l an. Aus der Definition

$$P_l(\xi) \sim \frac{d^l}{d\xi^l}(\xi^2 - 1)^l$$

folgt, daß P_l ein Polynom l. Grades ist. Die magnetische Quantenzahl m darf daher nur den Wertebereich

$$m = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$$

durchlaufen.
Für $|m| > l$ wird $P_l^{|m|}$ identisch Null. Wir erhalten also als Wahrscheinlichkeit dafür, einen Zustand $|m| > l$ anzutreffen, den Wert Null. Zu jeder Quantenzahl l gehören somit $2l + 1$ Werte von m. Das LAGUERREsche Polynom L_{n+l}^{2l+1} ergibt sich aus der $(2l + 1)$. Ableitung eines Polynoms L_{n+l}. Dieses ist vom Grade $n + l$. Es muß demnach

$$2l + 1 \leqq n + l \quad \text{bzw.} \quad l \leqq n - 1$$

sein. Zudem ist die Quantenzahl l auf ganzzahlige positive Werte sowie den Wert Null beschränkt; sie durchläuft also den Wertebereich

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Demnach ist die Zahl der zu einer Hauptquantenzahl n gehörenden Quantenzustände gleich

$$N_n = 2\sum_{l=0}^{n-1}(2l + 1) = 2\,(1 + 3 + \ldots + 2n - 1) = \underline{2n^2}.$$

431. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten der Winkelverteilung für alle Zustände $l = 3$, und zeichnen Sie dazu die Polardiagramme.

Lösung

Zu $l = 3$ gehören die Zustände $m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Die dazugehörenden Lösungsfunktionen $\psi_{l,m}$ und die Wahrscheinlichkeitsdichten sind

m	$\psi_{l,m}$	$\psi_{l,m}\,\psi_{l,m}^{*}$
± 3	$\frac{\sqrt{35}}{8\sqrt{\pi}} \sin^3 \vartheta \, e^{\pm 3i\varphi}$	$\frac{35}{64\pi} \sin^6 \vartheta$
± 2	$\frac{\sqrt{105}}{4\sqrt{2\pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, e^{\pm 2i\varphi}$	$\frac{105}{32\pi} \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta$
± 1	$\frac{\sqrt{21}}{8\sqrt{\pi}} \sin \vartheta \, (5 \cos^2 \vartheta - 1) \, e^{\pm i\varphi}$	$\frac{21}{64\pi} \sin^2 \vartheta \, (5 \cos^2 \vartheta - 1)^2$
0	$\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{\pi}} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)$	$\frac{4}{16\pi} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)^2$

In Bild 216 sind die dazugehörenden Polardiagramme dargestellt.

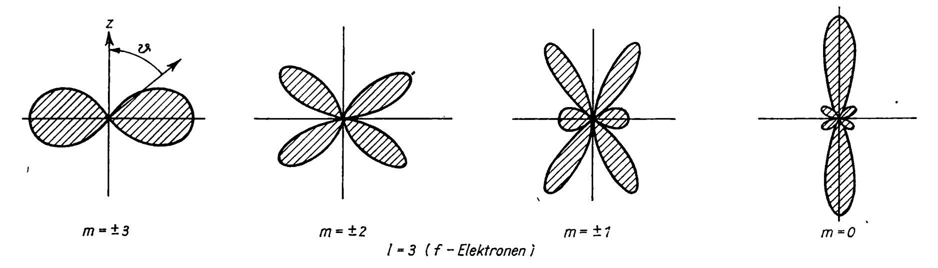


Bild 216

A Aufgaben

557. Berechnen Sie die Wellenlänge der H_β-Linie in Luft. ($n_a = 4, n_e = 2$, Brechzahl $n_L = 1{,}000293$)
558. Welche Wellenzahl hat die erste Linie der LYMAN-Serie im Vakuum? ($n_a = 2$, $n_e = 1$)
559. Welche Wellenzahl bezeichnet die Seriengrenze der PASCHEN-Serie im Vakuum? ($n_a = \infty$, $n_e = 3$)
560. Welche RYDBERG-Zahl ergibt sich für das Spektrum des Deuteriums im Vakuum? ($m_D = 3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg)
561. Berechnen Sie die RYDBERG-Zahl für den Fall einer unendlich großen Kernmasse. Ausbreitungsmedium sei Vakuum.
562. Berechnen Sie die Wellenlänge der H_γ-Linie des Deuteriumatoms in Luft. ($n_a = 5$, $n_e = 2$)
563. Wie lauten die Operatoren L_x und L_y in Kugelkoordinaten?
564. Untersuchen Sie, ob und für welche Quantenzahl die Funktion $\sin\vartheta\, e^{i\varphi}$ eine Lösung der Eigenwertgleichung $\vec{L}^2\psi = L^2\psi$ ist.
565. Zeigen Sie, daß $\sin\vartheta \sin\varphi - i\cos\vartheta$ Eigenfunktion des Operators L^2 ist. Für welche Operatorkomponente des Drehimpulses ist die Funktion $\sin\vartheta\sin\varphi - i\cos\vartheta$ zugleich Eigenfunktion?
566. Untersuchen Sie, zu welchen Operatoren des Drehimpulses oder seiner Komponenten der Ausdruck $\sin\vartheta\cos\varphi$ Eigenfunktion ist.
567. Wie lautet die Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung für $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$? Bestimmen Sie die Normierungskonstante.
568. In welchem Abstand hat die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ im Zustand $2p$ ($n = 2$, $l = 1$) ihr Maximum?
569. Bestimmen Sie den Abstand größter Wahrscheinlichkeitsdichte $w(r)$ in den Zuständen $3d$ ($n = 3$, $l = 2$) und $4f$ ($n = 4$, $l = 3$).
570. Bestimmen Sie den Mittelwert $\bar{r}$ im Zustand $2p$ ($n = 2$, $l = 1$).
571. Bestimmen Sie den Mittelwert $\overline{\left(\frac{1}{r}\right)}$ im Zustand $2p$ ($n = 2$, $l = 1$).
572. Leiten Sie eine allgemeine Formel für den Mittelwert $\bar{r}$ für Wasserstoff und wasserstoffähnliche Atome im Quantenzustand n, l ab.
573. Berechnen Sie die Mittelwerte des Elektronenabstands für einfach ionisiertes Helium und für zweifach ionisiertes Lithium im Quantenzustand $2p$.
574. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron des Wasserstoffs im Quantenzustand $2p$ in einem Intervall $4a_1 < r < 4{,}1a_1$ anzutreffen?
575. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das im $2p$-Zustand befindliche Elektron des Wasserstoffatoms in einem Abstand $r > 9a_1$ anzutreffen.
576. Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, das Elektron des Wasserstoffatoms unter der Richtung $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \pi/6$ im Raumwinkel
$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,\ d\vartheta = \frac{\pi}{18},\ d\varphi = \frac{\pi}{18}$$
im Quantenzustand $l = 1$, $m = -1$ anzutreffen.
577. Welche Winkelverteilung ergibt sich für den Fall $l = 0$, $m = 0$?
578. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten der Winkelverteilung für alle Fälle $l = 2$.
579. Bestimmen Sie die Extremwerte der Winkelverteilung für alle Fälle $l = 2$.
580. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron des Quantenzustands

$l = 2$, $m = 0$ in einem Winkelbereich $54°43' < \vartheta < 90°$ anzutreffen?

581. Bestimmen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten die Komponenten der Stromdichte im Atom.

582. Es ist die mittlere Stromdichte in einem Wasserstoffatom, das sich im Quantenzustand $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$ befindet, zu bestimmen. Die Stromdichte wird gesucht für die Werte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi/2$, $r = 4a_1$.

583. Das durch den Strom des umlaufenden Elektrons hervorgerufene magnetische Moment $\vec{M}$ ist durch Integration zu berechnen

6.4. Das Spektrum des zweiatomigen Moleküls — der starre Rotator und der harmonische Oszillator

In einem zweiatomigen Molekül (Bild 217) führen die Atome gegeneinander synchrone, harmonische Schwingungen aus (harmonischer Oszillator), wobei sie gleichzeitig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine durch den gemeinsamen Schwerpunkt gehende Achse rotieren (Rotator).

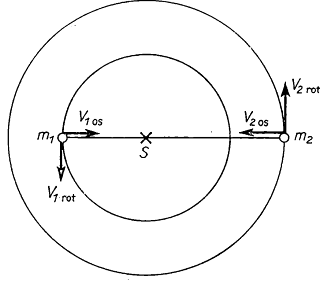


Bild 217

Somit setzt sich die Energie eines Elektrons im Molekül gemäß der Beziehung

$$E = E_{el} + E_{os} + E_{rot}$$

aus dem Energieniveau E_{el} des Elektrons in der Elektronenhülle, dem Energieniveau E_{os} der Oszillation und dem Energieniveau E_{rot} der Rotation zusammen. Für Wasserstoff und wasserstoffähnliche Atome ist das Energieniveau E_{el} aus 6.3. bekannt. Für das Energieniveau der Oszillation und für das der Rotation gelten die Formeln

$$E_{os} = \hbar\omega_0\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Hierin wurde mit n die Quantenzahl der Oszillation, mit l die der Rotation bezeichnet. ω_0 gibt die Kreisfrequenz der Oszillationsschwingung an, μ die reduzierte Masse des Moleküls, r den Kernabstand.

Als Wellenzahl der emittierten oder absorbierten Spektrallinie erhalten wir

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \bar{\nu}_{el} + \bar{\nu}_{os} + \bar{\nu}_{rot}.$$

Dabei gilt

$$\bar{\nu}_{\text{el}} = \frac{E'_{\text{el}} - E_{\text{el}}}{hc}, \quad \bar{\nu}_{\text{os}} = \frac{E'_n - E_n}{hc}, \quad \bar{\nu}_{\text{rot}} = \frac{E'_l - E_l}{hc}.$$

Gestrichene Größen gelten für den Zustand nach vollzogenem Quantensprung. Die Beobachtung der Rotations- und der Rotationsschwingungsbanden erfolgt im all-

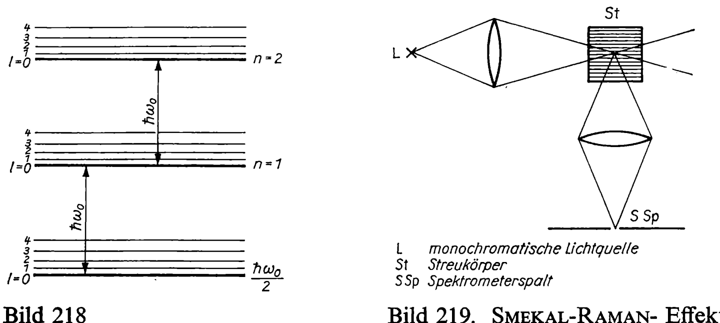


Bild 218

Bild 219. SMEKAL-RAMAN- Effekt

gemeinen über das Absorptionsspektrum, doch ist es für die Darstellung der Theorie zweckmäßig, von der Emission auszugehen.

Für die reinen **Rotationsbanden,** bei denen nur eine Änderung der Rotationsenergie erfolgt, gilt die Auswahlregel

$$\Delta l = l' - l = +1.$$

Bei den **Rotationsschwingungsbanden** ändern sich Rotations- und Oszillationsenergie, wobei das Oszillationsquant im allgemeinen um eine Größenordnung über dem Rotationsquant liegt (Bild 218). Für die Emission gelten daher die Auswahlregeln

$$\Delta n = +1; \quad \Delta l = \pm 1.$$

Der **Smekal-Raman-Effekt** (Bild 219) läßt sich quantentheoretisch deuten, indem man annimmt, daß die eingestrahlte Erregerfrequenz das getroffene Molekül unter Veränderung der Rotationsquantenzahl um ± 1 auf ein höheres Energieniveau hebt. Bei der nachfolgenden Ausstrahlung ändert sich die Rotationsquantenzahl erneut um ± 1. Hiermit ergeben sich die Auswahlregeln

$$\Delta l = -2 \quad (P\text{-Zweig}),$$

$$\Delta l = 0 \quad (Q\text{-Zweig}),$$

$$\Delta l = +2 \quad (R\text{-Zweig}).$$

Durch einen **Elektronensprung,** d. h. durch Änderung der Elektronenanordnung im Molekül, kann das **Bandenspektrum** in den sichtbaren und in den ultravioletten Bereich verschoben werden. Mit dem Elektronensprung verändert sich im allgemeinen auch das Massenträgheitsmoment des Moleküls. Entsprechend der Auswahlregel

$$\Delta l = \pm 1, 0$$

ergeben sich drei Zweige von Spektrallinien, deren systematische Ordnung im **Diagramm von Fortrat** angegeben wird.

Als Übergangswahrscheinlichkeit $A_{m,n}$ definieren wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Atom aus dem Zustand E_m spontan in den Zustand E_n übergeht. Indem wir diese Größe auf die Zeit von einer Sekunde beziehen, ergeben sich für $A_{m,n}$ Werte, die im allgemeinen größer als eins sind. Für die Übergangswahrscheinlichkeit gilt die Beziehung

$$A_{m,n} = \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0\hbar^4c^3}\,|E_m - E_n|^3 \left(\int \psi_m^* r \psi_n \,\mathrm{d}\tau\right)^2.$$

Darin werden die Komponenten

$$x_{m,n} = \int \psi_m^* x \psi_n \,\mathrm{d}\tau, \quad y_{m,n} = \int \psi_m^* y \psi_n \,\mathrm{d}\tau, \; z_{m,n} = \int \psi_m^* z \psi_n \,\mathrm{d}\tau$$

als Matrixelemente des betreffenden Übergangs bezeichnet. Aus diesen Elementen lassen sich die Auswahlregeln für die Quantenübergänge sowie für die Intensitäts- und Polarisationsverhältnisse der Strahlung berechnen. Wenn wir $A_{m,n}$ mit der Energie $h\nu_{m,n}$ und mit der Zahl der angeregten Atome multiplizieren, die aus statistischen Überlegungen folgt, so können wir daraus die mittlere Strahlungsleistung bestimmen. Die Formeln zur Berechnung der Matrixelemente $L_{m,n}$ aus den Eigenfunktionen ψ_m, ψ_n der Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{L}\psi = L\psi$$

stellen die Verbindung zwischen der von HEISENBERG auf die Matrizenrechnung gegründeten Quantenmechanik und der von SCHRÖDINGER entworfenen Wellenmechanik her. Beide Darstellungsweisen, die wellenmechanische und die matrizenmechanische, werden in der Quantentheorie parallel angewandt.

B Beispiele

432. Berechnen Sie die Quantenzustände für einen linearen harmonischen Oszillator nach der SCHRÖDINGER-Gleichung. Für die Oszillationen eines O_2-Moleküls mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2{,}95 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$ sind die möglichen Energiewerte zu bestimmen.

Lösung

Wir setzen stationäre Zustände voraus. Es soll lediglich eine räumliche Abhängigkeit von der reduzierten Variablen x bestehen. Wir bezeichnen die reduzierte Masse mit

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

und die Kreisfrequenz der Eigenschwingung mit ω_0. Daraus folgt für die potentielle Energie des Oszillators ganz analog der klassischen Theorie

$$E_p = \frac{\mu}{2}\,\omega_0 x^2. \tag{2}$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung lautet

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - E_p)\,\frac{2\mu}{\hbar}\,\psi = 0. \tag{3}$$

Unter Verwendung der Ausdrücke

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}, \quad \xi = \frac{x}{x_0} \tag{4}$$

können wir Gl. (3) umformen in

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega_0} - \xi^2\right)\psi = 0. \tag{5}$$

Diese Differentialgleichung wird durch den Ansatz

$$\psi = \psi_n(\xi) = C_n H_n(\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{6}$$

gelöst, wobei wir für das HERMITEsche Polynom H_n schreiben:

$$H_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (2\xi)^\nu. \tag{7}$$

Wir bilden die zweite Ableitung

$$\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} = \sum_{\nu=2} 4\nu(\nu - 1)\,a_\nu (2\xi)^{\nu-2} \tag{8}$$

und setzen diese in Gl. (5) ein. Es folgt die Gleichung

$$\sum_{=0\nu}^{n} (2\xi)_\nu \left[\, 4(\nu + 2)(\nu + 1)\,a_{\nu+2} - 2\nu a_\nu + \left(\frac{2E}{\hbar\omega_0} - 1\right) a_\nu \right] = 0. \tag{9}$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, müssen sämtliche Koeffizienten verschwinden, das bedeutet

$$a_{\nu+2} = \frac{2\nu - \left(\dfrac{2E}{\hbar\omega_0} - 1\right)}{4(\nu+2)(\nu+1)}\, a_\nu . \tag{10}$$

Wenn diese Reihe für $\nu = n$ abbrechen soll, dann muß

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0$$

sein. Das aber ist nur möglich für

$$2n + 1 - \frac{2E}{\hbar\omega_0} = 0,$$

woraus folgt

$$E = E_n = \frac{\hbar\omega_0}{2}(2n+1) = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad n = 0, 1, 3, \ldots \tag{11}$$

Hiernach tritt die Energie des harmonischen Oszillators gequantelt auf, wobei die Nullpunktenergie den Wert $\hbar\omega_0/2$ hat.
Wir legen $a_n = 1$ fest und setzen Gl. (11) in Gl. (10) ein. Dann ergibt sich

$$H_n(\xi) = (2\xi)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2\xi)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2\xi)^{n-4} \mp \ldots$$

Dieser Ausdruck kann zusammengefaßt werden zu

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} . \tag{12}$$

Als Lösungsfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung erhalten wir damit

$$\psi_n = C_n H_n(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} = C_n(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} . \tag{13}$$

Aus Beispiel 405 entnehmen wir, daß die Normierungskonstante den Wert

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}} \sqrt[4]{\frac{\mu\omega_0}{\pi\hbar}} \tag{14}$$

hat. Wir berechnen abschließend die Energiewerte E_n entsprechend Gl. (11).
Setzen wir die gegebenen Größen ein, so ergibt sich

$$E = E_n = 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}95 \cdot 10^{14}\left(n + \frac{1}{2}\right) \mathrm{J} = 3{,}09 \cdot 10^{-20}\left(n + \frac{1}{2}\right) \mathrm{J} =$$

$$= 3{,}09 \cdot 10^{-20} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{18}\left(n + \frac{1}{2}\right) \mathrm{eV} = 0{,}193\left(n + \frac{1}{2}\right) \mathrm{eV}.$$

Hiernach hat das Quant des Oszillators den Wert

$$\hbar\omega_0 = 3{,}09 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{J} = \underline{0{,}193\ \mathrm{eV}.}$$

Für die Nullpunktenergie erhalten wir 0,096 eV, für die Energie der ersten Grundschwingung dagegen 0,289 eV.

433. Berechnen Sie die Wellenlänge der von einem Sauerstoffmolekül infolge seiner Oszillation emittierten Strahlung. Als zulässige Änderung der Quantenzahl ist $\Delta n = 1$ zu setzen. $\omega_0 = 2{,}95 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$

Lösung

Nach dem Bohrschen Postulat gilt für die Frequenz der Strahlung

$$h\nu = E_a - E_e = \hbar\omega_0 \Delta n = \hbar\omega_0 .$$

Wie wir sehen, ist die Frequenz ν gleich der Oszillationsfrequenz $\omega_0/2\pi$, mit der die beiden Sauerstoffatome gegeneinander schwingen. Hieraus ergibt sich

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8}{2{,}95 \cdot 10^{14}}\ \mathrm{m} = \underline{6{,}36\ \mu\mathrm{m}.}$$

Die Strahlung liegt also im infraroten Spektralbereich.

434. Nach der klassischen Theorie und nach der Quantentheorie ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, beim harmonischen Oszillator für die Auslenkung einen Wert zwischen den Grenzen x und $x + \mathrm{d}x$ anzutreffen. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit bei einem Wasserstoffmolekül, das sich in der ersten Grundschwingung mit $\omega_0 = 8{,}04 \times \times 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$ befindet, für die Werte $x = 20 \cdot 10^{-12}$ m, $\mathrm{d}x = 5 \cdot 10^{-12}$ m?

Lösung

Als Lösungsfunktion der Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator hatten wir bereits erhalten

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{\mu\omega_0}{\pi\hbar}}\, H_n(\xi)\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{\mu\omega_0}{\pi\hbar}}\, \mathrm{e}^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^n}$$

mit

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} .$$

Im Fall $n = 1$ folgt

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{x_0\sqrt{\pi}}}\, \frac{x}{x_0}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} .$$

Hieraus ergibt sich

$$w(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{2}{x_0\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{x_0^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x_0^2}} .$$

Für die zu untersuchende Oszillation des Wasserstoffmoleküls erhalten wir

$$\mu = \frac{m_\mathrm{H} m_\mathrm{H}}{2m_\mathrm{H}} = \frac{m_\mathrm{H}}{2} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}}{2}\ \mathrm{kg} = 0{,}84 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg},$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}} = \sqrt{\frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{0{,}84 \cdot 10^{-27} \cdot 8{,}04 \cdot 10^{14}}}\ \mathrm{m} = 12{,}5 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}.$$

Somit folgt

$$\frac{x}{x_0} = \frac{20 \cdot 10^{-12}}{12{,}5 \cdot 10^{-12}} = 1{,}6, \quad \frac{x^2}{x_0^2} = 2{,}56$$

und daraus

$$w(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{x_0^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x_0^2}} \frac{\mathrm{d}x}{x_0} = \frac{2}{1{,}77} \cdot 2{,}56 \cdot 0{,}077 \frac{5 \cdot 10^{-12}}{12{,}5 \cdot 10^{-12}} = \underline{0{,}089.}$$

Bei der klassischen Rechnung ist die Auslenkung durch

$$x = a \sin \omega_0 t$$

bestimmt, wobei sich die Amplitude a gemäß der Beziehung

$$a = \sqrt{\frac{2E}{\mu\omega_0^2}}$$

aus der Energie E ergibt.

Wir bezeichnen die Periodendauer mit $T = 2\pi/\omega_0$, die Zeitspanne für das Durchlaufen der Strecke $\mathrm{d}x$ mit $\mathrm{d}t$. Da das Teilchen sich sowohl beim Hin- als auch beim Rücklauf im Bereich $x \cdots x + \mathrm{d}x$ befindet, erhalten wir für die klassische Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{klass}} = w_{\mathrm{klass}}(x)\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{\mathrm{d}t}{T}.$$

Somit folgt wegen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\,\omega_0 \cos \omega_0 t,$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{klass}} = w_{\mathrm{klass}}\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{\omega_0}{2\pi}\,\frac{\mathrm{d}x}{a\,\omega_0 \cos \omega_0 t} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

also ist

$$w_{\mathrm{klass}}(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Im vorliegenden Fall ist das Oszillationsquant der Schwingung

$$E = \hbar\omega_0 = 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 8{,}04 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 8{,}44 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}.$$

Es folgt weiter

$$a = \sqrt{\frac{2E}{\mu\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\omega_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{0{,}84 \cdot 10^{-27} \cdot 2{,}95 \cdot 10^{14}}}\,\mathrm{m} = 29{,}1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}.$$

Hieraus ergibt sich für die klassische Wahrscheinlichkeit

$$w_{\mathrm{klass}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{5 \cdot 10^{-12}}{3{,}14 \cdot 10^{-12}\sqrt{(29{,}1)^2 - (20)^2}} = \underline{0{,}075.}$$

Also ergibt sich gegenüber der quantenmechanischen Rechnung ein beträchtlicher Unterschied.

In Bild 220 wurde die Wahrscheinlichkeitsdichte entsprechend klassischer und quantentheoretischer Berechnung aufgetragen. In Übereinstimmung mit dem quantenmechanischen Tunneleffekt können auch Auslenkungen der Größe $|x| > a$ auftreten, die gemäß klassischer Betrachtung nicht möglich sind.

435. Gemäß der HEISENBERGschen Unschärferelation gilt zwischen der Ungenauigkeit des Ortes und der Ungenauigkeit des Impulses die Beziehung

$$\overline{(\Delta x)^2}\,\overline{(\Delta p_x)^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4}. \qquad (1)$$

Berechnen Sie nach Maßgabe dieses Zusammenhangs das Energieminimum des harmonischen Oszillators.

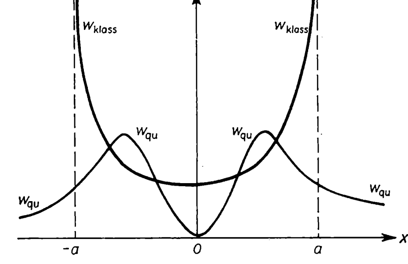


Bild 220

Lösung

Die Gesamtenergie beträgt im Mittel

$$\overline{E} = \frac{\overline{p_x^2}}{2\mu} + \frac{\mu\omega_0^2}{2}\overline{x^2}. \qquad (2)$$

Für den Mittelwert der Ortskoordinate erhalten wir

$$\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \, x \psi_n \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 \, x \, \mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Da $|\psi_n|^2$ eine gerade Funktion ist, ergibt sich für $x|\psi_n|^2$ eine ungerade Funktion, also verschwindet das Integral (3), und es wird $\bar{x} = 0$.
Weiter erhalten wir mit $\psi_n^* = \psi_n$ für die Impulskoordinate den Ausdruck

$$\bar{p}_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_n \, \mathrm{d}x = -i\hbar \left[\psi_n^2\right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Dieser ergibt gleichfalls den Wert Null, denn ψ_n verschwindet im Unendlichen. Somit können wir schreiben

$$x^2 = \Delta x^2, \quad p_x^2 = \Delta p_x^2,$$

und an Stelle von Gl. (1) erhalten wir

$$\overline{x^2}\,\overline{p_x^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4} \qquad (4)$$

oder

$$\overline{x^2} \geqq \frac{\hbar^2}{4\overline{p_x^2}}. \qquad 5)$$

Wenn wir Gl. (5) in Gl. (2) einsetzen, so folgt für die Energie

$$\overline{E} = \frac{\overline{p_x^2}}{2\mu} + \mu \frac{\omega_0^2 \overline{x^2}}{2} \geqq \frac{\overline{p_x^2}}{2\mu} + \frac{\mu \omega_0^2 \hbar^2}{2 \cdot 4\, \overline{p_x^2}}. \tag{6}$$

Das Minimum erhalten wir durch Null-Setzen der ersten Ableitung, wobei $\overline{p_x^2}$ als unabhängige Variable aufgefaßt werden kann. Für den Extremwert erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{2\mu} - \frac{\mu}{8} \frac{\omega_0^2 \hbar^2}{(\overline{p_x^2})^2} = 0, \quad \overline{p_x^2} = \frac{\mu \omega_0 \hbar}{2}. \tag{7}$$

Wir setzen den so gefundenen Ausdruck Gl. (7) in Gl. (6) ein, und es folgt

$$\overline{E} \geqq \frac{\hbar\omega_0}{4} + \frac{\hbar\omega_0}{4} = \underline{\frac{\hbar\omega_0}{2}}.$$

Demnach ist die Nullpunktenergie $\hbar\omega_0/2$ die kleinste Energie des harmonischen Oszillators, die mit der HEISENBERGschen Unschärferelation verträglich ist.

436. Berechnen Sie die H-Matrix des harmonischen Oszillators.

Lösung

Die Elemente $H_{m,n}$ der H-Matrix ergeben sich aus

$$H_{m,n} = \int \psi_m^*(x) H \psi_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

Entsprechend der SCHRÖDINGER-Gleichung für stationäre Zustände gilt

$$H\psi_n = E_n \psi_n.$$

Demnach können wir, da die Lösungsfunktionen ψ_n, ψ_n^* normiert und orthogonal sind, schreiben

$$H_{m,n} = \int \psi_m^* E_n \psi_n \,\mathrm{d}x = E_n \int \psi_m^* \psi_n \,\mathrm{d}x = E_n \delta_{m,n} = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) \delta_{m,n};$$

dabei bedeutet $\delta_{m,n}$ das KRONECKER-Symbol. Wir erhalten die Matrix

$$H = \begin{Vmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 3\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 5\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \end{Vmatrix}$$

437. Berechnen Sie die Matrix der Ortskoordinaten für den harmonischen Oszillator. Wie groß ist die Übergangsfrequenz für Sprünge vom Zustand $m = 2$ in den Zustand $n = 1$ bei einem Wasserstoffmolekül mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 8{,}04 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$? Die reduzierte Masse hat den Wert $\mu = 0{,}84 \cdot 10^{-27}$ kg.

Lösung

Die mittlere Zahl der pro Sekunde stattfindenden Übergänge aus dem Zustand m in den Zustand n beträgt

$$N_{m,n} = \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0\hbar^4c^3} \, |E_m - E_n|^3 \left(\int x\psi_m\psi_n \, \mathrm{d}x\right)^2 . \tag{1}$$

Wir berechnen die Matrixelemente

$$x_{m,n} = \int x\psi_m\psi_n \, \mathrm{d}x = x_0^2 \int \xi\psi_m(\xi)\psi_n(\xi) \, \mathrm{d}\xi =$$

$$= C_m C_n x_0^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi \mathrm{e}^{-\xi^2} H_m(\xi) H_n(\xi) \, \mathrm{d}\xi . \tag{2}$$

Für den Fall $m = n$ erhalten wir im Integranden wegen des Faktors ξ eine ungerade Funktion. Da sich die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, folgt somit

$$x_{m,m} = 0 .$$

In den weiteren Überlegungen setzen wir $m > n$ voraus.
Die Funktion $\xi H_n(\xi)$ wird in eine Reihe der Funktionen $H_i(\xi)$ entwickelt, wobei für i gilt: $i = 0, 1, 2, \cdots, n + 1$, also

$$\xi H_n(\xi) = \xi(2\xi)^n \pm \cdots = \sum_{i=0}^{n+1} c_i H_i(\xi) = c_{n+1}(2\xi)^{n+1} + \cdots . \tag{3}$$

Hieraus folgt

$$c_{n+1} = \frac{1}{2} .$$

Indem wir Gl. (3) in Gl. (2) einsetzen, erhalten wir

$$x_{m,n} = C_m C_n x_0^2 \sum_{i=0}^{n+1} c_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2} H_m(\xi) H_i(\xi) \, \mathrm{d}\xi . \tag{4}$$

Wegen der vorausgesetzten Orthogonalität der Lösungsfunktion verschwindet jedes Glied für $i \neq m$. Da i alle ganzzahligen Werte von 0 bis $n + 1$ durchläuft, kann in Gl. (4) nur für den Fall $n + 1 = m$ ein von Null verschiedener Summand auftreten. In allen anderen Fällen $m > n$ folgt $x_{m,n} = 0$. Haben wir dagegen $m = n + 1$, so ergibt sich aus Gl. (4)

$$x_{n+1,n} = C_{n+1} C_n x_0^2 c_{n+1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2} H_{n+1}^2(\xi) \, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{C_n}{C_{n+1}} x_0 \frac{1}{2} C_{n+1}^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x_0^2}} H_{n+1}^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{x_0}{2} \frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{x_0}{2} \frac{\sqrt{2^{n+1}(n+1)!}}{\sqrt{2^n \, n!}}$$

wegen der geltenden Normierungsbedingung.

Damit folgt

$$x_{n+1\ n} = \frac{x_0\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2\mu\omega_0}}. \tag{5}$$

Ebenso erhalten wir

$$x_{m,m+1} = \frac{x_0\sqrt{m+1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(m+1)\hbar}{2\mu\omega_0}}. \tag{6}$$

Demzufolge muß die Ortsmatrix des harmonischen Oszillators das folgende Aussehen annehmen:

$$x = x_0 \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} \tag{7}$$

Dabei wurde die Numerierung der Zeilen und Spalten mit Null begonnen. Im harmonischen Oszillator sind demnach nur solche Übergänge möglich, bei denen sich die Quantenzahl um

$$\Delta n = \pm 1$$

ändert.

Für den Übergang vom Zustand $m = 2$ auf den Zustand $n = 1$ folgt gemäß Gl. (5) bzw. Gl. (7)

$$x_{2,1} = x_0\sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}.$$

Die Anzahl der in der Sekunde erfolgenden Übergänge des Oszillators erhalten wir danach zu

$$N_{2,1} = \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0\hbar^4c^3}(E_{n+1} - E_n)^3\, x_{2,1}^2 = \frac{e^2\omega_0^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3\mu} =$$

$$= \frac{(1{,}6\ 10^{-19})^2\cdot(8{,}04\cdot 10^{14})^2}{3\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot(3\cdot 10^8)^3\cdot 0{,}84\cdot 10^{-27}}\ \mathrm{s}^{-1} = \underline{8{,}73\cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}}.$$

Wenn auf Grund statistischer Untersuchungen die Besetzungszahlen für die einzelnen Quantenzustände bekannt sind, kann mit dem vorstehend angewandten Verfahren die Intensität der einzelnen Spektrallinien errechnet werden.

438. In einem zweiatomigen Molekül sei der Abstand beider Atome unveränderlich, so daß nur Rotationsbewegungen auftreten können (starrer Rotator). Leiten Sie aus der allgemeinen Gleichung $H\psi = E\psi$ die SCHRÖDINGER-Gleichung in Kugelkoordinaten für den starren Rotator ab, und bestimmen Sie aus dem Vergleich mit der Eigenwertgleichung $L^2\psi = L^2\psi$ die Energiestufen. Wie groß ist das Rotationsquant für das Wasserstoffmolekül? Der Abstand der beiden Wasserstoffatome ist $r = 0{,}75 \cdot 10^{-10}$ m.

Lösung

Wegen des unveränderlichen Abstands beider Atome ist die potentielle Energie des Moleküls eine konstante Größe; wir können sie gleich Null setzen. Im HAMILTON-Operator

$$H = T_r(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \tag{1}$$

ist ebenfalls T_r gleich Null zu setzen, da sich nur die Winkelvariablen ϑ und φ ändern. Nach einer Multiplikation mit dem konstanten Faktor $2\mu r^2$ ergibt sich danach

$$L^2\psi = 2\mu r^2 E\psi \tag{2}$$

bzw.

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}E\psi = 0 \tag{3}$$

als SCHRÖDINGER-Gleichung des starren Rotators.
Aus der Einleitung zu 6.3. ist uns bekannt, daß die Differentialgleichung

$$L^2\psi l = L_l^2\psi l \tag{4}$$

nur für die Eigenwerte

$$L_l^2 = \hbar^2 l\ (l+1); \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

physikalisch sinnvolle Lösungen zuläßt.
Vergleichen wir Gl. (2) u. (4), so erkennen wir, daß die Differentialgleichung des starren Rotators mit den Eigenwerten

$$2\mu r^2 E = \hbar^2 l\ (l+1); \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

lösbar ist. Die Energie E des Rotators tritt also gequantelt auf, und zwar ist

$$E = E_l = \frac{\hbar^2 l\,(l+1)}{2\mu r^2} = \frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{8\mu r^2}\,. \tag{6}$$

Wenn wir die Energiedifferenz $E_1 - E_0$ als Rotationsquant definieren, so folgt

$$E_1 - E_0 = \frac{\hbar^2}{\mu r^2} = \frac{(1{,}05\cdot 10^{-34})^2}{0{,}84\cdot 10^{-27}\,(0{,}75\cdot 10^{-10})^2}\,\mathrm{J} = \underline{2{,}32\cdot 10^{-21}\,\mathrm{J}}\,.$$

Das Rotationsquant erweist sich also um etwa eine Größenordnung kleiner als das Oszillationsquant.

439. Für den Abstand zweier Rotationslinien des Sauerstoffmoleküls wurde als Mittelwert

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 291\ \mathrm{m}^{-1}$$

gemessen. Berechnen Sie daraus den mittleren Kernabstand und das Massenträgheitsmoment des Sauerstoffmoleküls.

Lösung

Gemäß dem BOHRschen Postulat ergibt sich die Wellenlänge der Strahlung aus

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{E_{l+1} - E_l}{hc}. \tag{1}$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß Übergänge im starren Rotator entsprechend der Auswahlregel

$$\Delta l = \pm 1$$

erfolgen.
Setzen wir aus dem vorhergehenden Beispiel 438 die Gl. (6) hier in Gl. (1) ein, so erhalten wir den Übergang vom Quantenzustand $l + 1$ in den Zustand l gemäß

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{l,l+1} = \frac{h}{8\pi^2 c\mu r^2} 2(l+1) = 2B\,(l+1). \tag{2}$$

Es folgt also als Differenz der Wellenzahlen benachbarter Rotationslinien

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{l,l+1} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{l,l-1} = \frac{h}{4\pi^2 c\mu r^2} = 2B. \tag{3}$$

Demnach ist der Frequenzabstand benachbarter Rotationslinien konstant.
Für das Massenträgheitsmoment des Sauerstoffmoleküls erhalten wir den Wert

$$J = \mu r^2 = \frac{h}{4\pi^2 c\,\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 291}\,\mathrm{kgm^2} = \underline{1{,}92 \cdot 10^{-46}\,\mathrm{kgm^2}}.$$

Die reduzierte Masse des Sauerstoffmoleküls ist $\mu = 8 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 13{,}4 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Daraus finden wir den Kernabstand zu

$$r = \sqrt{\frac{J}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}92 \cdot 10^{-46}}{13{,}4 \cdot 10^{-27}}}\,\mathrm{m} = \underline{1{,}19 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}.$$

440. Es wird die Rotationsschwingungsbande des CO-Moleküls (Bild 221) untersucht. Für die erste Linie des P-Zweiges werde die Wellenzahl

$$\bar{\nu}_{-1} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{-1} = 2{,}1654 \cdot 10^5\,\mathrm{m^{-1}},$$

für die erste Linie des R-Zweiges die Wellenzahl

$$\bar{\nu}_{+1} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{+1} = 2{,}1730 \cdot 10^5\,\mathrm{m^{-1}}$$

gemessen. Berechnen Sie aus diesen Angaben das Schwingungsquant $\hbar\omega_0$, die Oszillationsfrequenz und das Trägheitsmoment des CO-Moleküls. Wie groß ist der Kernabstand?

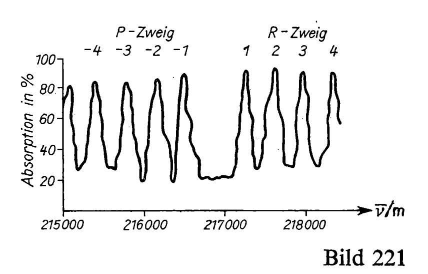


Bild 221

Lösung

Rotationsschwingungsbanden treten auf, wenn das Molekül sowohl Oszillations- als auch Rotationsschwingungen ausführt. In diesem Fall erhalten wir die Gesamtenergie E als die Summe von Rotations- und Oszillationsenergie [vgl. Gl. (6) in Beispiel 438 sowie Gl. (11) in Beispiel 432]:

$$E_{n,l} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \frac{l(l+1)\,\hbar^2}{2\mu r^2}\,. \tag{1}$$

Für die Wellenzahl der Strahlung ergibt sich nach dem BOHRschen Postulat

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{E_{n',l'} - E_{n,l}}{hc}\,, \tag{2}$$

wobei die Übergangsregeln

$$\Delta n = n' - n = \pm 1\,, \quad l = l' - l = \pm 1 \tag{3}$$

zu berücksichtigen sind.
Eine Emission erfolgt für den Fall $\Delta n = +1$, und – da das Rotationsquant etwa eine Größenordnung kleiner als das Oszillationsquant ist – für $\Delta l = \pm 1$. Aus Gln. (1) u. (2) erhalten wir somit

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}\left[\hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2}(2l + 1 \pm 1)\right]. \tag{4}$$

Für die Oszillationsquantenzahl l haben wir ganzzahlige Werte

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

einzusetzen. Wenn wir in Gl. (4) das obenstehende positive Vorzeichen annehmen, so finden wir für die Wellenzahlen des R-Zweiges

$$\bar{\nu}_+ = \frac{\omega_0}{2\pi c} + \frac{h}{4\pi^2 c\mu r^2}(l+1) = \frac{\omega_0}{2\pi c} + 2(l+1)\,B. \tag{5}$$

Bei Wahl des negativen Vorzeichens in Gl. (4) erhalten wir für die Wellenzahlen des P-Zweiges

$$\bar{\nu}_- = \frac{\omega_0}{2\pi c} - \frac{h}{4\pi^2 c\mu r^2}\,l = \frac{\omega_0}{2\pi c} - 2lB. \tag{6}$$

Dabei berücksichtigen wir, daß für die Rotationsquantenzahl $l = 0$ ein Übergang in Rotationsbewegungen mit negativer Quantenzahl $l - 1 = -1$ nicht möglich ist. Der Wert $l = 0$ tritt daher in Gl. (6) nicht auf, vielmehr haben wir zu schreiben

$$l = 1, 2, 3, \dots.$$

Wir ersehen hieraus, daß die erste Linie des R-Zweiges die Wellenzahl

$$\bar{\nu}_{+1} = \frac{\omega_0}{2\pi c} + 2B,$$

die erste Linie des P-Zweiges die Wellenzahl

$$\bar{\nu}_{-1} = \frac{\omega_0}{2\pi c} - 2B$$

aufweist. Eine Linie mit der Wellenzahl

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\omega_0}{2\pi c}\,.$$

tritt dagegen nicht auf.

Aus der Messung der Linien $\bar{\nu}_{+1}$ und $\bar{\nu}_{-1}$ finden wir die Wellenzahl der fehlenden Linie zu

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\nu_{+1} + \nu_{-1}}{2} = \frac{2{,}1730 + 2{,}1654}{2}\,10^5\ \mathrm{m}^{-1} = 2{,}1692 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Hieraus erhalten wir für die Oszillationsfrequenz

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = c\bar{\nu}_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}1692 \cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1} = \underline{6{,}5076 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}}.$$

Das Oszillationsquant beträgt

$$\hbar\omega_0 = hc\bar{\nu}_0 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 6{,}51 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J} = \underline{4{,}31 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}}.$$

Aus dem Abstand beider Linien entnehmen wir

$$\bar{\nu}_{+1} - \bar{\nu}_{-1} = 4B = \frac{h}{2\pi^2 c\mu r^2} = (2{,}1730 - 2{,}1654) \cdot 10^5\ \mathrm{m}^{-1} = 760\ \mathrm{m}^{-1}$$

und daraus für das Trägheitsmoment des CO-Moleküls den Wert

$$J = \mu r^2 = \frac{h}{2\pi^2 c(\bar{\nu}_{+1} - \bar{\nu}_{-1})} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2\,(3{,}14)^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 760}\ \mathrm{kgm}^2 =$$

$$= \underline{1{,}47 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{kgm}^2}.$$

Die reduzierte Masse des CO-Moleküls beträgt

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{12 \cdot 16}{12 + 16} \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1{,}147 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}.$$

Für den Kernabstand finden wir also

$$r = \sqrt{\frac{J}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}47 \cdot 10^{-46}}{1{,}147 \cdot 10^{-26}}}\ \mathrm{m} = \underline{1{,}13 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}}.$$

441. Von einer Quecksilberdampflampe wird eine Linie der Wellenlänge $\lambda = 2536 \cdot 10^{-10}$ m emittiert. Berechnen Sie die SMEKAL-RAMAN-Streuung in einer H_2-Atmosphäre, wenn der Kernabstand der beiden Wasserstoffatome $r = 0{,}77 \cdot 10^{-10}$ m und die Masse eines Wasserstoffatoms $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg beträgt.

Lösung

Die Einstrahlung des Quecksilberlichts bedeutet für das getroffene Molekül, daß seine Energie auf ein Zwischenniveau angehoben wird. Dabei kann die Rotationsquantenzahl um ± 1 verändert werden. Bei der Wiederausstrahlung kann ebenfalls eine Änderung um ± 1 eintreten. Für den SMEKAL-RAMAN-Effekt ergeben sich damit die folgenden Auswahlregeln:

$$\Delta l = -1 - 1 = -2 \quad (P\text{-Zweig}),$$
$$\Delta l = -1 + 1 = 0 \quad (Q\text{-Zweig}),$$
$$\Delta l = +1 + 1 = +2 \quad (R\text{-Zweig}).$$

Aus dem Energieniveau für die Rotationsschwingungszustände

$$E_{n,l} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 + \frac{l(l+1)\,\hbar^2}{2\mu r^2}$$

erhalten wir demnach die Wellenzahlen:

1. $\Delta l = -2$ (P-Zweig):

$$\bar{\nu}_- = \frac{E_{n+1,l-2} - E_{n,l}}{hc} = \frac{\omega_0}{2\pi c} - 2(2l-1)\frac{h}{8\pi^2 c\mu r^2} = \frac{\omega_0}{2\pi c} - 2(2l-1)B;$$

$l = 2, 3, 4, \ldots;$

2. $\Delta l = 0$ (Q-Zweig):

$$\bar{\nu}_0 = \frac{E_{n+1,l} - E_{n,l}}{hc} = \frac{\omega_0}{2\pi c};$$

3. $\Delta l = +2$ (R-Zweig):

$$\bar{\nu}_+ = \frac{E_{n+1,l+2} - E_{n,l}}{hc} = \frac{\omega_0}{2\pi c} + 2(2l+3)\frac{h}{8\pi^2 c\mu r^2} = \frac{\omega_0}{2\pi c} + 2(2l+3)B;$$

$l = 0, 1, 2, \ldots.$

Bei der numerischen Rechnung müssen wir die reduzierte Masse des Wasserstoffmoleküls, nämlich

$$\mu = \frac{m}{2} = 0{,}836 \cdot 10^{-27}\,\text{kg},$$

einsetzen. Wir erhalten damit zunächst

$$B = \frac{h}{8\pi^2 c\mu r^2} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{8 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}836 \cdot 10^{-27} \cdot (0{,}77 \cdot 10^{-10})^2}\,\text{m}^{-1} =$$
$$= 5644\,\text{m}^{-1}.$$

Ferner ist

$$\frac{\omega_0}{2\pi c} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2536 \cdot 10^{-10}}\,\text{m}^{-1} = 3{,}9432 \cdot 10^6\,\text{m}^{-1}.$$

Für die Wellenzahlen $\bar{\nu}$ und die Wellenlängen λ der gestreuten Strahlung ergeben sich somit die in folgender Tabelle dargestellten Werte (s. auch Bild 222):

		P-Zweig			*Q*-Zweig	*R*-Zweig		
	l	4	3	2		0	1	2
	Zusatzglied	$-14\,B$	$-10\,B$	$-6\,B$		$6\,B$	$10\,B$	$14\,B$
λ	10^{-10} m	2588,0	2572,8	2558,0	2536,0	2514,4	2500,2	2486,2
$\bar{\nu}$	10^6 m^{-1}	3,8642	3,8868	3,9093	3,9432	3,9771	3,9996	4,0222

442. Die Auswertung eines FORTRAT-Diagramms für das AlH-Spektrum ergibt einen Bandenkopf des R-Zweiges für die Quantenzahl $l = 4{,}1$, einen Bandenkopf des P-Zweiges für die Quantenzahl $l = -5{,}1$. Als Differenz $\Delta = (\bar{\nu}_{\text{rot}R} - \bar{\nu}_{\text{rot}Q}) - (\bar{\nu}_{\text{rot}Q} - \bar{\nu}_{\text{rot}P})$ wird unabhängig von der Quantenzahl l ein Wert $\Delta = 920\ \text{m}^{-1}$ ermittelt. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des AlH-Moleküls vor und nach dem Quantensprung (Bild 223).

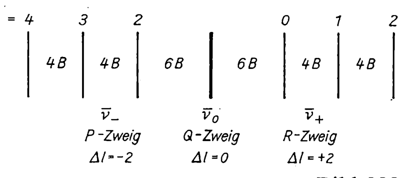


Bild 222

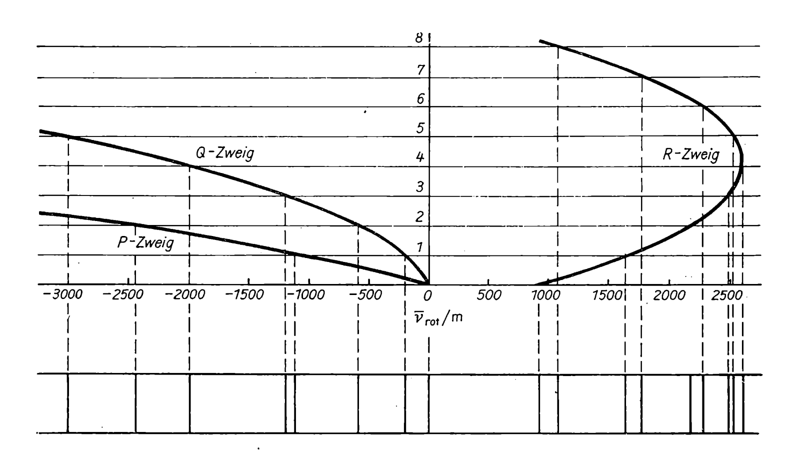


Bild 223

Lösung

Die Änderung der Elektronenanordnung im Molekül ist mit einer Änderung seines Trägheitsmoments verbunden. Wir bezeichnen mit J das Trägheitsmoment vor, mit J' das Trägheitsmoment nach Veränderung des Quantenzustands. Demzufolge erhalten

wir für die Rotationsenergie vor und nach dem Quantensprung die Ausdrücke

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2J}, \quad E'_{l'} = \frac{l'(l'+1)\hbar^2}{2J'}.$$

Die Änderung des Rotationszustands bewirkt eine zusätzliche Strahlungskomponente. Für die Wellenzahl dieser zusätzlichen Komponente erhalten wir

$$\bar{\nu}_{\text{rot}} = \frac{E'_{l'} - E_l}{hc} = \frac{h}{8\pi^2 c}\left[\frac{l'(l'+1)}{J'} - \frac{l(l+1)}{J}\right] \tag{1}$$

mit den Auswahlregeln

$$\Delta l = l' - l = 0, \pm 1.$$

Wir setzen

$$\bar{B} = \frac{h}{8\pi^2 c}\left(\frac{1}{J'} + \frac{1}{J}\right), \quad \bar{C} = \frac{h}{8\pi^2 c}\left(\frac{1}{J'} - \frac{1}{J}\right) \tag{2}$$

und erhalten für $\Delta l = +1$ (R-Zweig)

$$\bar{\nu}_{\text{rot}R} = \bar{B}(l+1) + \bar{C}(l+1)^2, \tag{3}$$

für $\Delta l = 0$ (Q-Zweig)

$$\bar{\nu}_{\text{rot}Q} = \bar{C}(l + l^2) \tag{4}$$

und für $\Delta l = -1$ (P-Zweig)

$$\bar{\nu}_{\text{rot}P} = -\bar{B}l + \bar{C}l^2. \tag{5}$$

Die Zusammendrängung der Spektrallinien erfolgt am Parabelscheitel des betreffenden Zweiges. Wir erhalten den Scheitelwert des R-Zweiges aus der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\nu}_{\text{rot}R}}{\mathrm{d}l} = \bar{B} + 2\bar{C}(l+1) = 0, \tag{6}$$

woraus folgt

$$l = -\frac{\bar{B}}{2\bar{C}} - 1. \tag{6.1}$$

Für den Q-Zweig ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\nu}_{\text{rot}Q}}{\mathrm{d}l} = \bar{C}(1 + 2l) = 0 \tag{7}$$

und daraus

$$l = -\frac{1}{2}. \tag{7.1}$$

Für den P-Zweig schließlich gilt

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\nu}_{\text{rot}P}}{\mathrm{d}l} = -\bar{B} + 2\bar{C}l = 0, \tag{8}$$

d. h.

$$l = \frac{\bar{B}}{2\bar{C}}. \tag{8.1}$$

Aus den Häufungsstellen des *P*-Zweiges und des *R*-Zweiges entnehmen wir

$$-5{,}1 = \frac{\bar{B}}{2\bar{C}}, \quad 4{,}1 = -\frac{\bar{B}}{2\bar{C}} - 1. \tag{9}$$

Die Ergebnisse der Messung für den *P*-Zweig und für den *R*-Zweig zeigen also Übereinstimmung miteinander.
Für die Differenz Δ erhalten wir aus den Gln. (3), (4) u. (5)

$$\Delta = (\bar{\nu}_{\text{rot}R} - \bar{\nu}_{\text{rot}Q}) - (\bar{\nu}_{\text{rot}Q} - \bar{\nu}_{\text{rot}P}) = \bar{B} + \bar{C} \tag{10}$$

und somit durch Auswertung der Messung

$$\bar{B} + \bar{C} = 920\,\text{m}^{-1}. \tag{11}$$

Aus den beiden Bestimmungsgln. (9) u. (11) entnehmen wir schließlich die Werte für

$$\bar{B} = 1020\,\text{m}^{-1}, \quad \bar{C} = -100\,\text{m}^{-1}. \tag{12}$$

Wir verwenden für die Ermittlung des Trägheitsmoments vor dem Quantensprung die Definitionsgl. (2) und finden

$$J = \frac{h}{4\pi^2 c}\,\frac{1}{\bar{B} - \bar{C}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 3 \cdot 10^8}\,\frac{1}{1120}\,\text{kgm}^2 =$$

$$= \frac{5{,}10 \cdot 10^{-44}}{1120}\,\text{kgm}^2 = \underline{4{,}55 \cdot 10^{-47}\,\text{kgm}^2}. \tag{13}$$

Als Trägheitsmoment nach Vollzug des Quantensprungs ergibt sich

$$J' = \frac{h}{4\pi^2 c}\,\frac{1}{\bar{B} + \bar{C}} = \frac{5{,}10 \cdot 10^{-44}}{920}\,\text{kg}\,\text{m}^2 = \underline{5{,}54 \cdot 10^{-47}\,\text{kgm}^2}. \tag{14}$$



Aufgaben

584. Vergleichen Sie das Quant der H_α-Linie mit dem Schwingungs- und mit dem Rotationsquant des HCl-Moleküls. Die Kreisfrequenz der inneren Schwingung ist $\omega_0 = 5{,}21 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1}$, der Kernabstand $r = 1{,}30 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$, die Wellenlänge der H_α-Strahlung $\lambda_{H\alpha} = 6564 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$; die relative Atommasse des Cl wird mit 35 angesetzt.

585. Berechnen Sie für das HCl-Molekül, welche Wellenlänge der Strahlung des Oszillationsquants und welche der des Rotationsquants entspricht. Kreisfrequenz und Kernabstand wie in Aufg. 584.

586. Berechnen Sie die Formel der Wahrscheinlichkeitsdichte für den harmonischen Oszillator, der sich in der zweiten Grundschwingung befindet. Verglei-

chen Sie das Resultat mit der klassischen Theorie. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Chlormolekül in der zweiten Grundschwingung eine Auslenkung $x = 0$, $dx = 2 \cdot 10^{-12}$ m anzutreffen? Die Kreisfreqenz der inneren Schwingung ist $\omega_0 = 1{,}07 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1}$.

587. Bestimmen Sie, wieviel Nullstellen die einzelnen Lösungsfunktionen $\psi = \psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators haben.

588. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem in der Grundschwingung befindlichen harmonischen Oszillator einen Kernabstand anzutreffen, welcher gemäß der klassischen Theorie nicht zulässig ist?

589. Berechnen Sie $\overline{x^2}$ für den Fall des harmonischen Oszillators, der sich in der ersten Grundschwingung befindet. Welchen Wert erhalten Sie für den Fall des Wasserstoffmoleküls?

590. Berechnen Sie die Impulsmatrix des harmonischen Oszillators.

591. Berechnen Sie die Matrix $px - xp$.

592. Berechnen Sie die Energiematrix

$$E = \frac{1}{2\mu} p^2 + \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 x^2 .$$

593. Berechnen Sie für die einzelnen Quantenzustände des harmonischen Oszillators das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{\Delta x^2}$ des Ortes und das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{\Delta p_x^2}$ des Impulses.

594. Bestimmen Sie die Übergangsfrequenz eines HCl-Moleküls für Übergänge aus dem Zustand $n = 3$ in den Zustand $n = 2$. Die Kreisfrequenz ist $\omega_0 = 5{,}21 \cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1}$.

595. Wie groß ist während einer Periodendauer für das HCl-Molekül die Übergangswahrscheinlichkeit $3 \to 2$?

596. Berechnen Sie die Nullpunktenergie eines Oszillators von 10 g Masse in einem Feld der Stärke 1 Nm^{-1}.

597. Die Energie des eindimensionalen Oszillators ist $E = kT$ ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J grd^{-1}, T abs. Temperatur). Berechnen Sie die Quantenzahl des harmonischen Oszillators in Aufg. 596, und zeigen Sie, daß die Energieänderung praktisch stetig erfolgt.

598. Für den Abstand zweier Rotationslinien des NO-Moleküls wird als Mittelwert $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 339\,\text{m}^{-1}$ gemessen. Berechnen Sie daraus das Trägheitsmoment, den Kernabstand und das Rotationsquant des NO-Moleküls.

599. Berechnen Sie den Abstand der Rotationslinien des J_2-Moleküls. Der Kernabstand ist $r = 2{,}66 \cdot 10^{-10}$ m, die relative Atommasse 126. Es stehe ein Spektralapparat der Auflösung $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10000$ zur Verfügung. In welchem Bereich muß die Trägerstrahlung liegen, damit die Rotationslinien noch getrennt werden können?

600. Es werden die Rotationsschwingungsbande des Br_2-Moleküls untersucht. Wie groß muß das Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ des Spektralapparats sein, um die Linien voneinander zu trennen? Dabei ist vorauszusetzen, daß nur Rotations- bzw. Oszillationsenergie des Moleküls verändert wird. Die Kreisfrequenz ist $\omega_0 = 6{,}11 \cdot 10^{13}\,\text{s}^{-1}$, das Trägheitsmoment $J = 3{,}42 \cdot 10^{-45}\,\text{kgm}^2$.

601. Berechnen Sie, wie groß das Auflösungsvermögen einer Apparatur sein muß, um den in Beispiel 441 berechneten SMEKAL-RAMAN-Effekt erkennbar werden zu lassen.

602. Berechnen Sie Trägheitsmoment und Kernabstand für ein N_2-Molekül aus den Angaben der SMEKAL-RAMAN-Streuung, wenn das Spektrum im Zentrum durch folgende Wellenzahlen

charakterisiert ist:

$$\bar{\nu} = 3{,}9452 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$3{,}9444 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$3{,}9432 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$3{,}9420 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$3{,}9412 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1}.$$

603. Aus den Lösungen $\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ der SCHRÖDINGER-Gleichung für den starren Rotator sind die zirkularen Matrixelemente

$$(\xi + \mathrm{i}\eta)_{l,m;\,l',m'} = r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi} \times \psi^*_{l,m} \psi_{l',m'} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$$

und die linearen Matrixelemente

$$(\zeta)_{l,m;\,l',m'} = r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\vartheta \times \psi^*_{l,m} \psi_{l',m'} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$$

zu berechnen.

Dabei besteht zwischen ξ, η, ζ und r, ϑ, φ der Zusammenhang zwischen cartesischen und Kugelkoordinaten:

$$\xi \pm \mathrm{i}\eta = r \sin\vartheta\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi},$$
$$\zeta = r \cos\vartheta.$$

Welche Schlußfolgerungen ergeben sich aus der Lösung für die Linienintensität, welche Auswahl- und Polarisationsregeln gelten, was folgt daraus für den ZEEMAN-Effekt?

7. *Relativitätstheorie*

7.1. Spezielle Relativitätstheorie

Messungen von MICHELSON ergaben im Jahre 1881, daß auf der bewegten Erde das Licht – unabhängig von seiner Ausbreitungsrichtung – stets die gleiche Geschwindigkeit aufweist. Hierauf gründet sich die von EINSTEIN im Jahre 1905 entwickelte **spezielle Relativitätstheorie.** In ihrem *speziellen Relativitätsprinzip* geht sie davon aus, daß für jedes **Inertialsystem** das Licht in allen Richtungen die gleiche Geschwindigkeit hat. Als Inertialsystem bezeichnet man ein Bezugssystem, in welchem jeder Körper, der keinen äußeren Kräften unterliegt, sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.
Jedes gegenüber einem Inertialsystem Σ mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitende Koordinatensystem Σ' bildet gleichfalls ein Inertialsystem.
Die experimentelle Bestätigung für das spezielle Relativitätsprinzip wurde nach unterschiedlichen Methoden u. a. 1912 von HARRES, 1914 von SAGNAC und im selben Jahr von WIEN erbracht.
Im folgenden seien zwei Koordinatensysteme Σ und Σ' betrachtet. Das System Σ ist durch seine räumlichen Koordinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ sowie durch die mit der Zeit t verbundene Koordinate $x_4 = ict$ definiert. In der gleichen Weise wird das System Σ' durch die vier Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 repräsentiert. Gegenüber Σ bewegt sich Σ' mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit kann man die Ursprungspunkte $0(0, 0, 0, 0)$ und $0'(0, 0, 0, 0)$ beider Systeme als identisch voraussetzen.
Es wird die Ausbreitung einer zur Zeit $t = t' = 0$ vom Punkte $0(0, 0, 0)$ ausgehenden Kugelwelle betrachtet. Entsprechend dem Relativitätsprinzip erhält man für die Wellenfronten die Ausdrücke

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = \sum_{j=1}^{4} x_j^2 = 0.$$

Vom System Σ' aus beurteilt gilt in gleicher Weise

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2t'^2 = \sum_{j=1}^{4} x_j'^2 = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Transformationsformeln von LORENTZ. Wenn man als Richtung, unter der sich Σ' gegen Σ fortbewegt, die x-Achse beider Systeme wählt (Bild 224), so folgt nach LORENTZ

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Bild 224

Dabei ist $\beta = v/c$.

Nach Maßgabe der LORENTZ-Formeln wird auch die Zeit transformiert. Eine Zeit t', die von einer mit dem System Σ' bewegten Uhr festgestellt wird, bezeichnet man als die Eigenzeit des Systems Σ'. Die Geschwindigkeit substantieller Teilchen kann nicht größer als die Lichtgeschwindigkeit c sein. *Für die Grenzwertbetrachtung $c \to \infty$ geht die* **Lorentztransformation** *in die* **Galileitransformation** *der klassischen Physik über.*

Das *relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten* ergibt sich, wenn man die Geschwindigkeitskomponenten eines Körpers

$$q_j = \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}, \quad q_j' = \frac{\mathrm{d}x_j'}{\mathrm{d}t'}; \quad j = 1, 2, 3$$

in die Formeln für die LORENTZ-Transformation einsetzt. Man erhält dann

$$q_1' = \frac{q_1 - v}{1 - \dfrac{vq_1}{c^2}}, \quad q_2' = \frac{q_2\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \dfrac{vq_1}{c^2}}, \quad q_3' = \frac{q_3\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \dfrac{vq_1}{c^2}}.$$

Wenn sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v bewegt und dabei unter einem Winkel ϑ gegen seine Bewegungsrichtung Lichtstrahlen der Frequenz ν_0 aussendet, so nimmt ein ruhender Beobachter eine Frequenz

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta\cos\vartheta}$$

wahr.

Die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Ereignisses können nach MINKOWSKI als *Komponenten eines Vektors im vierdimensionalen Raum* aufgefaßt werden. Wenn man

die MAXWELLschen Gleichungen der Elektrodynamik in einem derartigen vierdimensionalen Raum formuliert, so ergibt sich als Beziehung zwischen der Masse und der ihr äquivalenten Energie

$$E = mc^2 \quad \text{(EINSTEIN-Gleichung)}.$$

Außerdem erhält man die LORENTZ-Gleichung

$$\vec{F} = e\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Sie gibt die Kraft $\vec{F}$ an, die auf eine im elektrischen Feld $\vec{E}$ und im magnetischen Feld $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte elektrische Ladung e einwirkt.

B Beispiele

443. In einem System Σ finden in den Punkten x_1 und x_2 zur Zeit $t = t_0$ gleichzeitig zwei Ereignisse statt. Der Abstand der beiden Punkte ist $x_2 - x_1 = 10000$ m. Das System Σ bewegt sich gegen ein System Σ' mit der Geschwindigkeit $v = 3 \cdot 10^5$ ms^{-1}. Wie werden beide Ereignisse im System Σ' registriert?

Lösung

Entsprechend der LORENTZ-Transformation ergeben sich für Σ' die Zeitkoordinaten

$$t_1' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Hieraus folgt

$$t_1' - t_2' = \frac{v}{c^2}\,\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Mit den vorgegebenen Werten erhalten wir

$$t_1' - t_2' = \frac{3 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2}\,\frac{10^4}{\sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8}\right)^2}}\,\mathrm{s} = \frac{1}{3 \cdot 10^7 \sqrt{1 - 10^{-6}}}\,\mathrm{s} \approx$$

$$\approx \underline{\frac{1}{3}\,10^{-7}\,\mathrm{s}.}$$

Demnach finden die in der Eigenzeit t des Systems Σ gleichzeitig auftretenden Ereignisse in der Eigenzeit t' des Systems Σ' nicht gleichzeitig, sondern zu verschiedenen Zeitpunkten statt (Relativität der Gleichzeitigkeit).

444. In einem Koordinatensystem Σ gebe eine Uhr an der Stelle $x = x_0$ Zeitsignale, die in einem Abstand $\Delta t = t_2 - t_1 = 1$ s aufeinanderfolgen. Ein änderes Koordinatensystem Σ' bewege sich gegenüber Σ mit einer Geschwindigkeit $v = 3 \cdot 10^5$ ms^{-1}. Wie groß erscheint die zeitliche Intervallänge in der Eigenzeit des Systems Σ'?

Lösung

Entsprechend der LORENTZ-Transformation gilt für die **Eigenzeit** t' die Beziehung

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \tag{1}$$

Daraus folgt

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

und hieraus

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \tag{2}$$

Im vorliegenden Fall ist $v \ll c$, so daß wir für Gl. (2) auch schreiben können:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta t \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) . \tag{3}$$

In Zahlen:

$$\Delta t' = 1 \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8}\right]^2\right) \text{s} = \underline{\left(1 + \frac{1}{2} 10^{-6}\right) \text{s}}.$$

Im bewegten System Σ' erscheinen die Intervalle Δt gedehnt. Dieser Effekt läßt sich auch in der Art deuten, daß der Gang einer gegen das Bezugssystem Σ' bewegten Uhr verlangsamt erscheint.

445. Ein Körper der Länge l bewegt sich gegenüber einem Beobachter mit der Geschwindigkeit v. Wie groß muß v sein, damit der 100 m lange Körper eine **Lorentzkontraktion** von einem Millimeter erfährt?

Lösung

Der bewegte Körper sei mit einem Koordinatensystem Σ verbunden. Als Bewegungsrichtung wählen wir die x-Achse. Für die Länge l des Körpers, gemessen im mitbewegten System Σ, schreiben wir

$$l = x_2 - x_1 . \tag{1}$$

Dabei geben x_1 und x_2 die beiden Endpunkte des Körpers an. Der Beobachter befindet sich im Koordinatensystem Σ'. Entsprechend der LORENTZ-Transformation gilt

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2}$$

Aus Gl. (1) folgt

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3}$$

Die Punkte x_1 und x_2 sind dabei, betrachtet vom Beobachter in Σ', gleichzeitig anzuvisieren. Es muß also gelten: $t_1' = t_2'$. Damit erhalten wir aus Gl. (2)

$$t_2' - t_1' = 0 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

woraus sich

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}\,\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4}$$

ergibt. Wir setzen Gl. (4) in Gl. (3) ein und erhalten

$$l' = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\sqrt{1-\beta^2} = l\sqrt{1-\beta^2}. \tag{5}$$

Der in Σ' befindliche, nicht mitbewegte Beobachter nimmt eine Längsverkürzung wahr. Wenn wir $v \ll c$ voraussetzen, dann folgt

$$l' = l\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right).$$

Im vorliegenden Fall soll

$$l - l' = l\frac{\beta^2}{2} = 1\ \text{mm} = 10^{-3}\ \text{m}$$

sein. Damit ergibt sich wegen $l = 100$ m

$$v = c\sqrt{\frac{2\Delta l}{l}} = 3\cdot 10^8\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-3}}{10^2}}\ \text{ms}^{-1} = \underline{1{,}34\cdot 10^6\ \text{ms}^{-1}}.$$

Ein experimenteller Nachweis dieses Effekts war wegen der hohen, zur Längskontraktion erforderlichen Geschwindigkeiten, bislang noch nicht möglich.

446. Gegenüber einem festen Bezugspunkt P bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}6\,c$ nach links. Ein zweiter Körper bewegt sich dagegen mit der Geschwindigkeit $v_2 = 0{,}8\,c$ nach rechts (Bild 225). Wie groß ist, beurteilt von einem der beiden Körper aus, ihre Relativgeschwindigkeit q' gegeneinander?

Bild 225

Lösung

Gemäß dem relativistischen Additionstheorem der Geschwindigkeiten gilt für die Relativgeschwindigkeit q', beobachtet vom System Σ' aus (Bild 225), die Beziehung

$$q' = q_1' = \frac{q_1 - v}{1 - \frac{vq_1}{c^2}} .$$

Wir setzen das System Σ als ruhend voraus. Es befindet sich jedoch in ihm ein Körper, der sich, von Σ aus beurteilt, mit der Geschwindigkeit $v_1(q_1, 0, 0)$, $q_1 = -v_1 = -0{,}6\,c$ bewegt. Von dem mit der Geschwindigkeit $v = v_2 = 0{,}8\,c$ gegen Σ bewegten System Σ' aus gesehen, stellen wir die Geschwindigkeit

$$q' = \frac{(-0{,}6 - 0{,}8)\,c}{1 + 0{,}8 \cdot 0{,}6} = -\frac{1{,}4\,c}{1{,}48} = \underline{-0{,}946\,c}$$

fest. Im Gegensatz zu den Aussagen der klassischen Physik wird also eine Relativgeschwindigkeit registriert, die kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Auch dieser Effekt läßt sich durch eine Längskontraktion erklären.

447. Zwei kohärente Lichtstrahlen der Wellenlänge $\lambda = 6 \cdot 10^2$ nm werden über eine Strecke der Länge $l = 10$ m durch eine strömende Flüssigkeit mit der Brechzahl $n = 1{,}33$ geleitet (Bild 226). Im ersten Fall sind Flüssigkeitsströmung und Lichtstrahl einander

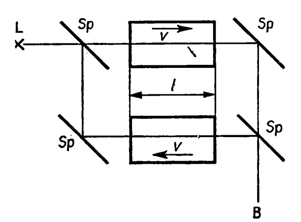


Bild 226. Zur Berechnung der Geschwindigkeit eines Strahlung emittierenden Wasserstoffatoms

entgegengesetzt, im zweiten Fall einander gleich gerichtet. In beiden Fällen sei die Geschwindigkeit der Strömung dem Betrage nach gleich groß. Wie groß muß die Strömungsgeschwindigkeit v sein, wenn die zwei Lichtstrahlen gegeneinander eine Phasenverschiebung von einer halben Periode erhalten sollen?

Lösung

In der ruhenden Flüssigkeit beträgt die Lichtgeschwindigkeit $c_F = c/n$. Wir verknüpfen eine der beiden Flüssigkeiten mit dem Koordinatensystem Σ, den Beobachter aber mit dem System Σ'. Gemäß dem relativistischen Additionstheorem der Geschwin-

digkeiten ergibt sich für den gegenüber der strömenden Flüssigkeit ruhenden Beobachter als Relativgeschwindigkeit c_r des Lichts

$$c_r^+ = \frac{c_F + v}{1 + \frac{vc_F}{c^2}}, \quad c_r^- = \frac{c_F - v}{1 - \frac{vc_F}{c^2}}.$$

Wegen der Voraussetzung $v \ll c_F = c/n$ können wir hierfür schreiben:

$$c_r^+ = (c_F + v)\left(1 - \frac{vc_F}{c^2}\right), \quad c_r^- = (c_F - v)\left(1 + \frac{vc_F}{c^2}\right).$$

Wenn wir die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, folgt daraus

$$c_r^+ = c_F + v - \frac{c_F^2}{c^2} v = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$c_r^- = c_F - v + \frac{c_F^2}{c^2} v = \frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Der Faktor $(1 - 1/n^2)$ wird als **Fresnelscher Mitführungskoeffizient** bezeichnet. Er ist um so größer, je größer die optische Dichte des bewegten Mediums ist und verschwindet im Fall $n = 1$ (Vakuum). Längs einer Flüssigkeitsstrecke l haben wir eine bestimmte Anzahl Wellen (N). Für N gilt

$$N = l \frac{1}{\lambda_F} = l \frac{c}{c_r} \frac{1}{\lambda}.$$

Dabei gibt λ die Vakuumwellenlänge, λ_F die Wellenlänge in der Flüssigkeit an. Für die in Strahlrichtung strömende Flüssigkeit messen wir demzufolge als Wellenzahl längs der Strecke l

$$N^+ = l \frac{c}{\lambda} \frac{1}{c_r^+} = l \frac{c}{\lambda} \frac{1}{\frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = n \frac{l}{\lambda}\left[1 - \frac{v}{c} n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right],$$

für die entgegen der Strahlrichtung strömende Flüssigkeit aber

$$N^- = l \frac{c}{\lambda} \frac{1}{c_r^-} = l \frac{c}{\lambda} \frac{1}{\frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = n \frac{l}{\lambda}\left[1 + \frac{v}{c} n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Wenn die Differenz beider Wellenzahlen gerade eine halbe Periode sein soll, so muß gelten:

$$N^- - N^+ = l \frac{n}{\lambda} \frac{v}{c} n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{l}{\lambda} \frac{v}{c} (n^2 - 1) = \frac{1}{2}.$$

Hieraus erhalten wir für die gesuchte Geschwindigkeit v der strömenden Flüssigkeit die Aussage

$$v = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} \frac{c}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{600 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^8}{10\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1\right]} \text{ ms}^{-1} = \frac{81}{7} \text{ ms}^{-1} = \underline{11{,}57 \text{ ms}^{-1}}.$$

Die Relativgeschwindigkeit, mit der die beiden Flüssigkeitsströme sich gegeneinander bewegen, muß also $2v = 23{,}14\ \mathrm{ms}^{-1}$ sein.

448. In einem Kanalstrahl bewegt sich ein Wasserstoffatom und sendet dabei Licht aus. Ein ruhender Beobachter mißt für die in Richtung des Kanalstrahls emittierte H_α-Linie eine Wellenlänge $\lambda^- = 6532{,}44 \cdot 10^{-10}$ m, für den entgegengesetzt emittierten Lichtstrahl eine Wellenlänge $\lambda^+ = 6593{,}22 \cdot 10^{-10}$ m. Die Messung wird so ausgeführt, daß man das primäre Licht des Kanalstrahls mit dem an einem Spiegel reflektierten Licht des in entgegengesetzter Richtung emittierten Strahls vergleicht. Wie groß ist die Geschwindigkeit des die Strahlung emittierenden Wasserstoffatoms?[1]) $\lambda_{H\alpha} = 6562{,}76 \cdot 10^{-10}$ m

Lösung

Wir bezeichnen mit ν_0 die in der Eigenzeit des Wasserstoffatoms gemessene emittierte Frequenz, wie sie ein mit dem Atom zusammen **bewegter Beobachter** wahrnimmt. $\lambda_0 = \lambda_{H\alpha}$ gibt die emittierte Wellenlänge an. Das Atom bewege sich mit der Geschwindigkeit v und sende unter dem Winkel ϑ gegen seine Bewegungsrichtung einen Lichtstrahl aus (Bild 227). Ein ruhender Beobachter mißt die Frequenz der emittierten Strahlung zu

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \cos\vartheta}. \tag{1}$$

Für die Wellenlänge ergibt sich

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1 - \cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \lambda_0 \left(1 - \beta\cos\vartheta + \frac{1}{2}\beta^2 \pm \cdots\right). \tag{2}$$

LS B KS

KS *Kanalstrahl*
LS *Lichtstrahl*
B *Beobachter*

Bild 227

Erfolgt die Strahlung in Richtung des Kanalstrahls, so ist $\vartheta = 0$. Für die Wellenlänge der emittierten Strahlung erhalten wir aus Gl. (2) die Beziehung

$$\lambda^- = \lambda_0 \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \lambda_0 \left(1 - \beta + \frac{\beta^2}{2} \pm \cdots\right). \tag{3}$$

Hingegen stellen wir für einen dem Kanalstrahl entgegengesetzt emittierten Lichtstrahl eine Wellenlänge

$$\lambda^+ = \lambda_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \lambda_0 \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + \cdots\right) \tag{4}$$

---

[1]) IVES, H. I., STILLWELL, G. R.: Journ. Opt. Soc. **28**, 215, 1938; **29**, 183 und 294, 1939. – OTTING, G.: Diss. München, Phys. Z. S. **40**, 681, 1939. Die relativistische Deutung des Effekts wurde von OTTING gegeben

fest. Das primäre Licht ist also nach blau, das sekundäre nach rot verschoben. Der Mittelwert

$$\frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} = \lambda_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \tag{5}$$

weist gegenüber der Strahlung des nichtbewegten Wasserstoffatoms eine geringe Rotverschiebung auf (*relativistische Rotverschiebung*). Im vorliegenden Fall ist

$$\frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} = \frac{6532{,}44 + 6593{,}22}{2} \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 6562{,}83 \cdot 10^{-10}\,\text{m}. \tag{6}$$

Gegenüber der H_α-Linie des ruhenden Atoms tritt also gemäß Gl. (5) eine relativistische Rotverschiebung

$$\frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} - \lambda_0 = (6562{,}83 - 6562{,}76) \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 0{,}070 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

$$= \lambda_0 \frac{v^2}{2c^2} \tag{7}$$

auf.

Aus der Verschiebung

$$\lambda^+ - \frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} = \lambda_0 \frac{v}{c} = \tag{8}$$

$$= (6593{,}22 - 6562{,}83) \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 30{,}39 \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 6562{,}76 \cdot 10^{-10}\,\text{m}\,\frac{v}{c}$$

erhalten wir

$$v = \frac{30{,}39}{6562{,}76}\,c = 4{,}63 \cdot 10^{-3}\,c = \underline{1389\,\text{kms}^{-1}}. \tag{9}$$

Der gleiche Wert ergibt sich aus der Verschiebung

$$\frac{\lambda^- + \lambda^+}{2} - \lambda^- = \lambda_0 \beta.$$

Wir berechnen zur Probe

$$\lambda_0 \frac{\beta^2}{2} = 6562{,}76 \cdot 10^{-10}\,\text{m}\,\frac{(1{,}389 \cdot 10^6)^2}{2(3 \cdot 10^8)^2}$$

und erhalten

$$\lambda_0 \frac{\beta^2}{2} = 0{,}070 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (7).

449. Die Lebensdauer des μ-Mesons wurde von Rasetti durch Messung der Zeitdifferenz Δt zwischen dem Einfallen des Mesons und dem Auftreten des beim Zerfall entstehenden Sekundärelektrons bestimmt. Hierfür ergibt sich $\Delta t \approx 2 \cdot 10^{-6}$ s. Aus Absorptionsmessungen an μ-Mesonen der kosmischen Strahlung muß man auf einen Zerfallsweg von etwa 20 km Länge schließen. Welches Massenverhältnis (Masse des bewegten Teilchens gegen Ruhmasse) folgt hieraus? Wie groß ist die Geschwindigkeit der μ-Mesonen?

Lösung

Wir setzen zunächst in erster Näherung die Geschwindigkeit v der Mesonen mit der Lichtgeschwindigkeit c gleich. Aus dem Zerfallsweg von 20 km Länge folgt damit eine Zerfallszeit

$$\Delta t' = \frac{20 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}\,\mathrm{s} = \frac{2}{3}\,10^{-4}\,\mathrm{s}.$$

Sie wird von einem gegenüber dem Meson bewegten Beobachter gemessen. Wenn wir dagegen die Messung der Zerfallszeit in der Eigenzeit des Mesons ausführen, so folgt

$$\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}.$$

Wegen

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ergibt sich

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\frac{2}{3}\,10^{-4}}{2 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Hieraus erhalten wir

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 9 \cdot 10^{-4},$$

also für die Geschwindigkeit der μ-Mesonen den Wert

$$v = \sqrt{1 - 9 \cdot 10^{-4}}\;c = \underline{(1 - 4{,}5 \cdot 10^{-4})\,c},$$

d. h. nur eine geringfügige Abweichung gegenüber der Lichtgeschwindigkeit.
Aus der Beziehung

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

folgt für das Verhältnis der bewegten Masse zur Ruhmasse

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 9 \cdot 10^{-4})}} = \frac{1}{3}\,10^2 \approx \underline{30}.$$

Infolge der hohen Geschwindigkeit hat also die bewegte Masse den dreißigfachen Wert der Ruhmasse.
Weitere Beispiele zur Abhängigkeit der Energie von der Masse und zur relativistischen Massenveränderlichkeit sind in den Beispielen 373 bis 379 enthalten.

A Aufgaben

604. Wie groß ist die Längskontraktion für einen mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}1\,c$ bewegten Körper von $l = 1$ m Länge?
605. Welche Geschwindigkeit muß ein bewegter Körper haben, damit eine LORENTZ-Verkürzung auf die Hälfte der ursprünglichen Länge eintritt?
606. In einem Bezugssystem I werden im Abstand $\Delta t = 4$ s Signale ausgesandt. In dem gegen I bewegten System II werden diese Signale aber im Abstand $\Delta t' = 5$ s registriert. Welche Geschwindigkeit hat das System II gegenüber dem System I?
607. Ein Wasserstoffatom bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}01\,c$ und emittiert dabei die H_α-Linie. Berechnen Sie die wahrzunehmende Wellenlänge für die Bewegungsfälle
    a) auf den Beobachter zu,
    b) vom Beobachter weg,
    c) gegen die Beobachtungsrichtung unter einem Winkel $\vartheta = 90°$.
608. Zwei Raketen bewegen sich gegenüber einem festen Bezugspunkt: die eine mit der Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}9\,c$ nach links, die andere mit der Geschwindigkeit $v_2 = 0{,}9\,c$ nach rechts. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit, mit welcher sich beide Raketen gegeneinander bewegen für die Fälle
    a) vom festen Bezugspunkt aus,
    b) von einer der beiden Raketen aus beurteilt?
609. Von der in Aufgabe 608 dargestellten, nach rechts fliegenden Rakete wird ein Geschoß abgefeuert, das, von der Rakete aus beurteilt, wiederum mit einer Geschwindigkeit von $0{,}9\,c$ gleichfalls nach rechts fliegt. Welche Relativgeschwindigkeit wird von der nach links fliegenden Rakete gemessen?
610. Ein bewegter Körper besitze die Geschwindigkeitskomponenten $q_x = 0{,}1\,c$; $q_y = 0{,}2\,c$; $q_z = -0{,}1\,c$. Gegen das verwendete Koordinatensystem bewege sich ein zweites mit der Geschwindigkeit $v = v_x = 0{,}4\,c$. Welche Geschwindigkeitskomponenten hat der betrachtete Körper, vom bewegten Bezugssystem aus gemessen?
611. In einem Bezugssystem bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v_1. Ein zweites Bezugssystem ist gegen das erste mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt. Welcher Betrag der Relativgeschwindigkeit ergibt sich für den bewegten Körper, vom zweiten Bezugssystem aus beurteilt? Berechnen Sie hiernach für Aufgabe 610 den Betrag der Relativgeschwindigkeit.
612. Welche Energie ist notwendig, um ein Elektron der Ruhmasse $m_0 = 9{,}1 \times \times 10^{-31}$ kg aus der Ruhelage bis auf die Geschwindigkeit $v = 0{,}99\,c$ zu beschleunigen?
613. Wie groß ist die Masse eines Elektrons, das eine Bewegungsenergie von 10 keV hat?
614. Bei der Elektronenbeschleunigung im Betatron werden die Teilchen durch ein Magnetfeld der Induktion B auf einer Kreisbahn gehalten. Im Endzustand betrage der Kreisbahndurchmesser 0,15 m, die Amplitude des Induktionsflusses sei $\Phi = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Vs. Berechnen Sie Geschwindigkeit, Masse und Energie der beschleunigten Elektronen. Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsinduktion können gleich Null gesetzt werden.

7.2. Allgemeine Relativitätstheorie

Die von EINSTEIN im Jahre 1915 geschaffene **allgemeine Relativitätstheorie** formuliert die physikalischen Gesetze in *kovarianten Gleichungen*, die unabhängig vom **Inertialsystem** gelten. Sie befreit damit die Physik von der Notwendigkeit, spezielle Inertialsysteme einzuführen, für die allein die bisher formulierten Gesetze gültig waren. Mit dieser Theorie eröffnet sich ein Zugang zur Lösung grundlegender **kosmologischer Fragen.** Obgleich beim gegenwärtigen Stand der Entwicklung weder die astronomischen noch die theoretischen Kenntnisse ausreichend sind, um endgültige Aussagen über den Aufbau des **Universums** zu gestatten, lassen sich doch bereits weitreichende Schlußfolgerungen ziehen.
Die allgemeine Relativitätstheorie gründet sich auf den Begriff des Feldes als eines selbständigen, nicht reduzierbaren Grundbegriffs, wobei sie die *Gleichheit von träger und schwerer Masse* postuliert:

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}} = \text{träge Masse} = \text{schwere Masse} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Feldintensität}}.$$

In einem mit konstanter Beschleunigung g bewegten Bezugssystem ergeben sich danach grundsätzlich die gleichen physikalischen Erscheinungen wie im Erdschwerefeld.
Aus einer Diskussion der kovarianten Feldgleichungen geht hervor, daß für astronomische Abmessungen im Weltraum die ebene **Euklidische Geometrie** nicht anzuwenden ist, sondern daß hier eine schon von GAUSS, RIEMANN und LEVI-CIVITÀ entwickelte **Geometrie gekrümmter Flächen und Räume** Gültigkeit hat. Es erweist sich als zweckmäßig, von geometrischen Analogien auszugehen.
Nach der GAUSSschen Flächentheorie läßt sich die Krümmung einer zweidimensionalen Fläche, z. B. der Erdoberfläche, allein aus Messungen auf dieser Fläche bestimmen. In gleicher Weise kann die Geometrie des dreidimensionalen Raumes als Geometrie auf einer Hyperfläche in einem fiktiven vierdimensionalen Raum gedeutet werden. Auch die Krümmung der dreidimensionalen Sphäre läßt sich nach der RIEMANNschen Geometrie allein aus Messungen in dieser Sphäre bestimmen.
Die Krümmungsverhältnisse in den Bahnen der Massenpunkte, die sonst keinen äußeren Kräften unterliegen, wirken sich wie Kräfte physikalischen Ursprungs aus. Auf diese Weise finden die Gravitationskräfte ihre physikalische Erklärung.
Entfernt sich ein Lichtstrahl von einem das Gravitationsfeld erzeugenden Körper, nimmt also in Richtung des Strahles der Betrag des Gravitationspotentials φ ab, so verringert sich die Frequenz des ausgesandten Lichts. Für schwache Gravitationsfelder, d. h. für $|\varphi| \ll c^2$, ergibt sich folgende Beziehung: Wird in einem Punkt mit dem Potential φ_0 eine Schwingung der Frequenz ν_0 erzeugt, so nimmt der Beobachter an

einem Punkt mit dem Potential φ die Frequenz

$$\nu = \frac{\nu_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)}{1 - \frac{\varphi_0}{c^2}} = \nu_0\left(1 + \frac{\varphi_0 - \varphi}{c^2}\right)$$

wahr. Die an verschiedenen Punkten des Weltalls ausgestrahlten Spektren haben also bei ihrer Entstehung überall das gleiche Aussehen. Bei ihrer Wahrnehmung auf der Erde zeigen sich jedoch infolge der unterschiedlichen Gravitationsfelder Frequenzverschiebungen.

Aus den von FRIEDMAN im Jahre 1922 abgeleiteten Lösungsfunktionen der allgemeinen Relativitätstheorie ergibt sich, daß das Universum eine zeitlich veränderliche Ausdehnung hat. Allgemeine Untersuchungen von LIFSCHITZ führten 1946 zu dem Ergebnis, daß eine expandierende Welt stabil, eine kontrahierende dagegen instabil ist. Diese *Theorie des expandierenden Weltalls* findet ihre Bestätigung durch umfangreiche astronomische Beobachtungen, die erstmalig von HUBBLE ausgeführt wurden. Nach diesen Untersuchungen zeigen die extragalaktischen, nicht mehr zu unserem Milchstraßensystem gehörenden Spiralnebel eine Rotverschiebung, welche darauf zurückzuführen ist, daß sich diese Nebel von uns weg bewegen. Als Beziehung zwischen dem Abstand r eines solchen Spiralnebels, seiner Radialgeschwindigkeit v und der Frequenzverschiebung $\Delta\nu$ ergeben sich die beiden Gleichungen

$$-\frac{\Delta\nu}{\nu} = kr, \quad v = -c\frac{\Delta\nu}{\nu} = kcr.$$

Die HUBBLE-Konstante k ist bisher nur größenordnungsmäßig bekannt. Ihr Wert liegt bei

$$k \approx 10^{-26}\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Wichtige experimentelle bzw. beobachtbare *Bestätigungen für die allgemeine Relativitätstheorie sind* außer der *Spektralverschiebung* auch die *Perihelbewegung des Planeten Merkur* und die *Ablenkung des Lichtstrahls* in starken Gravitationsfeldern.

B Beispiele

450. In einer Höhe $H = 21$ m über der Erdoberfläche befindet sich eine Strahlungsquelle. Ihre Strahlung wird an der Erdoberfläche registriert. Berechnen Sie die Frequenzverschiebung infolge der Gravitationswirkung des Erdschwerefeldes (Bild 228).

Lösung

Wir denken uns ein Atom im Grundzustand mit der Energie E auf der Erdoberfläche. Durch Energiezufuhr wird dieses Atom angeregt und dabei in den Energiezustand E' versetzt. Danach bringen wir das Atom auf die Höhe $H = 21$ m. Da

$$m' = \frac{E'}{c^2}$$

die gesamte Masse des Atoms im angeregten Zustand darstellt, haben wir gegen das Gravitationsfeld der Erde die Energie

$$m'gH = \frac{E'gH}{c^2} \tag{1}$$

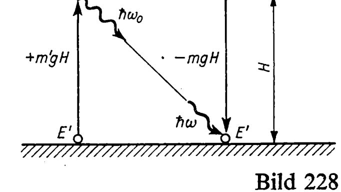


Bild 228

aufzubringen, die dem System zugeführt wird.
Das angeregte Atom emittiere in der Höhe H ein Photon und gehe bei diesem Elementarakt wieder in den energetischen Grundzustand E über. Die emittierte Frequenz ω_0, gemessen in der Eigenzeit des Atoms, folgt aus

$$\omega_0 = \frac{E' - E}{\hbar}. \tag{2}$$

Wir transportieren nunmehr das jetzt im Grundzustand befindliche Atom wieder zur Erdoberfläche zurück, wobei das System die Energie

$$mgH = \frac{E}{c^2} gH \tag{3}$$

abgibt. Durch Absorption des in der Höhe H emittierten Photons, dem wir an der Erdoberfläche die Energie $\hbar\omega$ zuordnen, wird das Atom aus dem Grundzustand wieder in den angeregten Zustand überführt. Nach dem Energieerhaltungsgesetz ergibt sich aus den Gln. (1) u. (3)

$$E' + \frac{E'gH}{c^2} - \hbar\omega_0 - \frac{EgH}{c^2} + \hbar\omega = E', \tag{4}$$

d. h.

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \frac{E - E'}{c^2} gH. \tag{5}$$

Hieraus erhalten wir nach Division durch $\hbar$ und unter Verwendung der Gl. (2)

$$\omega = \omega_0 + \frac{\omega_0}{c^2} gH = \omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right). \tag{6}$$

Demnach wird auf der Erdoberfläche eine höhere Frequenz registriert als in der Höhe H **(Blauverschiebung).** Mit den vorgegebenen Zahlenwerten erhalten wir eine relative Frequenzzunahme

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{gH}{c^2} = \frac{9{,}81 \cdot 21}{(3 \cdot 10^8)^2} = \underline{0{,}229 \cdot 10^{-14}}. \tag{7}$$

Erstmalig durch Anwendung des **Mößbauereffekts** wurde ein experimenteller Nachweis dieses Effekts der allgemeinen Relativitätstheorie möglich.[1])

451. Im Gravitationsfeld der Erde bewegt sich eine Uhr mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10^4\ \mathrm{ms}^{-1}$ senkrecht nach oben. Die Erdbeschleunigung werde im Verlauf des Aufsteigens und während des nachfolgenden freien Falls konstant $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ gesetzt. Luftreibung ist zu vernachlässigen. Wie groß ist die Zeitdifferenz gegenüber einer auf der Erdoberfläche ruhenden Uhr, wenn die bewegte Uhr wieder zurückkehrt?

Lösung

Infolge der Wirkung des Gravitationsfeldes zeigt eine Uhr, die sich – von der Erdoberfläche aus beurteilt – für das Zeitintervall dt in der Höhe H aufhält, in der Eigenzeit das Zeitintervall

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right). \tag{1}$$

Die Bewegung mit der Geschwindigkeit v bedingt andererseits, daß ein auf der Erdoberfläche zurückbleibender Beobachter die Zeit

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

registriert, wenn die bewegte Uhr das Zeitintervall dt' anzeigt (Beispiel 444). Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ folgt hieraus

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \mathrm{d}t\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right). \tag{3}$$

Wenn wir beide Korrekturen zusammenfassen, so finden wir, daß die in der Höhe H mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr das Zeitintervall

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\left[1 + \frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right] \tag{4}$$

anzeigt, während die auf der Erdoberfläche ruhende Uhr das Zeitintervall dt angibt. Zur Berechnung des von der bewegten Uhr während des Auf- und Absteigens angezeigten Zeitintervalls $\Delta t'$ berechnen wir das Integral

$$\Delta t' = \int_0^{\Delta t} \mathrm{d}t' = \int_0^{\Delta t}\left(1 + \frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Dabei haben wir entsprechend den Gesetzen des freien Falls zu schreiben:

$$H = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t, \quad v = v_0 - gt. \tag{6}$$

[1]) Versuch von Pound und Rebka, Harvard-Universität 1959

Wir setzen Gl. (6) in Gl. (5) ein und erhalten

$$\Delta t' = \Delta t + \frac{1}{c^2} \int\limits_0^{\Delta t} \left[-\frac{g^2}{2} t^2 + g v_0 t - \frac{(v_0 - gt)^2}{2} \right] \mathrm{d}t. \tag{7}$$

Wir bestimmen die von beiden Uhren angegebenen Zeiten, wenn die bewegte Uhr wieder auf der Erdoberfläche auftrifft. Für die unbewegte Uhr folgt aus der ersten Gleichung in Gl. (6), wenn wir $H = 0$ setzen,

$$t = \Delta t = \frac{2v_0}{g}. \tag{8}$$

Wir integrieren Gl. (7), setzen den gefundenen Wert in Gl. (8) ein und erhalten

$$\Delta t' = \Delta t \left(1 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{v_0^2}{2} - g v_0 \Delta t + \frac{g^2 \Delta t^2}{3}\right]\right) = \Delta t \left(1 + \frac{v_0^2}{6c^2}\right). \tag{9}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich aus Gl. (8)

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10^4}{9{,}81}\ \mathrm{s} = \underline{2038{,}7\ \mathrm{s}}$$

und aus Gl. (9)

$$\Delta t' = 2038{,}7 \left(1 + \frac{10^8}{6\,(3 \cdot 10^8)^2}\right) \mathrm{s} = \underline{2038{,}7\ (1 + 1{,}85 \cdot 10^{-10})\ \mathrm{s}.}$$

Die Abweichung liegt also in einer Größenordnung, die für einen experimentellen Nachweis die Anwendung des MÖSSBAUER-Effekts oder der Lasertechnik erfordert.

Zur Behandlung der Beispiele 450 und 451 hätte auch von vornherein die Theorie des schwachen Gravitationsfeldes entsprechend der Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie herangezogen werden können.

452. Der Begleiter des Sirius hat die Masse $m = 1{,}68 \cdot 10^{30}$ kg, sein Radius ist $r = 1{,}88 \times$ $\times\ 10^4$ km. An der Oberfläche dieses Sterns wird die H_α-Linie emittiert ($\lambda_{H\alpha} = 6564{,}68 \times$ $\times\ 10^{-10}$ m). Berechnen Sie die auf der Erdoberfläche gemessene Wellenlänge und den Betrag der Rotverschiebung. Welche Radialgeschwindigkeit müßte der Siriusbegleiter haben, wenn die auftretende Rotverschiebung ohne Gravitationsfeld, nur als DOPPLER-Effekt, auftreten sollte?

Lösung

Wir wenden die für das schwache Gravitationsfeld gültigen Formeln an. Die Gravitationskonstante hat den Wert $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. Für das Gravitationspotential φ_0 an der Oberfläche des Siriusbegleiters gilt

$$\varphi_0 = -\gamma \frac{m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}68 \cdot 10^{30}}{1{,}88 \cdot 10^7}\ \mathrm{J\,kg^{-1}} = -5{,}96 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m^2 s^{-2}}.$$

Dagegen müssen wir für das Erdpotential φ schreiben

$$\varphi = -\gamma \frac{m_E}{r_E} = -g r_E = -9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m^2 s^{-2}} = -6{,}25 \cdot 10^7\ \mathrm{m^2 s^{-2}}.$$

Dabei bedeutet g die Erdbeschleunigung, r_E und m_E Erdradius bzw. Erdmasse. Wir finden $|\varphi| \ll |\varphi_0|$. Für die auf der Erde gemessene Frequenz der H_α-Linie erhalten wir somit

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{\varphi_0}{c^2}} \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right) = \nu_0 \left(1 - \frac{\varphi - \varphi_0}{c^2}\right) =$$

$$= \nu_0 \left(1 - \frac{5{,}96 \cdot 10^{12} - 6{,}25 \cdot 10^7}{(3 \cdot 10^8)^2}\right) = \nu_0 \,(1 - 6{,}6 \cdot 10^{-5}).$$

Für die Wellenlänge der H_α-Linie folgt also

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\nu_0}(1 + 6{,}6 \cdot 10^{-5}) = 6564{,}68 \cdot 10^{-10}(1 + 6{,}6 \cdot 10^{-5})\,\text{m} =$$

$$= \underline{6565{,}11 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}.$$

Demnach tritt eine Rotverschiebung

$$\Delta\lambda = \underline{0{,}43 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}$$

auf.

Nach der Theorie des DOPPLER-Effekts zeigt eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Lichtquelle die Wellenlängenverschiebung

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \frac{v}{c}.$$

Hieraus folgt

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c = \frac{0{,}43 \cdot 10^{-10}}{6564{,}68 \cdot 10^{-10}} \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1} = \underline{19{,}6 \cdot 10^3\,\text{ms}^{-1}}.$$

Die infolge des Gravitationsfeldes auftretende Rotverschiebung entspricht demnach einer Geschwindigkeit der bewegten Lichtquelle von 19,6 kms^{-1}.

453. Die Strahlung eines extragalaktischen Nebels zeige für die H_α-Linie des Wasserstoffatoms die Wellenlänge $\lambda = 6630 \cdot 10^{-10}$ m. Berechnen Sie aus dieser Angabe Entfernung und Radialgeschwindigkeit des Nebels. Die Wellenlänge der H_α-Linie auf der Erde beträgt $\lambda = 6564 \cdot 10^{-10}$ m.

Lösung

Für die mittlere relativistische Frequenzverschiebung und den Abstand r besteht nach HUBBLE die Beziehung

$$-\frac{\Delta\nu}{\nu} = kr. \tag{1}$$

Ferner gilt für den Zusammenhang zwischen Frequenzverschiebung und Geschwindigkeit des Nebels die Beziehung

$$-c\frac{\Delta\nu}{\nu} = v = kcr. \tag{2}$$

Hierin ist $k \approx 10^{-26}\,\mathrm{m}^{-1}$ die HUBBLE-Konstante.
Im vorliegenden Fall ist

$$-\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{6630 - 6564}{6564} = \frac{66}{6564} \approx 0{,}01 . \tag{3}$$

Aus den Gln. (1) u. (3) erhalten wir damit für den Abstand des Nebels die Angabe

$$r = -\frac{\Delta\nu}{\nu}\frac{1}{k} \approx \frac{0{,}01}{10^{-26}}\,\mathrm{m} = \underline{10^{24}\,\mathrm{m}}, \tag{4}$$

das sind etwa 10^8 Lichtjahre. Für die Geschwindigkeit des Nebels in radialer Richtung erhalten wir aus den Gln. (2) u. (4)

$$v = kcr \approx 10^{-26} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{24}\,\mathrm{ms}^{-1} = 3 \cdot 10^6\,\mathrm{ms}^{-1} = \underline{\frac{c}{100}} .$$

A Aufgaben

615. Eine Uhr wird im Erdschwerefeld mit der Anfangsgeschwindigkeit
$v_0 = 1\,\mathrm{km\,s}^{-1}$
senkrecht nach oben geworfen. Welche Zeitdifferenz gegenüber einer auf der Erdoberfläche ruhenden Uhr zeigt sich, wenn die bewegte Uhr die Erdoberfläche wieder erreicht?

616. Eine Uhr wird mit der konstanten Beschleunigung $a = g/2$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1\,\mathrm{km\,s}^{-1}$ senkrecht nach oben bewegt. Welche Zeitdifferenz wird gegenüber einer auf der Erdoberfläche ruhenden Uhr festgestellt, wenn die bewegte Uhr die Erdoberfläche wieder erreicht?

617. Von einer auf der Erdoberfläche stehenden Lichtquelle wird die H_α-Linie ausgestrahlt ($\lambda = 6562{,}7 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$). Welche Wellenlängenverschiebung stellt ein Beobachter in 10 km Höhe fest? Welcher DOPPLER-Geschwindigkeit entspricht diese Verschiebung?

618. Welche Wellenlängenverschiebung zeigt die auf der Sonnenoberfläche ausgestrahlte H_α-Linie bei ihrer Registrierung auf der Erdoberfläche?
(Sonnenmasse $m_\odot = 1{,}98 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$,
Sonnenradius $r_\odot = 6{,}95 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$,
$\lambda_{H\alpha} = 6564{,}7 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$,
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$)

619. Welche Wellenlängenverschiebung würde eine auf der Sonnenoberfläche ausgestrahlte H_α-Linie zeigen, wenn sie auf dem Siriusbegleiter registriert werden könnte? (Masse des Siriusbegleiters $m = 1{,}68 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, Radius $r = 1{,}88 \times \times 10^7\,\mathrm{m}$)

620. Im intergalaktischen Raum, fern von allen Gravitationsfeldern, strahlt ein Wasserstoffatom die H_α-Linie aus. Welche Wellenlängenverschiebung wird auf der Erdoberfläche gemessen?

621. Als Krümmungsradius des Universums wird ein Wert $R = 5 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}$ geschätzt. Berechnen Sie, welche Rotverschiebung das Licht eines Spiralnebels erleidet, der sich im Abstand $r = 2R$ befindet. Wie groß ist die Radialgeschwindigkeit des Nebels? (HUBBLE-Konstante $k \approx 10^{-26}\,\mathrm{m}^{-1}$)

Lösungen zu den Aufgaben

1. $v = 1{,}0\ \text{ms}^{-1}$; $a = 0{,}5\ \text{ms}^{-2}$; $\cos\alpha = \cos(v, x) = \cos(a, x) = 0{,}8$; $\alpha = 36{,}8°$
2. $v = 131\ \text{ms}^{-1}$; $v_1 = 113\ \text{ms}^{-1}$; $v_2 = 149\ \text{ms}^{-1}$
3. $v = \omega\sqrt{x^2 - k^2}$; $a = \omega^2 x$
4. Die Bahn ist eine archimedische Spirale der Form $r = \frac{n}{b}\varphi$; $v = n\sqrt{1 + b^2t^2}$; $a = nb\sqrt{4 + b^2t^2}$
5. $v_{10} = 3{,}2\ \text{ms}^{-1}$
6. $a = -0{,}78\ \text{ms}^{-2}$
7. $t = 10\ \text{s}$
8. $t = 5\ \text{s}$; der Treffpunkt liegt 15 m vom Ausgangsort des ersten Körpers entfernt
9. $t = 0{,}04\ \text{s}$; $a = 12500\ \text{ms}^{-2}$
10. $t = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = t_1(\sqrt{7} - \sqrt{6}) \approx 0{,}8\ \text{s}$
11. $v_0 = 18\ \text{ms}^{-1}$
12. $t = 3\ \text{s}$; $h = 150{,}9\ \text{m}$
13. $d = 2\,v_0 t$
14. $h = 385{,}8\ \text{m}$
15. $v_0 = 98{,}1\ \text{ms}^{-1}$; $h = 490{,}5\ \text{m}$
16. $t = 0{,}204\ \text{s}$; $\overline{AB} = 0{,}298\ \text{m}$
17. $v_{20} = 100\ \text{ms}^{-1}$; $s_{20} = 1333\ \text{m}$
18. $v_1 = 25\ \text{ms}^{-1}$; $s_1 = 833\ \text{m}$
19. $a = k_1 e^{-k_2 t}$; $v = \frac{k_1}{k_2}\left(1 - e^{-k_2 t}\right)$; $s = \frac{k_1}{k_2}\left(t + \frac{1}{k_2}e^{-k_2 t} - \frac{1}{k_2}\right)$
20. $s = 102\ \text{km}$
21. $v_0 = 300\ \text{ms}^{-1}$; $\varphi_0 = 60°$
22. $T = 0{,}63\ \text{s}$; $n = 1{,}59\ \text{s}^{-1}$; $a_n = 200\ \text{ms}^{-2}$
23. $a_t = 0{,}4\ \text{ms}^{-2}$; $a_n = 12{,}8\ \text{ms}^{-2}$; $a = 12{,}806\ \text{ms}^{-2}$
24. $a_t = 0{,}111\ \text{ms}^{-2}$; $a_n = 0{,}222\ \text{ms}^{-2}$; $a = 0{,}248\ \text{ms}^{-2}$
25. $n = 35{,}8$
26. $\omega = 10\,\pi\ \text{s}^{-1}$
27. $n = 60\ \text{min}^{-1}$
28. Die Bewegung des Schiffes muß senkrecht zur Strömung des Flusses gerichtet sein; $t = 60\ \text{s}$
29. $v = 29\ \text{ms}^{-1}$
30. $a = \omega c \sin\varphi\sqrt{\omega^2t^2 + 4}$
31. $a = \frac{\pi^2}{900} r\,(n_1 - n_2)^2$
32. $a = \omega\sqrt{r'^2\omega^2 + 4v'^2}$
33. $l \geqq \frac{2T_0 a}{\sqrt{4T_0^2 - Q^2}}$
34. $K = F\sqrt{6} = 61{,}24\ \text{kp} = 600{,}8\ \text{N}$
35. $m = 0{,}05\ \text{kg}$; $v = 2\ \text{ms}^{-1}$
36. $F = 6 \cdot 10^5\ \text{N}$; $W = 36 \cdot 10^5\ \text{J}$
37. $F = 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{N}$
38. a) An den Polen ist $F_z = 0$ und $F_C = \text{max}$; b) am Äquator ist $F_z = \text{max}$ und $F_C = 0$.
39. $t = 20{,}4\ \text{s}$; $s = 204\ \text{m}$
40. a) $F_1 = 73{,}5\ \text{kp}$ in beiden Fällen; b) $F_2 = 76{,}1\ \text{kp}$ in beiden Fällen
41. $\frac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\frac{s_1}{s_2}}$
42. $s = \frac{mv_0}{k}$

43. $\omega = \sqrt{\dfrac{F - G}{ml}} = 4{,}43\ \mathrm{s^{-1}}$
44. $F = 100\ \mathrm{N}$
45. $t_1 = 9\ \mathrm{s}$
46. $F = 135{,}9\ \mathrm{kp} = 1332\mathrm{N}$; die Kraft wirkt der Fahrtrichtung entgegen
47. $W = 7200\ \mathrm{kpm}$
48. $W = 12{,}8\ \mathrm{kpm}$
49. $W = 2{,}46\ \mathrm{kpm}$
50. $s = 0{,}16\ \mathrm{m}$
51. $F = 77{,}16\ \mathrm{N}$
52. $v_2 = 30\ \mathrm{km\,h^{-1}}$
53. $h_{\max} = 35\ \mathrm{m}$
54. $P = 20\ \mathrm{PS}$
55. $P = 27{,}7\ \mathrm{PS}$
56. $\cos\varphi = \dfrac{2}{3} + \dfrac{v_0^2}{3rg}$; $v_0 \geqq rg$
57. $F_h = 0{,}998\ F_0$
58. $V = -\gamma \dfrac{m}{\sqrt{s^2 + r^2}}$; $\vec{E} = \gamma \dfrac{ms}{(s^2 + r^2)^{3/2}} \vec{\varrho}$
59. $g_M \approx 0{,}2\, g_E = 0{,}2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}} = 1{,}962\ \mathrm{ms^{-2}}$
60. $v_0 = 7{,}9\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
61. $x_S = -1{,}54\ \mathrm{cm}$; $y_S = -0{,}62\ \mathrm{cm}$; $z_S = 0{,}75\ \mathrm{cm}$
62. $x_S = \dfrac{\pi b}{8}$
63. $x_S = \dfrac{a}{9}$
64. $x_S = y_S = \dfrac{2r}{\pi} = 6{,}3\ \mathrm{cm}$; Nullpunkt des Koordinatensystems im Kreismittelpunkt; Koordinatenachsen sind die Radien, die den Viertelkreis begrenzen
65. $x_S = 0$; $y_S = \dfrac{3}{8} r$; $z_S = 0$
66. $y_S = \dfrac{m_2 v_2}{m_1 v_1} x_S + \dfrac{m_2 d}{m_1 + m_2}$; $v_S = \dfrac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}$
67. $v = \dfrac{m_2 v_0}{m_1} = 0{,}1\ \mathrm{ms^{-1}}$
68. $v = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0{,}392\ \mathrm{ms^{-1}}$; das Vorzeichen gibt an, daß der Wagen nach Auftreffen der Kugel seine Bewegungsrichtung umkehrt
69. $F_r = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v_r = 3{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{N}$
70. $J = \dfrac{1}{4} mr^2$
71. $J = \dfrac{1}{6} ma^2$
72. $J = \dfrac{2}{5} mr^2$
73. $J = \dfrac{1}{12} ma^2 \approx 0{,}0017\ \mathrm{kgm^2}$
74. $\tan\varphi = \dfrac{8Q}{3G}$; $\varphi \approx 53^\circ\, 10'$
75. $h = \dfrac{2r}{\tan\alpha} = 0{,}567\ \mathrm{m}$
76. $\tan\varphi = \dfrac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2} = 0{,}8$; $\varphi = 38^\circ\, 40'$
77. $\alpha = 0{,}0363\ \mathrm{s^{-2}}$; $W = 5{,}88\ \mathrm{kpm}$
78. $\omega = \sqrt{\dfrac{3g\tan\varphi}{3a + 2l_0 \sin\varphi}} = 2{,}06\ \mathrm{s^{-1}}$
79. $W_k = 0{,}00924\ \mathrm{J}$
80. $\omega \approx 3{,}13\ \mathrm{s^{-1}}$
81. $v_0 = \sqrt{3gl} = 5{,}4\ \mathrm{ms^{-1}}$
82. $v = \sqrt{gs \sin\varphi} = 4{,}95\ \mathrm{ms^{-1}}$
83. $M = 0{,}0314\ \mathrm{Nm}$
84. $\Delta\omega = 0{,}6\ \mathrm{s^{-1}}$
85. $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}} \approx 0{,}07\ \mathrm{m}$
86. $l_r = \dfrac{2}{3}\, l = 0{,}666\ \mathrm{m}$
87. $F = \dfrac{mr^2\omega^2 \sin 2\varphi}{8l} = 0{,}333\ \mathrm{N}$
88. $F = 103{,}6\ \mathrm{kp} = 1016\ \mathrm{N}$
89. $l = 2{,}001\ \mathrm{m}$
90. $\sigma = 24{,}54\ \mathrm{kp\,cm^{-2}}$; $\Delta l = -0{,}044\ \mathrm{mm}$
91. $\Delta l = 12{,}28\ \mathrm{m}$
92. $\Delta V = \dfrac{l_0 F(m - 2)}{mE}$
93. $\Delta V = -9{,}72\ \mathrm{mm^3}$
94. $F = 37{,}7\ \mathrm{kp} = 371\ \mathrm{N}$
95. $h = 3{,}33\ \mathrm{cm}$
96. $M = 4{,}108\ \mathrm{kpm}$
97. $T = 2{,}51\ \mathrm{s}$
98. $F = 12990\ \mathrm{kp} = 127500\ \mathrm{N}$
99. $r \geqq 0{,}89\ \mathrm{mm}$
100. $p = b + \dfrac{1}{2}\varrho\omega^2 x^2 + \varrho g h$
101. $p = 1{,}145\ \mathrm{atm}$
102. $h = 5556\ \mathrm{m}$
103. $F = \pi r^2 \varrho g (h - h_1) = 62{,}8\ \mathrm{kp} = 617\ \mathrm{N}$
104. $F = 1263\ \mathrm{kp} = 12390\ \mathrm{N}$
105. $\varrho = 2{,}5\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$
106. $F = 10\ \mathrm{kp} = 98{,}1\ \mathrm{N}$
107. Gewicht der Kugel: $G_1 = 7{,}4\ \mathrm{N}$; Auftrieb: $G_2 = 5{,}1\ \mathrm{N}$; die Kugel sinkt zu Boden

108. $2r_1 = 10{,}46$ cm; $d = 0{,}1$ cm
109. $\varrho = 0{,}79$ g cm^{-3}
110. $h = h_1 + h_2$
111. $v = 1{,}144$ ms^{-1}
112. $t_0 = \frac{A}{\mu A_1}\sqrt{\frac{h_0}{g}} \times (\sqrt{2} - 1)$
113. $t = 0{,}53$ s
114. $F = \varrho Av\,(v - u)$; $u = \frac{1}{2}v$
115. $v = 2{,}7$ cm s^{-1}
116. $\sigma = 49{,}7 \cdot 10^{-3}$ Jm^{-2}
117. $\sigma = 72{,}1 \cdot 10^{-3}$ Jm^{-2}
118. $T = 0{,}486$ s
119. $\mu = 0{,}08$
120. $F_{max} = 2{,}96$ kp $= 29$ N
121. Die Amplitude ist um das 7,4fache verringert
122. $b = 1{,}39$ s^{-1}; $T_0 = 0{,}497$ s
123. $k = 44150$ kp m^{-1}
124. $x_0 = 0{,}07$ m
125. $f_2 = 45$ s^{-1}
126. $y = \frac{5}{3}x$
127. $\varphi_1 = 40°\,14'$
128. $v = 1425$ ms^{-1}
129. $v_1 = 5000$ ms^{-1}; $v_2 = 3170$ ms^{-1}
130. $v_1 = 334$ ms^{-1}
131. $\varkappa = 1{,}56$
132. $v_H = 4590$ ms^{-1}
133. $\nu_0 = 319$ s^{-1}
134. Auf den 1,047fachen Wert erhöht
135. $l_0 = 0{,}30$ m
136. $J = 10^{-11}$ W cm^{-2}
137. $t_1 = 15$ °C; $t_2 = 140$ °C; $t_3 = -50$ °C
138. $\Delta l = 0{,}04$ cm
139. $d' = 4{,}04$ cm
140. $l = 186{,}024$ m
141. $n_2 - n_1 = 9{,}6$
142. $\Delta J = 24 \cdot 10^{-4}$ kgm^2
143. $\Delta p = 47$ atm
144. $F = 17{,}9$ kp
145. $\Delta t = 2$ grd
146. $l_1 = 0{,}14\, l_2$
147. $\beta = 18{,}6 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}
148. Die Eintauchtiefe ist dann 0,635 h
149. $m = 4{,}8$ kg
150. $t = 1287$ °C
151. $t_m = 14{,}93$ °C
152. $m = 6$ kg
153. $t = 9{,}9$ °C
154. $m = 70{,}9$ g
155. $l = 536{,}7$ kcal kg^{-1}
156. $m = 24{,}3$ g
157. $p = 72{,}6$ atm $\triangleq$ $\triangleq$ 55164 Torr $\triangleq$ $\triangleq$ 73,5 bar
158. a) $t = -91$ °C, b) $t = 273\,(n - 1)$ °C
159. $t = -53{,}25$ °C
160. $p = 705$ Torr
161. $V = 24{,}4$ l
162. $t_1 = 63{,}7$ °C
163. $m = 0{,}5$ kg
164. $\varrho = 2{,}34$ kgm^{-3}
165. $G = 72{,}28$ kp
166. $t = 224$ °C
167. $v = 9{,}61$ m^{3}kg^{-1}
168. Stickstoff
169. $V = 30{,}6$ l
170. Es wurden 95% der ursprünglichen Menge abgepumpt
171. $m = 2{,}6$ mg
172. $r = 1{,}5$ cm
173. $p = 193$ atm
174. $p = 15{,}87$ atm
175. $M = 29{,}7$ g mol^{-1}
176. $p_1 = 157$ Torr; $p_2 = 593$ Torr
177. $p = 39$ atm; $p_1 = 2{,}98$ atm; $p_2 = 2{,}05$ atm; $p_3 = 0{,}39$ atm; $p_4 = 33{,}58$ atm
178. a) $N = 3{,}35 \cdot 10^{25}$; b) $N = 8{,}41 \cdot 10^{22}$; c) $N = 8{,}44 \cdot 10^{22}$
179. a) $m = 9{,}3 \cdot 10^{-23}$ g; b) $m = 10{,}5 \cdot 10^{-23}$ g; c) $m = 9{,}7 \cdot 10^{-23}$ g
180. a) 830 ms^{-1}; 493 ms^{-1}; 52 ms^{-1}; b) 2195 ms^{-1}; 1304 ms^{-1}; 137 ms^{-1}
181. $W_k \approx 4{,}14 \cdot 10^{-16}$ J
182. $t_2 = -200$ °C
183. $n = 3{,}6 \cdot 10^{14}$
184. $t = 374$ °C
185. $\Delta W_k = -5{,}6 \cdot 10^{-21}$ J; $\Delta v = -895$ ms^{-1}
186. a) 1845 ms^{-1}; 1504 ms^{-1}; 1697 ms^{-1}; b) 1304 ms^{-1}; 1063 ms^{-1}; 1200 ms^{-1}; c) 460 ms^{-1}; 375 ms^{-1}; 423 ms^{-1}
187. $\bar{v} = \sqrt{\frac{3v_0^2}{\varkappa}}$; $v_m = v_0\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}$
188. a) $U = \frac{3}{2}pV$; b) $U = \frac{5}{2}pV$
189. a) $l_{N_2} = 6{,}4 \cdot 10^{-2}$ m; $l'_{N_2} = 8{,}4 \cdot 10^{-8}$ m; $l_{He} = 13{,}1 \cdot 10^{-2}$ m; $l'_{He} = 17{,}3 \cdot 10^{-8}$ m; b) $Z_N = 7{,}1 \cdot 10^3$ s^{-1}; $Z'_N = 5{,}4 \cdot 10^9$ s^{-1}; $Z_{He} = 9{,}2 \cdot 10^3$ s^{-1}; $Z'_{He} = 7{,}0 \cdot 10^9$ s^{-1}
190. $d = 2 \cdot 10^{-10}$ m
191. $p = 7{,}9 \cdot 10^{-4}$ Torr; $n = 9{,}45 \cdot 10^{16}$
192. $\eta = \eta_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}$; $\eta = 2{,}1 \cdot 10^{-4}$ gcm^{-1}s^{-1}

193. $\Delta t = 3{,}25$ grd
194. $J = 4{,}13\ \text{Jcal}^{-1}$
195. $c_v = \dfrac{R}{M(\varkappa - 1)} = 0{,}176\ \text{cal g}^{-1}\,\text{grd}^{-1}$; $c_p = \varkappa \dfrac{R}{M(\varkappa - 1)} = 0{,}2464\ \text{cal g}^{-1}\,\text{grd}^{-1}$
196. $M = 28{,}45\ \text{g mol}^{-1}$
197. $\varkappa = 1{,}36$
198. $Q = 23{,}9$ cal
199. $m = 23{,}43$ g
200. $t = 10$ °C
201. $U_2 - U_1 = \dfrac{1}{\varkappa - 1} \times (p_2 V_2 - p_1 V_1)$; a) $\Delta U = 152$ J; b) $\Delta U = 253{,}25$ J
202. $c_v = 0{,}177\ \text{cal g}^{-1}\,\text{grd}^{-1}$; $c_p = \varkappa c_v = 0{,}248\ \text{cal g}^{-1}\,\text{grd}^{-1}$
203. $Q = 222{,}1$ cal; $W = 266{,}7$ J; $\Delta l = 0{,}466$ m
204. $t = 227$ °C
205. $Q = 21\,000$ kpm; $\Delta U = 15\,000$ kpm; $W = 6000$ kpm
206. Sauerstoff; $\Delta U = 1086$ cal; $Q = 650$ cal
207. $W = 2{,}3\ p_0 A l_0$
208. $Q = p_0 v_0 \ln \dfrac{V}{V_0} = 52$ cal; $p = 0{,}2\ \text{kpcm}^{-2}$
209. $\lg V_2 = \lg V_1 - \dfrac{Q'}{2{,}3\ p_1 V_1}$; $V_2 = 0{,}427$ l; $p_2 = 7800$ Torr
210. $p_0 = 2{,}13\ \text{kpcm}^{-2}$
211. $Q = 742\ \text{kcal h}^{-1}$
212. a) $W \approx 183$ kJ; b) $W \approx 185$ kJ
213. a) $p_1 = 32{,}8$ atm; $p_2 = 12{,}3$ atm; $p_3 = 9{,}84$ atm; $p_4 = 8{,}2$ atm; b) $p_1' = 36{,}8$ atm; $p'_2 = 9{,}32$ atm; $p'_3 = 6{,}82$ atm; $p'_4 = 5{,}28$ atm
214. $W = 1564$ J; $\Delta U = 1564$ J; $t = 283$ °C
215. $p = 7{,}98$ atm; $t = 266{,}6$ °C; $\Delta U = 3064$ J
216. $t = 198$ °C; $p = 1169$ Torr; $W = 1640$ J
217. $t = -75{,}8$ °C; $p = 0{,}36$ atm
218. a) $Q = -2655$ cal, $W = 0$, $\Delta U = -11\,098$ cal; b) $W = Q = 5118$ J, $\Delta U = 0$; c) $\Delta U = -3507$ J, $W = 350$ J, $Q = 0$
219. $\eta = 32{,}4\%$
220. $t_1 = 60$ °C; $t_2 = 20$ °C
221. $t_2 = 47$ °C
222. $P = 4{,}18$ kW; $Q_1 = 11\ \text{kcal s}^{-1}$
223. $\Delta S = 4{,}13\ \text{cal grd}^{-1}$
224. $S_2 - S_1 = 0{,}31\ \text{cal grd}^{-1}$; $S_3 - S_1 = 1{,}76\ \text{cal grd}^{-1}$
225. $S_2 - S_1 = 9{,}4\ \text{cal grd}^{-1}$
226. $\Delta S = 41\ \text{cal grd}^{-1}$
227. $\Delta S = -0{,}0573\ \text{cal grd}^{-1}$
228. $\Delta S = 0{,}02\ \text{cal grd}^{-1}$
229. $F_2 - F_1 = 4{,}6$ kJ; $G_2 - G_1 = 4{,}6$ kJ
230. $f = 1$
231. $f = 0$; das System ist invariant; Gleichgewicht herrscht nur im Tripelpunkt
232. $t_0 = -0{,}0075$ °C
233. $p = 733$ Torr
234. $v_2 = 21{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3\,\text{kg}^{-1}$
235. $p_a = 4$ atm; $p_b = 3{,}89$ atm
236. Diagramme
237. $t_1 = 100$ °C; $t_2 = 50{,}1$ °C
238. $W = 182\ \text{J mol}^{-1}$
239. $a = 1{,}345\ \text{l}^2\,\text{atm mol}^{-2}$; $b = 0{,}032\ \text{l mol}^{-1}$
240. $p_k = 72{,}1$ atm; $t_k = 29{,}5$ °C
241. $W = 6042{,}5$ J
242. a) $\nu_A = 0{,}059$; $\nu_B = 0{,}941$; b) $c_1 = 3{,}5\ \text{mol kg}^{-1}$; $c_2 = 3{,}1\ \text{mol l}^{-1}$
243. a) $c_1 = 6{,}5\ \text{mol kg}^{-1}$; $\nu_A = 0{,}1046$; b) $c_2 = 52{,}4\%$; $\nu_B = 0{,}8954$
244. $p_1 = 29{,}5$ Torr; $p_2 = 20{,}3$ Torr; $p = 49{,}8$ Torr
245. $p = 758$ Torr
246. $t = 17$ °C
247. $m = 3 \cdot 10^{-3}$ kg
248. $E_g = 1{,}86\ \text{l grd mol}^{-1}$; $E_s = 0{,}52\ \text{l grd mol}^{-1}$
249. $m = 9{,}9$ g
250. $t_0 = -0{,}54$ °C; $t_1 = 100{,}15$ °C
251. $Q = 18\ \text{kcal h}^{-1}$
252. $t_1 = 103{,}6$ °C
253. $Q = 525$ kcal; $Q_1 = 0{,}55\,Q$
254. $\Delta t = 11$ grd
255. $d = 3{,}6$ cm
256. $Q = 650{,}8$ kcal

257. $t' = \dfrac{\lambda t_1 + \alpha d t_2}{\lambda + \alpha d}$
258. $Q = 23{,}36 \cdot 10^{-9}$ C
259. $\varepsilon_r' = 2{,}21$
260. $Q = \dfrac{e}{\sqrt{3}}$
261. $Q = 0{,}86 \cdot 10^{-12}$ C
262. Die elektrostatische Abstoßung ist $41{,}8 \times \times 10^{47}$mal so groß wie die Massenanziehung
263. $\sigma = 3{,}1832 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Cm^{-2}}$
264. $E_6 = 359{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{Vm^{-1}}$; $E_{12} = 89{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{Vm^{-1}}$; $E_{18} = 39{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{Vm^{-1}}$
265. a) Im Abstand 11,17 cm von der größeren Ladung ist $E = 0$
b) Die Potentiale sind im Abstand 12,31 cm von der größeren Ladung gleich groß
266. $U = 178{,}7 \cdot 10^3$ V
267. $r = 59{,}9$ m
268. $U \approx 1408$ V
269. $U = 900$ V
270. $r = 0{,}449$ m
271. $U = 11\,977$ V
272. $E = \dfrac{U_0}{r \ln \dfrac{r_1}{r_2}}$
273. a) $E = 0$;
b) $E = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 s^2 \sqrt{2}}$
274. $\vec{E} = \dfrac{U_1 - U_2}{x_{12}} e_{12} + \dfrac{U_1 - U_3}{x_{13}} e_{13} + \dfrac{U_1 - U_4}{x_1} e_{14}$
275. $U = -\dfrac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$
276. $U = \dfrac{ed}{2A\varepsilon_0}$
277. $r_1 = r$; $r_2 \approx 1{,}02\,r$; $r_3 \approx 1{,}04\,r$; …; $r_n = \dfrac{5{,}4 \cdot 10^6\,r}{5{,}6 \cdot 10^6 - n \cdot 10^5}$
278. $Q \approx 4{,}5 \cdot 10^5$ C; $\sigma = 8{,}88 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{Cm^{-2}}$
279. $E_1 = 1714 \cdot 10^3\,\mathrm{Vm^{-1}}$; $E_2 = 2857 \cdot 10^2\,\mathrm{Vm^{-1}}$; $U_1 = 8571$ V; $U_2 = 1429$ V
280. $U = 6$ V
281. $F = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ N
282. $W = 50$ J
283. $W = 24$ J
284. $W = 240$ kJ
285. $W = 106$ kJ
286. $W_p = 0{,}01347$ J
287. $F' = 26\,F$
288. $C = 710\,\mu$F
289. $C = 166\,\mu$F; $r = 1495$ km
290. $U = 100$ V
291. $C = 620{,}13 \cdot 10^{-12}$ F
292. $A = 24{,}2\,\mathrm{cm^2}$
293. $C = 3335 \cdot 10^{-12}$ F
294. $C = 744$ pF
295. $C = 336{,}6$ pF
296. $U_1 = 7500$ V; $U_2 = 4500$ V
297. $W = 0{,}02$ J
298. $\Delta W = \dfrac{Q^2}{8\pi r \varepsilon_0} \times \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)$
299. $W_1 = 16{,}53 \cdot 10^{-3}$ J; $W_2 = 1{,}653 \cdot 10^{-3}$ J
300. $W = 4{,}43 \cdot 10^5\,\mathrm{J\,km^{-3}}$
301. $Q = 10$ Ah
302. $t = 1$ h 17 min 46,7 s
303. $A = 1{,}2\,\mathrm{mm^2}$
304. $l = 2{,}5$ m
305. $\varrho = 0{,}028\,\Omega\,\mathrm{mm^2\,m^{-1}}$
306. $R = 1{,}133\,\Omega$
307. $R = 57{,}3\,\Omega$
308. $m_{\mathrm{Cu}} : m_{\mathrm{Al}} \approx 2:1$
309. $A_2 = 42{,}56\,\mathrm{mm^2}$
310. $R_{30} = 22{,}23\,\Omega$
311. $R = 23{,}6\,\Omega$
312. $t = 215{,}1$ °C
313. $t_2 = 51{,}91$ °C
314. a) $\Delta R = 313\,\Omega$; b) $\Delta R' = 0{,}63\,\Omega$
315. $R_s = 10\,\Omega$; $R_p = 0{,}48\,\Omega$
316. $R = 120{,}76\,\Omega$
317. $R = 15\,\Omega$
318. $I = 9{,}5$ A
319. $U = 3{,}69$ V
320. $I = 101{,}45$ mA
321. $I = 0{,}375$ A
322. $U = 211{,}5$ V; $\Delta U = 8{,}5$ V
323. $R = 107\,\Omega$; $U_2 = 198{,}6$ V; $I_k = 102{,}81$ A
324. $R_x \approx 78{,}6\,\mathrm{k\Omega}$
325. $U_1 = 169$ V; $U_2 = 51$ V
326. $I = 0{,}314$ A; $U = 0{,}943$ V
327. $I_1 = 1{,}5$ A; $I_2 = 2{,}5$ A; $I_3 = 4{,}0$ A
328. $I_1 = 0{,}789$ A; $I_2 = -1{,}278$ A; $I_3 = 0{,}486$ A; $U_3 = 1{,}944$ V
329. $I = 1$ A; $I_1 = 0{,}75$ A; $I_2 = 0{,}25$ A
330. $R_a = 29{,}99\,\mathrm{k\Omega}$; $R_b = \dfrac{10}{1999}\,\Omega$
331. $R = 0{,}005\,\Omega$
332. $I = 0{,}05$ A; $R = 9000\,\Omega$; 4 V/Teilstrich
333. $Q = 24$ C; $W = 288$ J

334. Preis: 0,24 M
335. $Q = 2570$ kcal
336. $R_1 = 0{,}6 \cdot R_2$
337. $t = 3$ h
338. $P = 717{,}6$ W
339. $R = 46{,}7\ \Omega$
340. $I = 4{,}037$ A
341. $\eta = 78{,}5\ \%$
342. $P = 0{,}6$ kW
343. $\eta = 92\%$; Preis $\approx 0{,}77$ M
344. $I = 32{,}6$ A
345. $P = 8{,}8$ kW; Preis: 1,76 M
346. $P = 484$ W; $V = 5{,}076$ l
347. $I = 0{,}042$ A
348. Preis $\approx 0{,}01$ M
349. je 24 in Reihe, 2 Reihen parallel
350. $m = 2{,}83$ kg
351. $I = 10{,}16$ A
352. $I = 6$ A; $t = 5$ h 10 min 34 s
353. $t = 20$ h 50 min
354. $B = \dfrac{\mu_0 I(\pi - 1)}{2\pi r} = 10^{-4}\ \text{Vsm}^{-2}$
355. $B = 3{,}333 \cdot 10^{-6}\ \text{Vsm}^{-2}$
356. $H = 16{,}75\ \text{Am}^{-1}$
357. $I = 1500$ A
358. $B = 1112 \cdot 10^{-6}\ \text{Vsm}^{-2}$; $\Phi = 6{,}672 \cdot 10^{-7}$ Vs
359. $F = 0{,}3$ N
360. $F = 1$ N
361. $B = \dfrac{G_1}{I} = 98{,}1\ \text{Vsm}^{-2}$
362. $M = \dfrac{IBr^2}{2} = 0{,}01$ Nm; die Scheibe rotiert entgegen Uhrzeigersinn
363. $\Phi = 0{,}13$ Vs
364. $\Phi = 4 \cdot 10^6\ \text{Mx} = 4 \cdot 10^{-2}$ Wb
365. $I = 2{,}575$ A
366. $I = 2{,}512$ A
367. $I = 26{,}5$ A
368. $n = \dfrac{U_i}{\pi B l^2} = 10^2\ \text{s}^{-1}$
369. $U_i = 1500$ V
370. $U_i = 1200$ V
371. $U_i = 660$ V
372. $U_i = \dfrac{\pi r^2 B_0}{t_1}$
373. $U_i = 1{,}32$ V
374. $U_i = 3{,}6$ V
375. $F = 11\,460$ N
376. $L = \dfrac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} N^2 h \ln \dfrac{r_2}{r_1}$
377. $U_{max} = 18{,}85$ V
378. $\omega = 314\ \text{s}^{-1}$
379. $\cos\varphi = 0{,}843$
380. $U_{eff} = 120{,}2$ V
381. $P = 176$ W
382. $I = 9{,}29$ A
383. a) $U_f = 219{,}4$ V; b) $I_f = 6$ A
384. $P = 18{,}24$ PS
385. $P = 1746$ kW
386. $I_s = 105{,}2$ A
387. $U_C = 274$ V
388. $Z = 232\ \Omega$; $I = 0{,}47$ A; $U_C = 187$ V; $U_L = 295$ V; $\cos\varphi = 0{,}129$
389. $Z = 222\ \Omega$; $\cos\varphi = 0{,}707$; $\varphi = 45°$; $I = 0{,}99$ A; $U_L = 155{,}6$ V; $U_R = 155{,}6$ V
390. $Z = 2{,}57\ \Omega$; $I = 3{,}89$ A; $I_R = 3{,}33$ A; $I_C = 2$ A; $\tan\varphi = 0{,}6$; $\varphi = 31°$
391. $I = 0{,}5$ A
392. $U_{max} = 785$ V
393. $\Phi_{max} = 1{,}126 \cdot 10^{-3}$ Vs
394. $U_2 = 300$ V
395. $I = \dfrac{U_0}{R} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 R} t}$
396. $I_{max} = U\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 86{,}6$ A; $t_0 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{LC} = 1{,}36 \cdot 10^{-5}$ s
397. $t_0 = 6{,}9$ s
398. $E = 2{,}83$ lx
399. $E_1 = 30$ lx; $E_2 = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ lx
400. $\Phi = 0{,}05$ lm
401. $E = 13{,}8$ lx
402. $\dfrac{E}{E_0} = 1{,}12$
403. a) $\Delta\alpha_1 = 1°42'$; $\Delta\alpha_2 = 15°51'$; b) $\Delta\alpha_1 = 5°11'$; der Winkel $\varepsilon = 48°35'$ ist der Grenzwinkel
404. $\alpha = 57°30'$
405. $\varepsilon = 41°49'$
406. $x = 6{,}65$ cm
407. $x = 18$ cm
408. $\delta = 41°30'$
409. $\delta = 10°55'$
410. $\varphi = 45°$
411. $\psi = 2\varphi$
412. $x = 2000$ m
413. a) $b = \dfrac{3}{4} r$; b) $b = \dfrac{nf}{n+1}$
414. a) $g = 35$ cm; $b = 140$ cm; b) $g = 21$ cm; $b = -84$ cm
415. Das Bild ist reell und umgekehrt; $B = 4{,}5$ cm; $b = 96$ cm
416. $r = 1$ m; $x \approx 2l\varphi$
417. $x = 8$ cm

418. a), b) $b = 30$ cm vom Konvexspiegel entfernt
419. $f = \frac{g}{2\omega^2}$
420. $f = 13{,}73$ cm; $Z = -1{,}75$
421. $g = 28$ cm; $b = -84$ cm
422. $g = \frac{Z-1}{Z} \cdot \frac{1}{D}$; $b = \frac{1-Z}{D}$
423. $b = -1{,}8$ cm
424. $g_1 = 140$ cm; $g_2 = 21$ cm; $b_1 = 35$ cm; $b_2 = -84$ cm
425. $D_2 = 3$ dptr
426. $f_1 = 9$ cm
427. $f = 24$ cm
428. $G = \sqrt{B_1 B_2} = 6$ cm
429. $g \geqq f \frac{p + 100}{p}$
430. $g = 5\,r$
431. $f = f' = 10{,}9$ cm; $h = h' = -1{,}82$ cm; $b = 23{,}95$ cm
432. $f = 4{,}5$ cm
433. $g = 7{,}14$ cm; $Z = 3{,}5$
434. $Z = 273{,}5$
435. $g = 4{,}05$ cm
436. $l = 43{,}4$ cm; $Z = 30$
437. $d = 17{,}95$ cm
438. $x = 18{,}6$ cm; $Z = 9{,}3$
439. $d \geqq 4{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm; $\frac{d'}{d} = 178$
440. $\Delta f = 0{,}58$ cm
441. $\lambda = 0{,}0006$ mm
442. 0,78 mm; 0,44 mm
443. $\Delta s = 3{,}5$ mm
444. $d < 1012{,}5$ Å
445. a) $\lambda = 600$ nm; b) $\lambda = 450$ nm
446. a) $\lambda = 571{,}4$ nm, 444 nm; b) $\lambda = 666{,}6$ nm, 500 nm, 400 nm
447. $\varphi = 6''$
448. $\Delta r = 0{,}19$ mm
449. $f = 2$ m; $2r = 2{,}84$ mm
450. $\lambda = 578$ nm
451. 0,45 mm; 0,90 mm; 1,35 mm
452. $\lambda = 6000$ Å
453. $\lambda = 4600$ Å
454. $x = 14{,}4$ cm
455. 4. Ordnung
456. $\alpha = 30°$
457. $\lambda = 0{,}58$ Å
458. $\alpha = 48°26'$
459. $n = 1{,}5$
460. $\alpha = 41°38'$
461. $E = 17{,}4$ kJ
462. $T = 200$ °K
463. $t = 1$ h 38 min
464. $T = 6084$ °K
465. $E_{\lambda 1} = 1{,}17\, E_{\lambda 2}$
466. $n = 40$
467. $v = 5930$ km s^{-1}
468. $y_0 = 0{,}2$ cm
469. $r \approx 4{,}2$ mm
470. $f = 1{,}068 \cdot 10^7$ s^{-1}
471. $m = 11{,}384 \cdot 10^{-31}$ kg; $E_k = 1{,}25 \cdot 10^5$ eV
472. $m = 1{,}8504 \cdot 10^{-27}$ kg; $v = 1{,}316 \cdot 10^8$ ms^{-1}
473. $v = 0{,}96\, c$
474. $W_A = 6{,}323$ eV
475. $m_p = 1{,}692 \cdot 10^{-27}$ kg
476. $\lambda' = 0{,}5243$ Å
477. $\alpha_1 = 74°15'$; $\alpha_2 = 58°50'$; $\alpha_3 = 43°35'$; $\alpha_4 = 0$
478. $U_I = 5{,}12$ V
479. $v = 1912$ km s^{-1}
480. $E_k = 10^3$ eV
481. $E = 1{,}978 \cdot 10^{-13}$ J; $p = 6{,}624 \cdot 10^{-22}$ kgms^{-1}; $m = 2{,}21 \cdot 10^{-30}$ kg
482. Es handelt sich um geladene Teilchen, deren Ruhmasse kleiner als $213\, m_0$ ist, z. B. μ-Mesonen, deren Ruhmasse den Wert $m_\mu = 207\, m_0$ hat.
483. $\lambda_{gr} = \frac{h}{m_0 c} \times \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = 0{,}156$ Å
484. $\tau_0 = \frac{m_0}{p} l = 2{,}62 \cdot 10^{-8}$ s
485. $v_3 = 729$ km s^{-1}
486. $T_3 \approx 4{,}1 \cdot 10^{-15}$ s
487. $\lambda_1 = 656$ nm; $\lambda_2 = 486$ nm; $\lambda_3 = 434$ nm
488. $\lambda = 2540$ Å
489. $\frac{M}{G} = \frac{\mu_0 e}{2 m_0}$
490. $N = 18$
491. $n_\alpha = 6$; $n_\beta = 4$
492. $T_{1/2} = 1550$ a
493. $p = 8{,}3\,\%$
494. $t = 60$ s
495. $Z = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ s^{-1}
496. $d_1 = 2{,}72$ cm; $d_2 = 3{,}35$ cm
497. $\Delta t = 2{,}7$ grd h^{-1}
498. $T = 2{,}7 \cdot 10^5$ a
499. $V = 0{,}67$ mm^3
500. $v = 2{,}7 \cdot 10^5$ ms^{-1}
501. $E = 14{,}94 \cdot 10^{-11}$ J $= 933$ MeV
502. $\Delta E = 2{,}26$ MeV
503. $\Delta m = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$ g mol^{-1}

504. $m_C = 14{,}00829$ ME $=$
$= 23{,}25 \cdot 10^{-27}$ kg
505. $m_O = 17{,}0047$ ME
506. a) $\Delta E_N = 104{,}4$ MeV;
b) $\Delta E_{Pb} = 1467{,}9$ MeV;
ΔE pro Nukleon:
7,1 MeV
507. $E =$
$= 13{,}6 \cdot 10^{10}$ kcal kg^{-1}
508. $\lambda = 0{,}496 \cdot 10^{-9}$ m
509. $\lambda = 6{,}62 \cdot 10^{-33}$ m
510. $\lambda = 2{,}87 \cdot 10^{-11}$ m
511. $\lambda = 0{,}21 \cdot 10^{-11}$ m
512. $U_1 = 4{,}11$ V;
$U_2 = 411$ V;
$U_3 = 41\,100$ V
513. $\lambda = \dfrac{10^{-11}}{\sqrt{U}}$ m;
$\lambda = 10^{-14}$ m
514. $u = 4{,}80 \cdot 10^9$ ms^{-1}
515. $\lambda = 0{,}964 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}897 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}841 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}796 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}758 \cdot 10^{-10}$ m;
$\lambda = 0{,}723 \cdot 10^{-10}$ m;
$n = 1{,}047$;
$n = 1{,}042$;
$n = 1{,}037$;
$n = 1{,}035$;
$n = 1{,}031$;
$n = 1{,}028$;
$E_p = -15{,}4$ eV;
$E_p = -15{,}8$ eV;
$E_p = -15{,}8$ eV;
$E_p = -16{,}3$ eV;
$E_p = -16{,}4$ eV;
$E_p = -16{,}2$ eV;
$\overline{E_p} = -16{,}0$ eV
516. $U = 38{,}6$ V;
$\lambda = 1{,}97 \cdot 10^{-10}$ m
517. $\lambda > 0{,}242 \cdot 10^{-10}$ m;
$U < 2541$ V
518. Elektronen:
$d \geqq 7{,}28 \cdot 10^{-6}$ m;
Neutronen:
$d \geqq 3{,}97 \cdot 10^{-9}$ m;
α-Teilchen:
$d \geqq 9{,}97 \cdot 10^{-10}$ m
519. $d_\alpha = 10{,}05 \cdot 10^{-12}$ m;
$d_\beta = 1{,}23 \cdot 10^{-9}$ m
520. $\Delta q = 0{,}655 \cdot 10^{-12}$ m
521. $\dfrac{\Delta v_n}{v_n} = \dfrac{\pi}{n}$
522. $E = 3{,}58$ J;
$h\nu = 2{,}85 \cdot 10^{-19}$ J;
$\dfrac{E}{h\nu} = 0{,}125 \cdot 10^{20}$;
$\Delta E = 1{,}32 \cdot 10^{-25}$ J;
$p = 9{,}54 \cdot 10^{-28}$ kgms^{-1};
$\Delta p = 2{,}2 \cdot 10^{-29}$ kgms^{-1}
523. $\Delta t = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ s;
$\Delta E = 3{,}1 \cdot 10^{-26}$ J
524. $\Delta E = 4{,}3 \cdot 10^{-9}$ eV;
$\Delta t = 0{,}96 \cdot 10^{-6}$ s
525. $\lambda > 10^{-14}$ m;
$\nu < 3 \cdot 10^{22}$ s^{-1}
526. $m < \dfrac{h}{2c^2 t v} \approx$
$\approx 3{,}6 \cdot 10^{-28}$ kg $\approx$
≈ 380 ME, Meson
527. $a_2 = b_{22} =$
$= 1{,}06 \cdot 10^{-10}$ m;
$b_{21} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m
528. Linearität folgt aus Differentiationsregeln, Selbstadjungiertheit durch einmalige partielle Integration
529. $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sind nicht HERMITEsche Operatoren, $\boldsymbol{A}$ ist zudem nicht linear; dagegen sind $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ HERMITEsche Operatoren
530. $\dfrac{d}{dx} x\, e^x = e^x + x\, e^x$;
$x \dfrac{d}{dx} e^x = x\, e^x$
531. $\left(\dfrac{d}{dx} + x\right)^2 = \dfrac{d^2}{dx^2} +$
$+ \dfrac{d}{dx} x + x \dfrac{d}{dx} + x^2$;
$\boldsymbol{L}\, u(x) = 2x \cos x +$
$+ x^2 \sin x$
532. Wenn $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{G}$ vertauschbar sind
533. Ebenso wie die kinetische Energie und eine Ortskoordinate nicht gleichzeitig gemessen werden können, sind auch kinetische und potentielle Energie nicht zugleich meßbar. Demnach ist die Gesamtenergie nur als Ganzes meßbar; die Kenntnis der Gesamtenergie schließt mithin die gleichzeitige genaue Kenntnis der potentiellen und der kinetischen Energie aus
534. L_x ist nur mit x gleichzeitig meßbar
535. L_x ist nur mit p_x gleichzeitig meßbar. Quantenzustände, in denen L_x und x gleichzeitig gemessen werden können, gestatten es nicht, auch p_x gleichzeitig zu messen. Ebenso ist bei gleichzeitiger Meßbarkeit von L_x und p_x die Komponente x im Sinne der HEISENBERGschen Unschärferelation nicht meßbar
536. $\vec{L}^2 =$
$-\hbar^2 \left\{\left(z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^2 +\right.$
$+ \left(x\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 +$
$\left. + \left(y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2\right\}$

537. $\vec{L}^2$ ist mit allen cartesischen Komponenten des Drehimpulses gleichzeitig meßbar
538. DE-BROGLIE-Welle $\Psi = C\,e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}$
539. $W = 0{,}061$
540. $W = 0{,}238$
541. $W = 0{,}438$
542. $C = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi a_1^3}}$
543. $\mathrm{d}W = 0{,}00733$
544. $W = 0{,}0414$
545. $W = 0{,}00012$
546. $d = 0{,}68$
547. $r = 0{,}41$; $d = 0{,}59$
548. $d = 0{,}16 \cdot 10^{-5}$
549. $l = 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ m
550. $d \approx 3 \cdot 10^{-26}$; $n_s = \dfrac{h}{4mr_0^2} = 0{,}25 \cdot 10^{21}\ \mathrm{s}^{-1}$; $\lambda \approx 0{,}75 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$; $\tau \approx 0{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{s} \approx 1$ Tag. Die genaue Theorie der Radioaktivität erfordert die Untersuchung des räumlichen Potentials
551. Wegen des Faktors $\dfrac{W^{3/2}}{|\vec{E}|}$ beträgt die erforderliche Feldstärke nur etwa das $(2{,}5)^{3/2}$-fache gegenüber Wolfram. Es ist also die vierfache Feldstärke notwendig, d. h., sie muß in der Größenordnung $10^9\ \mathrm{Vm}^{-1}$ liegen
552. $x < 0$: $\psi = C_{\mathrm{I}}\,e^{k_{\mathrm{I}}n_{\mathrm{I}}x}$, $k_{\mathrm{I}}n_{\mathrm{I}} = \sqrt{\dfrac{2m(E_0 - E)}{\hbar^2}}$
$0 \leqq x \leqq a$: $\psi = C_{\mathrm{II}} \sin(k_{\mathrm{II}}n_{\mathrm{II}}x + \delta)$; $k_{\mathrm{II}}n_{\mathrm{II}}$ folgt aus der transzendenten Gleichung $\dfrac{\hbar k_{\mathrm{II}}n_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2mE_0}} = \sin\dfrac{n_{\mathrm{II}} - k_{\mathrm{II}}n_{\mathrm{II}}a}{2}$.
Aus den diskreten Lösungen $k_{\mathrm{II}}n_{\mathrm{II}}$ folgen die gesuchten Energien $E = \dfrac{\hbar^2 k_{\mathrm{II}}^2 n_{\mathrm{II}}^2}{2m}$
$x \geqq a$: $\psi = C_{\mathrm{III}}\,e^{k_{\mathrm{III}}n_{\mathrm{III}}x}$, $k_{\mathrm{III}}n_{\mathrm{III}} = \sqrt{\dfrac{2m(E_0 - E)}{\hbar^2}}$
553. $\dfrac{\partial L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial L}{\partial t} - i\hbar(LH - HL) = \dfrac{\partial L}{\partial t} + [H, L]$
554. $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [H, AB] = [H, A]\,B + A[H, B] = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}B + A\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$
555. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = [H, x] = \dfrac{p_x}{2m}$
556. $\dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}$; ebenso für die anderen Komponenten
557. $\lambda_{\mathrm{H}\beta} = 4861{,}3 \cdot 10^{-10}$ m
558. $\dfrac{1}{\lambda} = 0{,}82258 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$
559. $\dfrac{1}{\lambda} = 1{,}2193 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^{-1}$
560. $R_{\mathrm{D}} = 1{,}097076 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$
561. $R_\infty = 1{,}097374 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$
562. $\lambda = 4339{,}27 \cdot 10^{-10}$ m
563. $L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\dfrac{\partial}{\mathrm{d}\vartheta} + \cot\vartheta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)$
$L_y = -i\hbar\left(\cos\dfrac{\partial}{\partial\vartheta} - \cot\vartheta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)$
564. Für die Quantenzahl $l = 1$
565. Für den Operator L_x, nicht aber für die Operatoren L_y und L_z
566. $\vec{L}^2$ und L_x
567. $\psi_{2,1,1} = \dfrac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{z}{a_1}\right)^{3/2} \times \dfrac{zr}{a_1} e^{-\frac{zr}{2a_1}} \sin\vartheta\, e^{i\varphi}$
568. $r = 4a_1$
569. $r_1 = 9a_1$; $r_2 = 16a_1$
570. $\bar{r} = 5a_1$
571. $\overline{\left(\dfrac{1}{r}\right)} = \dfrac{1}{4a_1}$
572. $\bar{r}_{n,l} = \dfrac{n^2 a_1}{z}\left\{1 + \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{(l+1)\,l}{n^2}\right]\right\}$
573. $\bar{r}_{\mathrm{He}} = 1{,}32 \cdot 10^{-10}$ m; $\bar{r}_{\mathrm{Li}} = 0{,}88 \cdot 10^{-10}$ m
574. $\mathrm{d}W = 0{,}019$
575. $W = 0{,}054$
576. $\mathrm{d}W = 0{,}0036$
577. Kugelsymmetrie; Wahrscheinlichkeit für alle Richtungen gleich groß

578.

$\psi_{l,m}\psi^*_{l,m}$	$\frac{15}{32}\sin^4\vartheta$
m	± 2

$\frac{15}{8\pi}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta$

± 1

$\frac{5}{16\pi}(3\cos^2\vartheta - 1)^2$

0

579.

m	max	min
± 2	90°	0°
± 1	45°	0°, 90°
0	0°, 90°	54°43′

580. $W = 0{,}192$

581. $j_r = 0; j_\vartheta = 0;$
$$j_\varphi = -\frac{e\hbar m}{\mu r \sin\vartheta}|\psi_{n,l,m}|^2$$

582. $j_\varphi = 0$ für $\vartheta = 0$;
$j_\varphi = 0{,}84 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Am^{-2}}$ für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

583. $M = \frac{\mu e\hbar}{2m} = 1{,}165 \times 10^{-29}$ Vsm (BOHRsches Magneton)

584. H_α-Linie:
$h\nu = 3{,}04 \cdot 10^{-19}$ J;
Oszillation: $\hbar\omega_0 = 5{,}47 \cdot 10^{-20}$ J;
Rotation:
$$\frac{\hbar^2}{\mu r^2} = 4{,}02 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{J}$$

585. $\lambda_{os} = 3{,}62 \cdot 10^{-6}$ m;
$\lambda_{rot} = 494 \cdot 10^{-6}$ m

586. Nach der Quantentheorie ist
$$\mathrm{d}W = w\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2x_0\sqrt{\pi}} \times \left(2\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x^2_0}}\mathrm{d}x,$$
dagegen nach der klassischen Theorie
$$\mathrm{d}W_{\text{klass}} = w_{\text{klass}}\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{\mu\omega_0}\,\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{5\hbar - 4\mu\omega_0 x^2}};$$
für den angeführten Spezialfall ist $\mathrm{d}W = 0{,}098$, $\mathrm{d}W_{\text{klass}} = 0{,}098$

587. Die Anzahl der Nullstellen ist gleich n

588.
$$W = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \xi^2 \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[\frac{\xi \mathrm{e}^{-\xi^2}}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right\} =$$
$= 0{,}095 + \Phi(\infty) - \Phi(\sqrt{3}) = 0{,}095 + 1 - 0{,}986 = 0{,}108;$
$\Phi(x)$: Fehlerintegral

589.
$$\overline{x^2} = \frac{4x_0^2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^\infty \xi^4 \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{3}{2}x_0^2;$$
für H_2:
$\overline{x^2} = 2{,}34 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{m}^2$

590.
$$p_{m,n} = \int \psi^*_m\left(-\frac{\mathrm{i}\hbar\partial}{\partial x}\right) \times \psi_n\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\mu\omega_0 x_{m,n}$$

591. In Übereinstimmung mit der HEISENBERGschen Vertauschungsrelation ergibt sich
$$px - xp = \mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

592. In Zusammenhang mit der HEISENBERGschen Vertauschungsrelation folgt (vgl. 436)
$$E = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 3 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 5 & \ldots \\ & \vdots & & \end{pmatrix}$$

593.
$$\overline{\Delta x^2} = \frac{\hbar}{\mu\omega_0}\left(n + \frac{1}{2}\right);$$
$$\overline{\Delta p_x^2} = \mu\hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

594. $A_{3,2} = 2860\ \mathrm{s^{-1}}$

595. $W = 0{,}343 \cdot 10^{-10}$

596. $\frac{\hbar\omega_0}{2} = 0{,}52 \cdot 10^{-33}$ J;
demnach nimmt die Nullpunktenergie nur für atomare Verhältnisse bedeutsame Werte an

597. $n = 3{,}94 \cdot 10^{12}$. Infolge der kleinen Energiestufen scheint sich die Energie, verglichen mit der Gesamtenergie $\hbar\omega_0 = 1{,}05 \cdot 10^{-33}$ J, stetig zu verändern

598. $J = 1{,}65 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{kgm^2}$;
$r = 1{,}15 \cdot 10^{-10}$ m;
$$\frac{\hbar^2}{J} = 0{,}667 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{J}$$

599. $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 7{,}5\ \mathrm{m^{-1}}$;
$\lambda > 13{,}3 \cdot 10^{-6}$ m;
infraroter Bereich

600. Oszillationsschwingung mit $\lambda = 30{,}8 \cdot 10^{-6}$ m; Abstand der Rotationslinien $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 16{,}3\ \mathrm{m}^{-1}$; im Zentrum ist $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 33{,}0\ \mathrm{m}^{-1}$; Auflösungsvermögen > 1960, im Zentrum > 980

601. $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \gtrapprox 180$, im Zentrum $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \gtrapprox 115$

602. $J = 1{,}39 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{kgm}^2$; $r = 1{,}09 \cdot 10^{-10}$ m

603. $(\xi + i\eta)_{l,m;l',m\pm 1} \neq 0$; $\zeta_{l,m;l',m\pm 1} = 0$; $(\xi + i\eta)_{l,m;l',m} = 0$; $\zeta_{l,m;l',m} \neq 0$. Für alle anderen Indizes sind die Matrixelemente Null. Daraus ist zu folgern, daß Emission nur für $\Delta m = 0, \pm 1$ stattfindet, wobei $\Delta m = \pm 1$ rechts- bzw. linkszirkular polarisierte Strahlung liefert (σ-Komponente), dagegen liefert $\Delta m = 0$ die linear polarisierte Strahlung der π-Komponente. Diesen Regeln kommt nur dann eine Bedeutung zu, wenn die ζ-Achse physikalisch ausgezeichnet ist. Das geschieht im Falle des ZEEMAN-Effekts durch Aufspaltung der Spektrallinien in einem äußeren Magnetfeld

604. $l' = 0{,}995$ m; Verkürzung $l - l' = 0{,}005$ m

605. $v = 0{,}866$ c

606. $v = 0{,}6\, c$

607. a) $\lambda = 6497{,}46 \times 10^{-10}$ m; b) $\lambda = 6628{,}71 \times 10^{-10}$ m; c) $\lambda = 6563{,}09 \times 10^{-10}$ m

608. a) $v = 1{,}8\, c$; b) $v = 0{,}9944\, c$

609. $v = 0{,}9997\, c$

610. $q'_x = -0{,}312\, c$; $q'_y = 0{,}191\, c$; $q'_z = -0{,}0955\, c$

611. $$|\vec{v}_{\mathrm{rel}}| = \frac{\sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{[\vec{v}_1 \times \vec{v}_2]^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}} = 0{,}378\, c$$

612. $E = (m - m_0)\, c^2 = 4{,}986 \cdot 10^{-13}$ J

613. $m = 1{,}02\, m_0 = 9{,}29 \cdot 10^{-31}$ kg

614. Aus dem Induktionsgesetz
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 2\pi \int_0^{r_0} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\, r\, \mathrm{d}r = -2\pi r_0 \vec{E}$$
folgt für die beschleunigende Kraft
$$-e\vec{E} = \frac{e}{2\pi r_0}\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$
Hieraus erhält man weiter
$$mv = \frac{e}{2\pi r_0}|\vec{\Phi}| = 24{,}8\, m_0 c;$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{24{,}8}\right)^2}}c = \left|1 - \frac{1}{1230}\right| c;$$
$m = 24{,}8\, m_0 = 2{,}26 \cdot 10^{-29}$ kg; $eU = (m - m_0)\, c^2 = 1{,}218 \cdot 10^7$ eV

615. $\Delta t' = 203{,}87\,(1 + 1{,}85 \cdot 10^{-12})$ s; $\Delta t' - \Delta t = 3{,}77 \times 10^{-10}$ s

616. $\Delta t' = 101{,}94\,(1 + 1{,}85 \cdot 10^{-12})$ s; $\Delta t' - \Delta t = 1{,}88 \times 10^{-10}$ s

617. $\Delta\lambda = 7{,}15 \cdot 10^{-19}$ m; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1{,}09 \cdot 10^{-12}$; $v = 3{,}27 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{ms}^{-1}$; Rotverschiebung

618. $\Delta\lambda = 1{,}38 \cdot 10^{-12}$ m; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2{,}11 \cdot 10^{-6}$; Rotverschiebung

619. $\Delta\lambda = -4{,}22 \cdot 10^{-11}$ m; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -6{,}43 \cdot 10^{-5}$; Blauverschiebung. Das Licht des Siriusbegleiters eignet sich hiernach wesentlich besser für einen Nachweis der relativistischen Verschiebung als das Licht der Sonne

620. $\Delta\lambda = -4{,}56 \cdot 10^{-16}$ m; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -6{,}94 \cdot 10^{-10}$; Blauverschiebung

621. $\frac{\Delta\nu}{\nu} = -1$; $v = c$

Tabellenanhang

Tabelle 1: **Wichtige physikalische Konstanten**

Mittlere Erdbeschleunigung	g_n	$= 9{,}80665$ m s^{-2}
Näherungswert	g	$= 9{,}81$ m s^{-2}
Gravitationskonstante	γ	$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}
Allgemeine Gaskonstante	R	$= 8{,}314$ J grd^{-1}mol^{-1} =
		$= 0{,}08205$ l at grd^{-1}mol^{-1} =
		$= 1{,}986$ cal grd^{-1}mol^{-1}
AVOGADROsche Konstante	N_A	$= 6{,}0225 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Molvolumen	V_0	$= 22{,}414$ l
BOLTZMANN-Konstante	k	$= R/N = 1{,}3805 \cdot 10^{-23}$ J grd^{-1}
Mechanisches Wärmeäquivalent	J	$= 4{,}186$ J cal^{-1}
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$= 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As V^{-1}m^{-1}
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$= 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Vs A^{-1}m^{-1}
FARADAY-Konstante	F	$= 96\,487$ As g-Äquivalent^{-1}
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$= 299792 \cdot 10^8$ m s^{-1}
PLANCKsches Wirkungsquantum	h	$= 6{,}627 \cdot 10^{-34}$ Js
STEFAN-BOLTZMANN-Konstante	σ	$= 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ J m^{-2}s^{-1}grd^{-4}
Konstante im WIENschen Verschiebungsgesetz	b	$= 0{,}00289$ m grd
Elementarladung des Elektrons	e_0	$= -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As
Ruhmasse des Elektrons	m_0	$= 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg $= 5{,}498 \cdot 10^{-4}$ ME
Ruhmasse des Protons	m_p	$= 1{,}6725 \cdot 10^{-27}$ kg $= 1{,}00758$ ME
Ruhmasse des Neutrons	m_n	$= 1{,}6748 \cdot 10^{-27}$ kg $= 1{,}00895$ ME
Ruhmasse des α-Teilchens	m_α	$= 6{,}6428 \cdot 10^{-27}$ kg $= 4{,}002763$ ME
Ruhmasse des Deuterons	m_d	$= 3{,}342 \cdot 10^{-27}$ kg $= 2{,}014172$ ME
Masse des H-Atoms	m_H	$= 1{,}6734 \cdot 10^{-27}$ kg $= 1{,}008128$ ME
BOHRsches Magneton	μ_B	$= 1{,}165 \cdot 10^{-29}$ Jm A^{-1}
RYDBERG-Zahl	R	$= 10973731$ m^{-1}
Nukleare Masseneinheit	1 ME	$= (1{,}65956 \pm 0{,}00064) \cdot 10^{-27}$ kg
Energieäquivalent der nuklearen Masseneinheit	ΔE_{1ME}	$= 931{,}8$ MeV

Tabelle 2: **Bezeichnungen und Einheiten der verwendeten physikalischen Größen**

Größe	Bezeichnung der Größe	Einheit im Internat. System	Kurzzeichen der Einheit
Länge, Wegstrecke	l, s	Meter	m
Masse, Stoffmenge	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Fläche	A		m^2
Volumen	V		m^3
Dichte	ϱ		$kg\,m^{-3}$
Spezifisches Volumen	v		$m^3\,kg^{-1}$
Geschwindigkeit	v, c		$m\,s^{-1}$
Beschleunigung	a, g		$m\,s^{-2}$
Winkelgeschwindigkeit	ω		s^{-1}
Winkelbeschleunigung	α		s^{-2}
Frequenz	f, ν		s^{-1}
Periodendauer	T		s
Kraft, Gewichtskraft	F, G	Newton	$N = kg\,m\,s^{-2}$
Druck	p		$N\,m^{-2}$
Arbeit, Energie	W, E	Joule	$J = kgm^2\,s^{-2}$, Nm
Leistung	P	Watt	$W = J\,s^{-1}$
Impuls, Bewegungsgröße	p		Ns
Drehmoment	M		J, Nm
Massenträgheitsmoment	J		kgm^2
Drehimpuls	L		$kgm^2\,s^{-1}$
Zugelastizitätsmodul	E		$N\,m^{-2}$
Schubelastizitätsmodul	G		$N\,m^{-2}$
Oberflächenspannung	σ		$N\,m^{-1}$, $J\,m^{-2}$
Viskosität	η		$kg\,m^{-1}s^{-1}$
Grammolekül	M		$kg\,mol^{-1}$
Temperatur	T, t	Grad	°K, °C
Wärmemenge	Q	Kalorie	cal, kcal
Spezifische Wärmekapazität	c, c_p, c_v		$cal\,kg^{-1}\,grd^{-1}$
Molekularwärme	C, C_p, C_v		$cal\,grd^{-1}\,mol^{-1}$
Umwandlungswärme	l		$cal\,kg^{-1}$
Innere Energie	U		J
Enthalpie	H		J
Entropie	S		$cal\,grd^{-1}$, $J\,grd^{-1}$
Freie Energie	F		J
Potentielle thermodynamische Energie	G		J
Osmotischer Druck	π		$N\,m^{-2}$
Wärmeleitfähigkeit	λ		$cal\,m^{-1}\,s^{-1}\,grd^{-1}$

Größe	Bezeichnung der Größe	Einheit im Internat. System	Kurzzeichen der Einheit
Wärmeübergangszahl	α		$\mathrm{cal\ m^{-2}\ s^{-1}\ grd^{-1}}$
Elektrische Ladung	Q, q, e	Coulomb	$\mathrm{C = As}$
Elektrische Feldstärke	E		$\mathrm{V\ m^{-1}}$
Ladungsdichte			
der Fläche	σ		$\mathrm{C\ m^{-2}}$
des Volumens	ϱ		$\mathrm{C\ m^{-3}}$
Elektrisches Potential	φ	Volt	$\mathrm{V = J\ A^{-1}\ s^{-1}}$
Elektrischer Kraftfluß	Ψ		Vm
Dielektrische Verschiebung	D		$\mathrm{As\ m^{-2}}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0		$\mathrm{As\ V^{-1}\ m^{-1}}$
Dielektrizitätszahl	ε_r		
Dielektrizitätskonstante	$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$		$\mathrm{As\ V^{-1}\ m^{-1}}$
Kapazität	C	Farad	$\mathrm{F = As\ V^{-1}}$
Energiedichte im			
elektrischen Feld	ϱ_E		$\mathrm{J\ m^{-3}}$
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
Potentialdifferenz	U, φ		V
Stromdichte	i		$\mathrm{A\ m^{-2}}$
Elektrischer Widerstand	R	Ohm	$\Omega = \mathrm{V\ A^{-1}}$
Spezifischer Widerstand	ϱ		$\Omega\ \mathrm{m}$
Spezifische Leitfähigkeit	$\varkappa$		$\Omega^{-1}\ \mathrm{m^{-1}}$
Temperaturkoeffizient des			
elektrischen Widerstands	α		$\mathrm{grd^{-1}}$
Elektromotorische Kraft	E		V
Elektrochemisches Äquivalent	$\ddot{A}$		$\mathrm{kg\ A^{-1}\ s^{-1}}$
Magnetischer Induktionsfluß	Φ	Weber	$\mathrm{Wb = Vs}$
Magnetische Induktion	B	Tesla	$\mathrm{T = Vs\ m^{-2} = Wb\ m^{-2}}$
Magnetische Feldstärke	H		$\mathrm{A\ m^{-1}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0		$\mathrm{Vs\ A^{-1}\ m^{-1}}$
Permeabilitätszahl	μ_r		
Permeabilität	$\mu = \mu_0\mu_r$		$\mathrm{Vs\ A^{-1}m^{-1}}$
Magnetischer Widerstand	R_m		$\mathrm{A\ Wb^{-1}}$
Induktivität	L	Henry	$\mathrm{H = Vs\ A^{-1}}$
Lichtstrom	Φ	Lumen	lm
Lichtstärke	I	Candela	cd
Beleuchtungsstärke	E	Lux	lx
Brennweite	f		m
Brechkraft	D	Dioptrie	$\mathrm{D = m^{-1}}$
Brechzahl	n		
Halbwertzeit	$T_{1/2}$		s
Zerfallskonstante	λ		$\mathrm{s^{-1}}$

Tabelle 3: **Dichte ϱ**

a) Feste Stoffe in kg m^{-3}

Aluminium	$2{,}7 \cdot 10^3$	Blei	$11{,}3 \cdot 10^3$
Natriumchlorid	$2{,}17 \cdot 10^3$	Glas	$2{,}5 \cdot 10^3$
Eis	$0{,}92 \cdot 10^3$	Silber	$10{,}5 \cdot 10^3$
Kupfer	$8{,}9 \cdot 10^3$	Zink	$7{,}1 \cdot 10^3$
Messing	$8{,}5 \cdot 10^3$	Eisen (Stahl)	$7{,}8 \cdot 10^3$
Nickel	$8{,}8 \cdot 10^3$	Wolfram	$19{,}1 \cdot 10^3$

b) Flüssigkeiten in kg m^{-3}

Äther	$0{,}714 \cdot 10^3$	Quecksilber	$13{,}6 \cdot 10^3$
Spiritus	$0{,}79 \cdot 10^3$	Petroleum	$0{,}8 \cdot 10^3$
Meereswasser	$1{,}03 \cdot 10^3$	Wasser	$1{,}0 \cdot 10^3$

c) Gase (im Normalzustand) in kg m^{-3}

Stickstoff	1,251	Sauerstoff	1,428
Helium	0,178	Wasserstoff	0,0899
Kohlendioxid	1,977	Luft	1,293

Tabelle 4: **Oberflächenspannung σ in N m^{-1}**

Quecksilber	0,49	Terpentin	0,027
Spiritus	0,022	Wasser bei 20 °C	0,07

Tabelle 5: **Schallgeschwindigkeit c in m s^{-1}**

Sauerstoff	317,2	Wasser	1450
Stahl	5100	Wasserstoff	1272
Luft bei 0 °C	332		

Tabelle 6: **Ausdehnungskoeffizient in grd^{-1}**

a) Längenausdehnung α

Aluminium	$24 \cdot 10^{-6}$	Glas	$10 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$17 \cdot 10^{-6}$	Zink	$29 \cdot 10^{-6}$
Messing	$19 \cdot 10^{-6}$	Eisen (Stahl)	$12 \cdot 10^{-6}$

b) Volumenausdehnung β

Spiritus	$110 \cdot 10^{-5}$	Quecksilber	$18{,}2 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 7: **Spezifische Wärmekapazität c in kcal kg^{-1} grd^{-1}**

a) Feste und flüssige Stoffe

Aluminium	0,214
Eis	0,50
Gußeisen	0,13
Spiritus	0,59
Kupfer	0,091
Messing	0,093
Platin	0,032
Öl (Durchschnittswert)	0,4
Blei	0,03
Quecksilber	0,035
Zink	0,092
Eisen (Stahl)	0,11

b) Gase	c_v	$\varkappa$
Argon	0,0762	1,66
Stickstoff	0,177	1,41
Helium	0,753	1,66
Kohlendioxid	0,156	1,30
Kohlenmonoxid	0,178	1,40
Sauerstoff	0,155	1,40
Wasserstoff	2,42	1,41
Luft	0,174	1,40

Tabelle 8: **Schmelztemperaturen t_0 und Schmelzwärmen l einiger Stoffe bei $p = 1$ atm**

	t_0 in °C		l in kcal kg^{-1}
Zinn	231,9	Zinn	140,0
weißer Phosphor	44,2	weißer Phosphor	5,4
Aluminium	658,0	Aluminium	94,0
Eis	0,0	Eis	79,7
Blei	327,0	Blei	5,0
Quecksilber	−38,9	Quecksilber	2,8

Die Siedewärme des Wassers bei einer Temperatur von 100 °C und einem Druck von 760 Torr beträgt 539 kcal kg^{-1}.

Tabelle 9: **van der Waalssche Konstanten a, b**

Stoff	a in J m^3 kmol^{-2}	Stoff	b in m^3 kmol^{-1}
CO_2	$3{,}65 \cdot 10^5$	CO_2	0,043
H_2O	$5{,}54 \cdot 10^5$	H_2O	0,03
N_2	$1{,}32 \cdot 10^5$	N_2	0,04
O_2	$1{,}37 \cdot 10^5$	O_2	0,03

Die kryoskopische Konstante des Wassers ist $K = 1{,}86$ grd mol^{-1}.
Die ebullioskopische Konstante des Wassers ist $E = 0{,}52$ grd mol^{-1}.

Tabelle 10: **Wärmeleitfähigkeit λ bei 18 °C**

λ in kcal grd^{-1} m^{-1} s^{-1}		λ in kcal grd^{-1} m^{-1} h^{-1}	
Aluminium	0,05	Asbest	0,18
Kupfer	0,095	Heraklit	0,062
Eisen (Stahl)	0,014	Putz	0,6
		Kesselstein	2,0
		Ruß	0,07
		Ziegel	0,45

Tabelle 11: **Wärmeübergangszahlen α in kcal m^{-2} h^{-1} grd^{-1}**

Rauchgase – Asche	15
Kesselstein – Wasser	4000

Tabelle 12: **Dielektrizitätszahlen ε_r**

Äthylalkohol	26,0	Glas	7,0
Paraffin	2,0	Glimmer	7,0
Petroleum	2,0	Wasser	81,0
Porzellan	6,0	Luft (bei normalem Druck)	1,0006

Tabelle 13: **Spezifischer Widerstand ($10^6\varrho$) und Temperaturwiderstandszahl ($10^3\alpha$) einiger Stoffe**

bei 0 °C	Ω m		grd^{-1}
Aluminium	0,029	Aluminium	4,2
Kupfer	0,017	Kupfer	3,92
Messing	0,08	Messing	1,5
Blei	0,21	Blei	4,2
Quecksilber	0,958	Quecksilber	0,99
Nickel	0,07	Nickel	6,7
Platin	0,107	Platin	3,9
Zink	0,06	Zink	4,2
Eisen (Stahl)	0,12	Eisen (Stahl)	6,0
Kohlenstoff	40,0	Kohlenstoff	−8,0

Tabelle 14: **Elektrochemisches Äquivalent $\ddot{A}$ in g A^{-1} s^{-1}**

Kupfer	$328 \cdot 10^{-6}$
Silber	$1118 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 15: **Mittlere Brechzahlen *n* für das sichtbare Spektrum**

Glas	1,52	Wasser	1,33

Die deutliche Sehweite ist $l = 0{,}25$ m.

Tabelle 16: **Halbwertzeiten $T_{1/2}$ radioaktiver Kerne**

Aktinium	13,5 Jahre
Radium	1590,0 Jahre
Radon	3,825 Tage
Uran (Isotop ^{238}U)	$4{,}4 \cdot 10^9$ Jahre
Kobalt (Isotop ^{60}Co)	5,2 Jahre
Chlor (Isotop ^{38}Cl)	38,5 Minuten
Phosphor (Isotop ^{32}P)	14,3 Tage
Strontium (Isotop ^{90}Sr)	30 Jahre
Natrium (Isotop ^{42}Na)	14,8 Stunden
Kohlenstoff (Isotop ^{14}C)	5700 Jahre

Tabelle 17: **Tabelle der chemischen Elemente**

(nach ihren chemischen Zeichen alphabetisch geordnet)

chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse	chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse
Ac	Aktinium	89	227,05	Hf	Hafnium	72	178,5
Ag	Silber	47	107,87	Hg	Quecksilber	80	200,59
Al	Aluminium	13	26,98	Ho	Holmium	67	164,93
Am	Amerizium	95	243	In	Indium	49	114,82
Ar	Argon	18	39,948	Ir	Iridium	77	192,2
As	Arsen	33	74,92	J	Jod	53	126,904
At	Astatin	85	210	K	Kalium	19	39,10
Au	Gold	79	196,97	Kr	Krypton	36	83,80
B	Bor	5	10,81	Ku	Kurtschatovium	104	264
Ba	Barium	56	137,34	La	Lanthan	57	138,91
Be	Beryllium	4	9,012	Lw	Lawrenzium	103	257*
Bi	Wismut	83	208,98	Li	Lithium	3	6,940
Bk	Berkelium	97	245	Lu	Lutetium	71	174,97
Br	Brom	35	79,909	Mg	Magnesium	12	24,312
C	Kohlenstoff	6	12,011	Mn	Mangan	25	54,983
Ca	Kalzium	20	40,08	Mo	Molybdän	42	95,94
Cd	Kadmium	48	112,40	Mv	Mendelevium	101	256*
Ce	Zer	58	140,12	N	Stickstoff	7	14,0067
Cf	Kalifornium	98	246	Na	Natrium	11	22,9898
Cl	Chlor	17	35,453	Nb	Niob(ium)	41	92,906
Cm	Kurium	96	243	Nd	Neodym	60	144,24
Co	Kobalt	27	58,93	Ne	Neon	10	20,183
Cr	Chrom	24	51,996	Ni	Nickel	28	58,71
Cs	Zäsium	55	132,91	No	Nobelium	102	254*
Cu	Kupfer	29	63,54	Np	Neptunium	93	237
Dy	Dysprosium	66	162,50	O	Sauerstoff	8	15,9994
Er	Erbium	68	167,26	Os	Osmium	76	190,2
Es	Einsteinium	99	254*	P	Phosphor	15	30,9738
Eu	Europium	63	151,96	Pa	Protaktinium	91	231
F	Fluor	9	19,000	Pb	Blei	82	207,19
Fe	Eisen	26	55,85	Pd	Palladium	46	106,4
Fm	Fermium	100	253*	Pm	Promethium	61	145
Fr	Frankium	87	223	Po	Polonium	84	210,0
Ga	Gallium	31	69,72	Pr	Praseodym	59	140,907
Gd	Gadolinium	64	157,25	Pt	Platin	78	195,09
Ge	Germanium	32	72,59	Pu	Plutonium	94	242
H	Wasserstoff	1	1,008	Ra	Radium	88	226,05
He	Helium	2	4,003	Rb	Rubidium	37	85,47

Tabelle 17: Fortsetzung

chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse
Re	Rhenium	75	186,2
Rh	Rhodium	45	102,905
Rn	Radon	86	222
Ru	Ruthenium	44	101,07
S	Schwefel	16	32,064
Sb	Antimon	51	121,75
Sc	Skandium	21	44,956
Se	Selen	34	78,96
Si	Silizium	14	28,086
Sm	Samarium	62	150,35
Sn	Zinn	50	118,69
Sr	Strontium	38	87,62
Ta	Tantal	73	180,948
Tb	Terbium	65	158,924
Tc	Technetium	43	98,913
Te	Tellur	52	127,60
Th	Thorium	90	232,038
Ti	Titan	22	47,90
Tl	Thallium	81	204,37
Tm	Thulium	69	168,934
U	Uran	92	238,03
V	Vanadin	23	50,942
W	Wolfram	74	183,85
Xe	Xenon	54	131,3
Y	Yttrium	39	88,905
Yb	Ytterbium	70	173,04
Zn	Zink	30	65,37
Zr	Zirkonium	40	91,22

*) Bei den so bezeichneten Atommassen handelt es sich jeweils um die Kernmassenzahl des stabilsten Isotops

Tabelle 18: **Wellenlängen λ der Balmerserie des Wasserstoffatoms ($n_e = 2$)**

n_a	gemessen in Luft	berechnet für Luft	berechnet für Vakuum
	$\cdot 10^{-10}$ m	$\cdot 10^{-10}$ m	$\cdot 10^{-10}$ m
3	6562,80	6562,76	6564,68
4	4861,33	4861,31	4862,73
5	4340,47	4340,45	4341,72
6	4101,74	4101,73	4102,93
7	3970,07	3970,07	3971,23
8	3889,05	3889,05	3890,18

Tabelle 19: **Erste Linie und Seriengrenze der verschiedenen Spektralserien des Wasserstoffatoms im Vakuum**

Name der Serie	n_e	erste Linie $\cdot 10^{-10}$ m	Seriengrenze $\cdot 10^{-10}$ m
LYMAN-Serie	1	1215,68	911,76
BALMER-Serie	2	6564,68	3647,05
PASCHEN-Serie	3	18756,24	8205,85
BRACKETT-Serie	4	40522,74	14588,18
PFUND-Serie	5	74598,67	22794,04

Tabelle 20: **Mittlere Gitterpotentiale E_p verschiedener Metalle in eV**

Ag	Al	Cu	Fe	Ni	Zn
−14	−17	−13,5	−14	−16	−16

Tabelle 21: **Austrittsarbeit A verschiedener Metalle in eV bei kalter Emission**

Ag	K	Na	Ni	Pt	W
5,6	2,1	3,2	11,7	6,0	5,7

Tabelle 22: **Massenveränderlichkeit des Elektrons bei Energieaufnahme im elektrischen Feld**

Energie in eV	Massenverhältnis m/m_0	Masse $m \cdot 10^{-31}$ kg
10^3	1,002	9,13
10^4	1,020	9,29
10^5	1,195	10,89
10^6	2,95	26,91
10^7	20,5	187,08
10^8	196,3	1788,84
10^9	1953,6	17795,3

Sachwortverzeichnis

